Julián Velarde Lombraña

HISTORIA DE LA LÓGICA

Prólogo de **Gustavo Bueno Martínez**

R. 47989

1

16(091)
VEL

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
5310466457

HISTORIA DE LA LÓGICA

Julián Velarde Lombraña

PROLOGO

§ 1. Poner un prólogo a una *Historia de la lógica*, ¿no es algo así como poner un prólogo a un decaedro regular, o un círculo cuadrado -es decir-, a la clase vacía? Así es, dirán quienes conciben a la *Lógica* como la exposición del sistema más formal de estructuras intemporales (incluso eternas y aun divinas) dadas "antes de la creación", a las cuales ha de ajustarse "cualquier mundo posible" y, en particular, el mundo temporal, histórico, en el que estamos envueltos. Entre esos "quienes", cabría contar, no sólo a Leibniz o incluso a Hegel -entre los *clásicos*- o bien a Bolzano o a Husserl entre los *modernos*, sino también a Scholz o a Haesenjäger -entre los *contemporáneos*. Y, por supuesto, dada la perspectiva de esta concepción de la *intemporalidad* -incluso eternidad, o divinidad- de las estructuras lógicas, una concepción que puede sin duda ser llamada (para bien o para mal) *metafísica* no se entiende muy bien qué contenidos pueda albergar el rótulo *Historia de la Lógica* -si la Historia es "Historia interna" y no un conjunto de relatos (anecdóticos, biográficos: coyunturales) que tengan algo que ver con aquellos que sobresalieron en el cultivo de la Lógica, de los "lógicos ilustres" y, en el mejor de los casos, con su medio social, con su época. Pero ¿cómo podría concebirse una Historia de lo que es intemporal? ¿Qué sentido podría tener la expresión de las "épocas de la eternidad"? Parece que ninguno -y, en consecuencia, el concepto de una"Historia de la Lógica" en sentido estricto sólo podría aspirar a ser una mera denominación de la clase vacía, o, a lo sumo, una mera conceptualización de la clase que no tiene ningún elemento, la clase ϕ.

§ 2. *Eppur si muove*. La Historia de la Lógica, de hecho, no es la clase vacía; por el contrario, es una clase superabundante, no sólo porque hay muchos libros (y puede haber otros, en número indefinido) consagrados precisamente a exponer esa *Historia de la Lógica* -aunque el primero escrito en español sea precisamente éste, de Julián Velarde- sino también porque cada uno de estos libros (al que podría hacérsele desempeñar el papel de especie de un género, precisamente el "género literario" *Historia de la Lógica)* rebosa de contenidos característicos, que no pertenecen a la Historia de la Matemática o a la Historia de la Lingüística, o a la Historia de la Psicología, o a la Historia de la Ontología... aunque mantengan muy estrechos vínculos con ellas, ateniéndonos simplemente al abigarrado índice de la presente obra: él nos pone delante de contenidos, y contenidos que se han dado y no casualmente en una sucesión histórica, tan variados como puedan serlo los siguientes: los problemas de la *dialéctica* -desde Platón y Aristóteles hasta Kant y Hegel y el marxismo-, *el silogismo* y la *clasificación*, los *predicables*, las *proposiciones* y las relaciones de oposición entre ellas, los temas de las *reglas de inferencia*, los *universales*, la cópula *est*, la *suppositio*, los *métodos* de las ciencias, la *combinatoria*, la *characteristica universalis* o ideografía lógica, los *juicios analíticos* y los *juicios sintéticos*, la *funciones electivas* y la función de Boole, el *cálculo de relaciones*, la *teoría de los tipos*, la teoría de la *axiomática*, la teoría de la *deducción natural*, la *gödelización de los funtores*, etc., etc., etc.

Pero reconocer la efectividad de los contenidos abundantes y específicos bajo el rótulo *"Historia de la Lógica"* es tanto como obligarnos a retirar por *modus tollens*, en alguna medida, la "concepción metafísica" de referencia. Ahora bien, tal apartamiento no podría sin más entenderse como algo equivalente a la resolución misma de las cuestiones que el rótulo "Historia de la Lógica" suscita. En efecto:

1) Precisamente en el momento de prescindir de la caracterización metafísica de la Lógica -caracterización que al mismo tiempo que proveía un criterio, aunque fuera ilusorio, daba definición a la Lógica, y nos evitaba también, de un modo no menos ilusorio, plantear las cuestiones de definición de la Historia de la lógica- se nos abren los problemas de la caracterización de la unidad que pueda convenir a los contenidos específicos que parecen corresponder a ese rótulo. Estos problemas giran en torno a dos puntos principales estrechamente correlacionados: El primero, es el problema de la unidad, en virtud de la cual los contenidos positivos puedan considerarse vinculados los unos a los otros de un modo interno (lo que no significa que este modo haya de ser el de la participación distributiva de alguna característica unívocamente entendida); el segundo, es el problema de la especificidad de esa unidad. Porque la unidad que buscamos no sólo es la razón en virtud de la cual los contenidos de referencia ha de poder constituir algo más que un mero agregado de casos yuxtapuestos; porque, además, esta unidad (que podría manifestarse en un orden genérico, según el cual los contenidos quedasen, sí, vinculados mútuamente, pero conjuntamente con los contenidos de la Historia de las Matemáticas, o con la Historia de la Ontología o de la Psicología) ha de constituir el criterio de distinción respecto de otras *unidades*, como puedan serlo la unidad que liga a los contenidos de una Historia de las Matemáticas o de la Ontología. Y así también recíprocamente: el criterio distintivo (externo) de la unidad si es verdaderamente profundo y no meramente ocasional o pragmático ha de podernos remitir al criterio constitutivo (interno) de esa unidad de los contenidos. No son meras "cuestiones de palabras", de "denominación", pues es lo cierto que muchos contenidos actuales de la Historia de la Lógica son, simultáneamente, contenidos de la Historia de la Ontología o de las Matemáticas, y esta circunsancia, a la vez que explica las *confusiones* (unas confusiones objetivas, es decir, no confusiones debidas a la negligencia del historiador) hace necesario el *regressus* a criterios eficaces, precisos (cortantes), por abstractos que éstos puedan ser. Por vía de ejemplo: La Historia de la Lógica hace referencia, aquí y allá, a las ideas de *todo* y de *parte*, a propósito del *modus sciendi* de la división o bien a propósito de la *cuantificación del predicado* (en el libro de Velarde encontramos exposiciones pertinentes de Platón o de Hamilton), cuanto directamente, y ya sea en su globalidad (como cuando se expone el principio de Russell, según el cual el *todo* no puede ser predicado de sí mismo), sino también en situaciones específicas (pues las *clases*, o *conjuntos* son *totalidades).* Pero muy pocos lógicos estarían dispuestos a considerar a los *temas de los todos y las partes* como una teoría capaz de ser incluida en la esfera de la Lógica; el propio Husserl pone este tema muy próximo a la *Ontología formal* (allí figuraba en la sistematización de Ch. Wolff, por ejemplo). Sin embargo, de hecho, también la *Lógica* tiene mucho que decir sobre los todos y las partes (Kant hace figurar la totalidad -*Allheit*- dentro de las categorías de la cantidad en su *Lógica Trascendental)* -y a la Historia de la Lógica le corresponde, por tanto, recoger todo cuanto los lógicos, en cuanto tales, hayan dicho al respecto. ¿Cómo diferenciarlo de lo que han dicho los *matemáticos* o los *ontólogos* -si es que hay diferencias objetivas? Parecidas cuestiones se suscitan a propósito de otros muchos contenidos. Una cuesión muy trillada fue la de las *categorías*. El *Libro de las Categorías* de Aristóteles es considerado por los historiadores de la Lógica como una parte del *Organon;* también los historiadores de la Lógica (y Velarde entre ellos) hablan de la doctrina kantiana de las categorías, en tanto que esta doctrina constituye el *cuerpo* mismo de la *Lógica Trascendental*. Pero ¿acaso el tratado de las categorías no constituye también el "cuerpo" central de la Ontología -y esto, desde las *Disputaciones* de F. Suárez hasta la *Ontología* de N. Hartmann? O aceptamos como inevitable (incluso como inofensivo) el estado de confusión absoluta entre una Historia de la Lógica y una Historia de la Ontología, o bien nos inclinamos por el panlogismo que identifica, con Hegel, la Lógica y la Ontología, o bien necesitamos criterios de

distinción. Entre los escolásticos era frecuente éste: las *categorías*, en tanto se consideran como "primeras intenciones" pertenecen a la Ontología; pero en tanto se consideran "segundas intenciones" (los *praedicamenta*, como estructuras objetivas -"entes de razón", según Juan de Sto. Tomás- constituidas por las relaciones de géneros, especies, diferencias genéricas y específicas, etc., etc.) pertenecen a la *Lógica* -a la *Historia de la Lógica*. Pero ¿estamos nosotros en condiciones de compartir semejante criterio distintivo, y, aunque lo apreciemos en lo que vale, en su situación particular, podemos tomarlo como un criterio general? Un último ejemplo: la Historia de la Lógica nos ofrece constantes alusiones a conceptos o estructuras que también vemos incluidos en la Historia de las Matemáticas (clases, conjuntos, álgebra de la lógica, incluso "Lógica matemática"); a veces, el historiador de la Lógica, (acaso más que el *lógico* de nuestro presente) se encuentra con contenidos que parecen pertenecer inequívocamente a las matemáticas (o al menos a su Historia). Si el lector abre el libro que tiene en las manos por la página 221, verá la forma de desarrollo en serie polinómica conocida como fórmula de Taylor y Mc. Laurin -y recordará cómo estas formas fueron utilizadas por el propio Boole en su *Analisis matemático del pensamiento* (y no de modo coyuntural, como mero ejemplo, sino como procedimiento para alcanzar una demostración de su *función lógica general)*. ¿No obligaría este simple hecho a declarar la necesidad de confundir la Historia de la Lógica y las Historia de las Matemáticas? De otro modo: si la confusión quiere evitarse, por los motivos que sea, será necesario regresar a ciertos criterios distintivos -que convertirán, además, a la Historia del Algebra de Boole en una Historia *crítica* (crítica, ante todo, de la propia intención de Boole -diríamos: de la Historia *emic* de la obra booleana- en tanto creía estar llevando a cabo un "análisis matemático del pensamiento").

2) Por otra parte, retirar de algún modo la concepción que hemos llamado metafísica de la *Lógica*, así como no implicaba negar o desconocer cualquier tipo de unidad específica entre sus contenidos, así tampoco puede implicar la autorización para resolver o reducir tales contenidos (incluso cuando se les supongan vinculados por hilos o criterios profundos) a la condición de meras manifestaciones "temporales", episódicas, testimoniales, de determinadas circunstancias sociales, o psicológicas, o culturales. Pues no es nada evidente que las estructuras lógicas puedan ser reducidas por el historiador a las "condiciones o causas" (sociales, culturales...) que dan cuenta de su formulación en una época mejor que en otra -pongamos por caso la *Lógica de clases* (con la "jerarquía" determinada, por las relaciones de inclusión que culminan en una "clase suprema o universal") a la condición propia de una sociedad de castas o simplemente, de una sociedad exclavista, a la manera como G. Thomson pretende hacer con ciertos estudios matemáticos (la Aritmética, democrática; la Geometría, aristocrática; o bien, la media armónica: los ocho vértices del hexaedro -respecto de sus caras y aristas- expresión de las nuevas clases medias de la sociedad griega). No es que neguemos tales condicionamientos: preciamente la dificultad aparece cuando la aceptamos, pero a la vez reconocemos (y este reconocimiento es el *fundamento* que hace que la propia concepción metafísica no sea enteramente gratuita) que las estructuras así formuladas rebasan, desde la naturaleza *terciogenérica* de su estructura, las condiciones que determinaron su formulación, y llegan vivas (llenas de vigor y de lozanía, como decía Marx en el célebre pasaje de los *Grundrisse* en el que se refiere al arte griego) hasta nosotros, por encima de las cambiantes épocas históricas, de los cambiantes "modos de producción". Y esto porque damos por evidente que, *de hecho*, la Historia de la Lógica la hacemos *desde* la Lógica del presente (a la que, sin duda, también suponemos los condicionamientos sociales, culturales, etc.), a la manera como la Historia de la Química sólo alcanza su medida cuando se hace desde la Química vigente, o como la Historia de la Geometría (incluso de la Geometría de Euclides) tiene que hacerse hoy desde el "horizonte" abierto por los geómetras no euclidianos, es decir, desde un *anacronismo constitutivo* de la propia metodología histórica. De otro modo: si el historiador de la Geometría fingiera, al exponer la doctrina de la cuadratura de la elipse a partir de sus lúnulas (asociadas a Hipócrates de Chíos) desconocer los teoremas posteriores concernientes a esta doctrina, para no incurrir en anacronismo, estaría atándose de pies y manos en sus propias operaciones de historiador crítico. Habrá de procurar entender el error de Hipócrates, dentro de las condiciones internas que hicieron po-

sible el descubrimiento de los teoremas verdaderos que llegan hasta nosotros, y, desde los cuales la Historia de la Geometría griega alcanza su peculiar conformación. Julián Velarde, por este motivo, puede acometer la Historia de la Lógica, precisamente *desde* el Tratado de la Lógica formal que publicó hace seis años.

La tarea del historiador de la Lógica, según esto, no consiste, por consiguiente, tanto en determinar las condiciones históricas temporales en las cuales se manifiesta o -como alguien diría- "cae" lo lógico-eterno, cuanto en explorar de qué modos las configuraciones dadas en circunstancias temporales, históricas (primo y segundo genéricas) alcanzaron la condición intemporal de las leyes terciogenéricas, y ello gracias a que los lógicos han obedecido al requerimiento del Señor que habla en el Prólogo del Fausto goethiano: "A lo que se cierne en el aire cual flotante aparición dazle fijeza con pensamientos duraderos".

Analicemos un poco más de cerca en los siguientes § 3 y § 4, respectivamente, cada uno de estos dos bloques de cuestiones.

§ 3. Los criterios utilizados para establecer la unidad entre los múltiples y heterogéneos *contenidos* de la Historia de la Lógica -y de la Lógica misma- pueden clasificarse en dos grandes grupos:

En un primer grupo incluiremos todos aquellos criterios que tienden a determinar una perspectiva uniforme (un "objeto formal") que fuera capaz de cubrir distributivamente (sea unívoca, sea análogamente) a todos y cada uno de los heterogéneos contenidos de referencia. Utilizando los consabidos conceptos escolásticos: La unidad de los contenidos lógicos se nos dará en la forma de un concepto unívoco o analógico de proporcionalidad. El criterio de la escuela tomista -los contenidos son *lógicos* en la medida en que pueden ser reducidos a la condición de entes de razón consistentes en ser segundas intenciones objetivas- pertenece a este primer grupo; y también pertenece a este grupo el criterio habitual que apela al supuesto carácter *formal* de los objetos lógicos: los *contenidos* tan heterogéneos que constatamos tras el rótulo *Historia de la Lógica* (silogística, todos y partes, proposiciones, ...), forman parte de su "objeto material"; todos ellos quedan unificados cuando son considerados como *formas puras*, y esta formalidad constituye a su vez el propio *objeto formal* de la Lógica. La *Historia de la Lógica* podría entenderse, por ejemplo, como la exposición del proceso de desarrollo y ampliación de esta unidad uniforme y formal, en tanto que ella no se da de golpe, sino que tiene que ir desprendiéndose paso a paso a través de los *contenidos materiales* más diversos. Ello explicaría las vacilaciones, confusiones y oscuridades -y, al mismo tiempo, daría cuenta de la distinción entre la *Lógica* (como sistema formal ya establecido) y la *Historia de la Lógica* (como proceso relativamente aleatorio de *desprendimiento* de esas formas de la materia de partida).

En el segundo grupo incluiremos a todos aquellos criterios que buscan determinar, entre todos los contenidos dados, alguno que pueda ser caracterizado como el más relevante, como el sujeto principal, con relación al cual todos los demás contenidos quedarían organizados a título de componentes, condiciones, consecuencias, etc., etc. La unidad buscada tiene ahora el aspecto de la unidad propia de la analogía de atribución (siendo el *sujeto principal* el primer analogado). El vínculo entre los diversos contenidos no requiere, por tanto, la uniformidad de los mismos, puesto que la unidad se nos muestra ahora más bien como la unidad de un complejo de elementos o partes heterogéneos que giran en torno a un núcleo de referencia, el sujeto principal. Los principales candidatos a *sujeto principal* (o primer analogado) de la *Lógica* (por tanto, de la *Historia de la Lógica)* han sido, seguramente, estos dos: el *silogismo* (o bien, "sujetos" afines: argumentación, razonamiento, deducción o inducción,...) y la *ciencia*. Podría afirmarse que ambos criterios tienen una inspiración aristotélica. El primero podría redescubrirse (en esta perspectiva) como derivado de la consideración de los *Primeros Analíticos* como tratado central del *Organon;* el segundo, en cambio, desplazaría este centro a los *Segundos Analíticos*, en tanto se ocupan del *Syllogismós epistemonikós*, del "Silogismo científico".

También hay que reconocer que, desde los criterios de la *unidad atributiva*, se da, al menos, la apariencia de una determinación de las tareas de la Lógica y de la Historia de la Lógica, así como de su diferenciación interna. La *Lógica* se definirá por su *objeto de resolución* (sujeto de atribución) -pongamos por caso, la *Ciencia* ("La Lógica es la Teoría de la Ciencia", sostiene Husserl en la III de sus *Investigaciones Lógicas):* obviamente, esto comporta el análisis de los componentes, presupuestos o contextos del propio sujeto de atribución (si se propone el *silogismo* como objeto de resolución, se dirá que la lógica también tiene que ocuparse de las proposiciones, de los términos, por un lado, y de las cadenas de silogismos por otro). La *Historia de la Lógica* irá mostrándonos el proceso de aproximación que culminará en la determinación del sujeto principal (por ejemplo, los "precedentes" platónicos del silogismo), así como el proceso de análisis de sus componentes y de sus aplicaciones -lo que comportará el cruce con otros territorios y el extravío por ellos (cuando las relaciones sucesivas conducen a lugares alejados del sujeto principal que comprometan la unidad y aun las proporciones convencionales de una disciplina -como ocurría regularmente en tantos manuales "eclécticos" de Lógica del siglo XIX, en los que no solamente encontrábamos capítulos dedicados al *método*, sino también a las condiciones *psicológicas* y *sociales* del conocimiento, a los *criterios* de verdad, etc., etc.).

Ahora bien: cabría afirmar que tanto los *criterios distributivos* como los *atributivos*, si funcionasen en un régimen *puro*, perderían su utilidad de tales criterios; y si la mantienen, es debido a que en la práctica funcionan como criterios *mixtos* (distributivos y atributivos). En efecto, un *criterio distributivo puro* dado en su estado más abstracto, si no pudiera *ejemplificarse* en algún contenido positivo concreto, carecería incluso de sentido definicional; con todo, a partir de él, no cabría nunca organizar sistemáticamente los contenidos que él cubría precisamente por la distributividad (que deja indeterminadas las relaciones entre los elementos del conjunto). Un *criterio atributivo puro* tampoco nos garantiza una delimitación del campo: aunque nos sumerge en él, *in medias res*, por así decir, (y esto es su gran ventaja, la de una definición deíctica o denotativa, que se desarrolla por recurrencia: "Matematica es el *cálculo diferencial* y todo lo que él presupone y de lo que él se sigue..., lo que le es análogo..."), sin embargo, no contiene explícitos los *criterios* de recurrencia. Juega con la ventaja de partir de la disciplina ya en marcha; sobre todo si se trata de una disciplina ya cerrada (en el fondo, la ventaja de aquella célebre definición de Física propuesta por Eddington: "Física es lo que se contiene en el *Handbuch der Physik"*). Pero, en este supuesto, la definición *atributiva* es, en realidad, una definición deíctica, que delega el análisis gnoseológico y se desentiende de él, a lo que tiene perfecto derecho el cultivador de la disciplina de referencia. Pero las cuestiones gnoseológicas quedan intocadas (¿por qué y bajo qué motivos estas materias están contenidas en el *Handbuch?* ¿Dónde termina la *Geometria* y dónde empieza la *Física* en *De revolutionibus orbium* de Copérnico, o en los *Principia* de Newton, obras inequívocamente *físicas* pero que *contienen* copiosos capítulos matemáticos y teoremas y métodos originales, obtenidos en contextos físicos -como es el caso del mismo *Calculo de fluxiones?).* El sujeto citado como *sujeto principal* del campo de una disciplina, no por serlo, deja de *envolver* un cierto criterio de *uniformidad*, por medio del cual tiene lugar la extensión, propagación o recurrencia de estos contenidos (propagación que no excluye la aparición de contenidos *heterogéneos*, resultantes del mismo proceso uniforme de recurrencia en situaciones específicas -como puedan serlo en geometría las transformaciones de la curva en recta, o del polígono en circunferencia).

Consideremos brevemente la caracterización de la Lógica (y de la Historia de la Lógica) a partir de la oposición *forma y materia*. "La Lógica se caracteriza por su constante orientación hacia la determinación de estructuras formales, aun concediendo que éstas han de ser desprendidas de materiales heterogéneos -matemáticos, físicos, políticos...- (con lo cual se logra dar cuenta de las tareas de una Historia de la Lógica en cuanto contradistinta de la Lógica sistemática abstracta)". Si este criterio parece tan potente, es precisamente porque no funciona en abstracto, sino referido a unos *modelos* (sujetos principales, al menos a efectos de definición) que son los que propia-

mente marcan el alcance y lugar de las *formas de referencia* (como pueda serlo la combinatoria algebraica silogística, en tanto prescinde "de los contenidos") e introduce la unidad de los contenidos según el modo *atributivo*.

Porque abstraídos estos modelos o contextos, ¿qué podría significar la caracterización de la Lógica y su demarcación de las Matemáticas, Física, Retórica, etc. por medio de la oposición entre *forma* y *materia* en abstracto? La distinción *forma/materia* carece de sentido absoluto; es sincategoremática; requiere la determinación de *parámetros* para alcanzar *sentido relativo* (o, si se prefiere, los *sentidos* que suele ir recorriendo dentro del marco propio de una distinción entre conceptos conjugados). Sólo incurriendo en círculo vicioso ("la Lógica se define por su orientación hacia las formas... *lógicas")* alcanza cierta apariencia el criterio que analizamos (acaso porque él es sólo un modo retórico de mantener una definición *deíctica*, atributiva). Pues también hay *formas matemáticas*. ¿Acaso la "función exponencial" $y = e^x$ no es *formal* respecto de *contenidos* tales como el interés compuesto, el proceso de desintegración radioactiva, el crecimiento de un bosque...? Y, sobre todo, hay *materias lógicas*. ¿Habrá que ignorar sencillamente todo aquello que tiene que ver con los *Segundos Analíticos*, y que tradicionalmente se denominaba *Lógica Material*, o *Lógica Maior*, en nombre de un postulado que propusiese reservar el nombre de *Lógica* tan sólo a la *Lógica Formal?* Sin duda, muchos tratadistas de *Lógica Formal* proceden como si estuviesen obedeciendo a esta postulado -considerando a la *Lógica Material*, a lo sumo, como una Lógica *aplicada;* aplicación de las "formas lógicas", análisis -"formalización"- del lenguaje político o científico. Pero este postulado pide gratuitamente el principio -pues de lo que se trata es de analizar qué pueda significar la *Lógica Material*, no ya como mera *aplicación* de la Lógica Formal presupuesta, sino como una manifestación de la logicidad que puede darse al *margen* de la misma *Lógica Formal*, aunque también en interacción con ella.

Las cuestiones precedentes por complejas, difíciles y ramificadas que ellas sean, arrastran siempre un determinado entendiemiento de la oposición entre *materia* y *forma*. Una distinción que, a nuestro juicio, es fecunda, dialéctica -y ello en el sentido más fuerte: la *oposición* materia y forma, aunque imprescindible, tiene que terminar rectificándose, como oposición *metamérica*, para reaparecer como una relación *diamérica* entre determinados *contenidos* ("parámetros"). Las *formas lógicas* (las que constituyen el campo de la Lógica formal) no serán, según esto, *formas puras*, abstractas (de toda materia), sino formas relativas a determinados contenidos *materiales* (como puedan serlo objetos corpóreos finitos, fichas o procesos eléctricos o, sencillamente, signos tipográficos). Esta concepción (la que venimos denominando *materialismo formalista)* se encuentra, como problema central, con la necesidad de determinar la naturaleza de una *Lógica material* y su demarcación respecto de la *Lógica formal*, si es que la propia *Lógica formal* también es, de algún modo, *material* (por sus contenidos).

¿Cuál es la unidad que media entre ambas manifestaciones de la logicidad? En otras ocasiones hemos ensayado el criterio de la *identidad*, en el sentido siguiente: *Lógica* sería todo aquello que tiene que ver con la *identidad*, cuando la identidad aparece en ciertos contextos operatorios (la identidad en tanto se concibe como siendo múltiple de modo inmediato -los esquemas de identidad no son idénticos entre sí- implica la diversidad, la heterogeneidad). Según esto, la *Lógica* será todo cuanto tenga que ver con la "identidad operatoria" -dando a esta fórmula alcance proporcional al que tienen las expresiones: "la matemática es todo cuanto tiene que ver con la idea de *extensión* o de *orden"*, o bien: "física es todo cuanto tiene que ver con la idea de *masa"*. Según esto, la oposición entre una *Lógica Formal* y una *Lógica Material* tendría que establecerse a través de otros criterios que intersectan con la identidad. Sugerimos que estos criterios son precisamente los mismos que introduce la distinción entre una *ciencia categorialmente cerrada* y otras *disciplinas* (eminentemente filosóficas) que, sin dejar de ser racionales, no pueden considerarse *cerradas*. La *Lógica Formal* se habría ido constituyendo como una disciplina categorial, cerrada; y este proceso habría tenido lugar, de hecho, en los dos últimos siglos (sin olvidar los precedentes helénicos, en particular, los *Primeros Analíticos* aristotélicos).

El cierre operatorio de la Lógica formal habría tenido lugar mediante un *regressus* operatorio, a partir de operaciones *autoformantes*, que nos llevan a un cierto tipo de relaciones específicas de *identidad* (justamente, las llamadas *identidades formales*, tipo $\alpha \cap \alpha = \alpha$), desde las cuales se *materializan* las mismas operaciones autoformantes -y aquí radica el principio de distinción o los criterios de distinción con las operaciones matemáticas (heteroformantes).

Las relaciones y estructuras de identidad, cuando no se abren camino a través de los variados cursos de operaciones autoformantes, pero sí se nos dan en cambio como sistemas objetivos en sí mismos ontológicos (a la manera como los cursos lógico-formales son en sí mismos matemáticos, "extensos"), pero susceptibles de desempeñar la función (en su *progressus)* de *cánones* o reglas directivos de operaciones que acaso no son en sí mismos autoformantes y podrían considerarse como constitutivos del campo de la *Lógica material*. Este campo es mucho más amorfo e indeterminado que el campo categorial recortado por las operaciones autoformantes de la Lógica formal; pero ello no significa que en el todo sea caótico. Podríamos agrupar sus muy heterogéneos contenidos en torno a tres núcleos o modos de la identidad material que designaremos a partir de ideas de amplia tradición filosófica: el núcleo de las identidades *esenciales*, el de las identidades *causales* y el de las identidad *sustanciales*. Las identidades *esenciales* comprenden, por ejemplo, las relaciones de *todo* y *parte* y, por tanto, la teoría de la *clasificación;* en torno al núcleo de las identidades *causales* (siempre que la *causalidad* se considere como un proceso vinculado a la identidad), habrá que poner también, desde luego, las relaciones de fundamentación, *principio* o *razón* (en el sentido de "principio de razón suficiente"); por último, las *identidades sustanciales* encontrarían su determinación más rica en las *identidades sintéticas*, en torno a las cuales estarían organizándose las mismas estructuras lógico-materiales que llamamos *ciencias categoriales* (y entre ellas, la propia Lógica formal). Hay que reconocer que el tratamiento de los contenidos que atribuimos a la *Lógica material* es muy distinto del tratamiento de los contenidos de la *Lógica formal:* este es más *científico* -aquél es más *filosófico* (con todos los riesgos que esta condición implica). La *Lógica formal* estará siempre acosada por los problemas derivados de su intersección y deslindamiento con las *matemáticas;* la *Lógica material* estará siempre acosada por los problemas derivados de su intersección y deslindamiento con la *Ontología*. Pero sería enteramente gratuito negar, por decreto, a la Lógica material el derecho a llamarse *Lógica* -y a distinguirse de la Ontología (o de la Psicología). Al menos, esto equivaldría a ignorar la tradición más tenaz de nuestra cultura. Para referirnos, por brevedad al tratado de la *causalidad* -puesto que él es el que más de lleno parece pertenecer íntegramente a la Ontología-, y sin necesidad de citar a Kant (que incluye la *causalidad* entre las *categorías* de su *Lógica Trascendental)* o a Hegel (por su panlogismo), nos limitaremos a autorizar nuestra consideración del tratado de la causalidad como un tratado al que, al menos, de algún modo, hay que otorgar un interno significado *lógico* (y que será lógico-material) con el proceder de Hume, cuando, después de exponer sus célebres "ocho reglas para juzgar de las causas y los efectos" *(Tratado de la Naturaleza Humana*, libro I, parte III, cap. 15) apostilla: "Esta es toda la lógica que me parece apropiada para emplearla en mi razonamiento [sobre la causalidad]". Si duda, podrá intentarse reinterpretar esas *reglas* de Hume en el marco estricto de la Lógica formal (en esta línea A. Papp; Krausser); pero este intento no nos parece viable, puesto que, sin perjuicio de la formalización no podemos perder de vista que muchas de estas formulaciones contienen relaciones exóticas respecto de las relaciones ordinariamente utilizadas en la Lógica formal (así, las relaciones de *contigüidad* o las de *anterioridad* y *posterioridad temporales).*

Desde estas coordenadas cabe señalar una diferenciación, al menos en principio, entre la *Lógica* y la *Historia de la Lógica*, siempre que demos por supuesto que las relaciones y estructuras de la identidad no hay por qué concebirlas como relaciones y estructuras *exentas*, sino dadas siempre en el proceso de otras relaciones y estructuras matemáticas, ontológicas, políticas o culturales. El proceso del desarrollo categorial de las identidades autofor-

mantes puede concebirse como un proceso de *cierre*, que tiene lugar en el seno de otros contextos reales, y de los que va segregándose trabajosamente; la Historia de la Lógica formal -como es el caso principalmente de la Historia de la Lógica que el lector tiene en sus manos- es el único camino sistemático para ir conociendo este proceso de *segregación* o *purificación* de las *formas lógicas* respecto de otras *identidades materiales* (causales, holistas, etc.) o de contextos de otro orden, evitando de este modo la hipostatización y, al mismo tiempo, asistiendo al proceso de su encadenamiento sistemático.

§ 4. Hemos tratado de señalar las direcciones en las que pueden encontrarse extensos territorios que forman parte indiscutible del campo de una Historia de la Lógica. Por un lado, la dirección señalada por las relaciones entre las estructuras *lógico-formales* y las estructuras *lógico-materiales;* por otro lado, las señaladas por las relaciones entre estas estructuras materiales de la identidad y los "contextos extralógicos" (las operaciones tecnológicas, la práxis política, etc., por ejemplo), a través de los cuales suponemos que aquéllos cristalizan. Estos "contextos circumlógicos" han de considerarse, a su vez, determinados en el proceso histórico en el que tiene lugar el juego de las estructuras tecnológicas, sociales, políticas, culturales; de este "juego" resultarán las líneas de los tejidos lógicos: el *material* de una Historia de la Lógica es superabundante.

Pero la Historia de la Lógica no tiene por qué fijar sus tareas en el sentido de la *reducción* o *resolución* de las estructuras lógicas en las configuraciones "circumlógicas" a través de las cuales suponemos que la determinan. Que podamos fijar, con mayor o menor precisión, los procesos de *génesis* (histórica) de las *estructuras* lógicas (materiales y formales) no significa que hayamos de *reducir* la *estructura* a su *origen* (o, si se prefiere, más en particular: el *contexto de justificación* a los *contextos de descubrimiento*, o la *validez* al *origen);* y no en virtud de un mero postulado, sino en virtud de una posibilidad que habría de ser recorrida en cada caso, de llevar a cabo una *absorción* ulterior de las configuraciones *generadoras* en las propias *estructuras generadas*. Al menos, esta es la dialéctica que estimamos más adecuada al caso. Pero, en consecuencia, para que la *reabsorción (consecutiva* a la *reducción*, en el sentido expuesto) sea posible, será también necesario que la configuración generadora pueda considerarse como *interna* (no exterior -"extralógica", en nuestro caso) o "envuelta" por la propia *configuración generada*. En otra ocasión hemos dado ejemplos de esta dialéctica (reducción/absorción) aplicada a campos como los de la Aritmética: la *estructura* aritmética de la *numeración decimal* tiene una *génesis* bien conocida, a saber, la pentadactilia del *Homo sapiens sapiens*, pero no se reduce a ella -sin perjuicio de que en la numeración romana los símbolos digan referencia a las manos, y de que todavía hoy sigamos hablando de números *dígitos*. Pero los *números* no son meramente *dedos* sublimados, y ello porque los propios conjuntos de los dedos de las manos constituyen un *caso particular* de los conjuntos aritméticos cardinales (o de ordinales) en los cuales ellos se *incluyen* (se "absorben"). ¿Cuál es el *esquema de absorción* utilizable en la dialéctica de la *reducción* de las estructuras lógicas a contextos "generadores", en tanto dicen referencia a la operatividad de los sujetos racionales? Pues, según lo ya dicho, estos contextos generales no podrían ser considerados como *externos* (con lo que la Historia sería también externa), sino como siendo ellos mismos *internos* a la logicidad. No pueden, según esto, ser considerados *extralógicos* -ni menos aún *prelógicos*, al modo de Lévy-Bruhl-, sino *circumlógicos*. ¿Cómo distinguirlos, entonces, de las *estructuras lógicas* que ellos generan, si venimos suponiendo que esos contextos generadores ya han de ser ellos mismos lógicos? A nuestro juicio, sólo de un modo: reconociendo dos *estados* de la presencialidad de las mismas estructuras lógicas, dos estados que ya fueron, por lo demás, reconocidos por la tradición escolástica por medio de la distinción entre el *ejercicio* (en nuestro caso la *Lógica utens)* y la *reprentación*, si bien esta distinción hubo de ser elaborada con ayuda de ideas metafísicas. En efecto: la *re-presentación* se entendía como una toma de conocimiento (una re-producción *especulativa*, en el espejo de la mente) de los propios actos racionales; no, es cierto, como una toma de conciencia de una actividad inconsciente, pero sí como una toma de conciencia *refleja* de

lo que sólo era consciente en sentido *directo*. Nos parece claro hoy que la distinción entre conciencia *directa* y *refleja* no es otra cosa sino una trasposición de la distinción *inconsciente/consciente*, una vez que se ha declarado inadmisible la *racionalidad inconsciente*. Si ésta es *consciente* lo será en sentido *directo* no *reflejo*. Pero ¿qué añade la metáfora de la *reflexión* a la conciencia, que a su vez, era ya concebida *especulativamente* como un *espejo?* Nada. Cuando, pues, nos decidimos a recuperar la distinción escolástica entre el *ejercicio* y la *representación* de las estructuras lógicas, lo hacemos sin el compromiso de la explicación propia de una metafísica *mentalista*, y ateniéndonos a una distinción que, sin embargo, ya por sí misma testimonia que el reconocimiento de los dos estados de la Lógica no es una inaudita ocurrencia nuestra. Las *configuraciones generadas* serán, pues, un *ejercicio* de relaciones, formas o estructuras lógicas; serán Lógica operante (por ejemplo autoformante), "viviente", utilizada *(utens)* para organizar los contenidos de nuestra experiencia tecnológica o jurídica: una lógica acaso más "robusta" y certera de la que eventualmente pueda disponer un individuo (o un grupo) de débil desarrollo intelectual, pero que, sin embargo, haya aprendido como rutina las *summulas*. Pero tampoco habrá por qué creer que siempre la *Lógica ejercida* haya de ser "más robusta" que la *Lógica representada* -incluso, en ocasiones, la configuración generadora puede significar un *ejercicio* particular, sin duda, de la estructura generada, pero tan limitado y determinado que en este ejercicio será posible ver antes una presencia rudimentaria y confusa, que una presencia vigorosa y certera. Podríamos ilustrar esta situación con una *hipótesis* que hemos sugerido en otro lugar para explicar la famosa paradoja de la Matemática griega, en tanto que ella "desconoció el cero" -y, con ello, la posibilidad de organizar el *cuerpo* de los números racionales. Esta paradoja presupone la cuestión causal: "¿Y por qué los indios o los mayas -que no tenían un Eudoxio o un Euclides- sin embargo conocieron el cero?". Como constituiría una respuesta metafísica (y una petición de principio) decir que ese *descubrimiento* se debió a su mayor "talento matemático", hay que recurrir a hipótesis más positivas (aunque estas hipótesis no estén, ni mucho menos, verificadas). La nuestra es ésta (hasta que se proponga otra mejor): el *cero* es una *representación gráfica* (en sociedades que ya poseían la escritura) de una operación (o ejercicio) realizada en el contexto de una organización social jerarquizada tan rigurosamente como pudieran serlo las sociedades de castas de la India o de Mesoamérica. En un ceremonial político-religioso, en el que las representaciones de todas las castas debían concurrir según su ordenación jerárquica, puede eventualmente faltar un eslabón de la serie, o ser destruido, sin que por ello la serie jerárquica desaparezca: el lugar vacío tendrá que ser, entonces, representado por un *símbolo* que podía ulteriormente ser utilizado como cero. En esta situación hipotética diríamos que el *cero* estaría siendo ejercitado -representado-, no como concepto *abstracto* (testimonio de un "talento matemático superior"), sino como un *símbolo confuso*, envuelto en representaciones místicas, propias de una sociedad situada en un "nivel inferior" al de la sociedad griega posterior a las guerras médicas. En cualquier caso la *representación lógica* de la "Lógica viviente" no podrá, correlativamente, considerarse como una "toma de conciencia general" de la lógica ejercida (o como una lógica refleja, o una lógica *en sí* y *para sí*, en terminología hegeliana), ni la Lógica formal como una *Lógica Trascendental* o *General*, por tanto; sino que la propia *Lógica Formal* habría de ser interpretada, a su vez, como un *ejercicio* (operatorio *particular, específico)* del mismo *proceder lógico general*, de cuya energía se nutre la propia representación. Sólo así podremos hablar de una *absorción* de los *contextos generadores* de la *Lógica formal* en la propia *Lógica formal*, en tanto ésta, a su vez, se nos presenta como un *ejercicio*. Y esto obligará a plantear con más precisión las cuestiones de "naturaleza": ¿Qué es la Lógica formal (si no es "representación general")? ¿Cuál es su génesis histórica (si su origen no puede remontarse al proceso mismo de la "autoconciencia")?

A lo primero responderíamos: la *Lógica formal* es el resultado de una contrucción concreta (por ejemplo, con símbolos tipográficos) de estructuras regidas por leyes lógicas (de identidades autoformantes) que "representan" esas leyes, pero no en su generalidad, sino precisamente en su particularidad algebráica (que incluyen por ejemplo, la proyección en una superficie bidimensional, de relaciones lógicas que pueden afectar al espacio n-dimensional).

Como escribe el propio Julián Velarde en su tratado de *Lógica formal:* "La Lógica formal constituye un sistema categorial, un proceso que ha logrado un "cierre categorial" y, con ello, la situación de una ciencia positiva" (pág. 22). El *sistema formal* (acaso mejor: los sistemas formales) así construidos alcanzaron el privilegio propio de un *metro* (espacial) intersubjetivo en una cultura dada; su *fecundidad* estriba precisamente en la *desconexión semántica* que las *fórmulas algebraicas* comportan (desconexión que no es, en cualquier caso, absoluta, puesto que los *símbolos lógicos* siguen siendo ellos mismos *figuras corpóreas, espaciales*, etc., etc.). La *Lógica formal* es la *representación* (o proyección) de la operatividad lógica en el marco de un espacio bidimensional dotado de una autonomía y capacidad de coordinación müy grandes; pero no totales, la *Lógica formal* no *garantiza* que todos los demás procesos operatorios, incluso los espaciales, tengan que ser coordinables (o mensurados) por ellos. La *Lógica formal* es una *norma* de las operaciones lógicas que pueden tener lugar en otros campos, sin duda, pero esta *norma* no tiene un sentido *trascendental* que pueda convenir al propio flujo del material al que se aplica sobre ella misma: de otro modo, la *normatividad* de la Lógica material sólo es trascendental si se entiende dialécticamente, supuesta la coordinabilidad de los distintos metros con el espacio formal. Sólo que esta coordinabilidad no puede establecerse previamente a la aplicación de sus leyes y, por tanto, el espacio lógico formal contiene en sí mismo las condiciones de su coordinabilidad y las "reglas" para conseguir la adaptación a él, mediante hipótesis *ad hoc*, de otros ámbitos no coordinables. Ilustremos estas ideas con un sencillo ejemplo: la *Lógica formal* establece como *teorema* la necesidad de que toda relación R que sea, en un dominio dado, simétrica y transitiva, haya de ser también reflexiva. Este *teorema* se demuestra algebráicamente apoyándose en la *identidad* de las diferentes *menciones* que en la superfice plana puede alcanzar un mismo *signo-patrón* (por ejemplo, R x,x). El teorema se aplicará como norma a todas las situaciones en que existan relaciones dadas en estas condiciones. ¿Qué ocurre cuando el teorema se aplica a un plano geométrico en el cual están dados infinitos haces de infinitas rectas paralelas? La relación de paralelismo es *simétrica;* es *transitiva;* luego, según el teorema, habría de reconocerse también como *reflexiva*. ¿Y que inconveniente hay en decir que "cada recta mantiene una relación de paralelismo consigo misma"? El caso de la relación causa/efecto, sería diferente: la relación es asimétrica y, por tanto, el concepto de *causa* sería absurdo. Si embargo, y aunque la asimetría no constituye ahora un obstáculo, parece que la reflexividad del paralelismo es incompatible con otro principio (ahora estrictamente *geométrico),* el que establece que dos rectas paralelas no pueden tener puntos comunes. La reflexividad obligaría a decir que una recta, que tiene infinitos puntos comunes con otra es, sin embargo, paralela a ella. ¿Hasta dónde alcanza, por tanto, el radio de la esfera de normatividad del teorema lógico de referencia? Parece que es la misma "resistencia" de la situación geométrica la que obligará a redefinir las condiciones de coordinabilidad del teorema lógico-formal, concluyendo, por ejemplo, que si él no se aplica al caso, no es porque haya que retirarlo, sino porque el caso no es coordinable (porque una recta de un plano no puede equiparase a un signo particular de variable cuyos "desdoblamientos" o menciones lo mantienen dentro de su definición de indentidad). A lo segundo habría que decir que la génesis de la *lógica formal* hay que buscarla en fuentes que tengan que ver con la *escritura alfabética,* ya coordinada, como medio de representación y comunicación de prácticas tecnológicas, retóricas, forenses, científicas, etc., *específicamente* diversas, pero que, precisamente, en sus re-presentaciones gráficas alcanzaron un cierto grado de semejanza en estos procesos de construcción autoformante. De ahí se deduce que no tenemos por qué suponer que todos los *símbolos lógicos* sean unívocos -porque caben *familias* diferentes e irreductibles; pero, en todo caso, es la Historia de Lógica la que habrá de establecer sus *orígenes*. La determinación histórico-filológica de estos *orígenes* tendrá siempre -contemplada desde el sistema- el valor de un *modelo* abierto por él y a la vez el instrumento *crítico* para establecer las interferencias que ha sido preciso *segregar* para alcanzar la "pureza formal", terciogenérica, y un testimonio significativo en cuanto a la medida del alcance que haya que atribuir a las mismas estructuras *descubiertas*. Una estructuración social determinada, una realidad científica, pueden ser los contextos generadores de un sistema formal también de-

terminado -la organización en clases de las sociedades de la Antigua Grecia, consituye, sin duda, el contexto generador de la silogística aristotélica; la revolución científica encarnada por las geometrías no-euclidianas fue el marco en el cual se incubó el formalismo lógico de Hilbert. Pero el sistema formal de referencia no se *reduce* a su contexto generador, puesto que no es un mero *reflejo* -si se quiere, un "revelado fotográfico"- suyo. El sistema formal se configura mediante el ejercicio de esas estructuras operatorias facilitadas por el contexto generador, de suerte que ellos resulten compuestos con terceros contextos gracias a los cuales puedan quedar *segregados* (abstraídos) los generadores. En este sentido, los *descubrimientos* lógico-formales no pueden equivaler (según hemos dicho) a un mero "levantar el velo" que cubriese a los contextos generadores para que las estructuras en ellos contenidas se *reflejen* o se *revelen* en una conciencia absoluta (como si la Historia de la Lógica pudiera entenderse simplemente como una Historia del conocimiento o "descubrimiento" de las estructuras preexistentes). Los *descubrimientos* lógicos, en tanto que resultan del *ejercicio* de ciertas estructuras operatorias (social, tecnológica y culturalmente determinadas), tienen también mucho de *construcción*, de *invención* -o de "descubrimiento", pero siempre que a este concepto se le otorgue el significado operatorio que le corresponde ("descubrimiento" como transformación de un *precontexto* P_i por medio de un operador O_n, en otro contexto P_j, de suerte que la transformación pueda aproximarnos unas veces al tipo de las transformaciones llamadas idénticas, o bien, otras veces, a las transformaciones llamadas *inversas* -como sería el caso de los descubrimientos asociados a las "revoluciones científicas"). También en la Historia de la Lógica podría haber "descubrimientos revolucionarios", junto, desde luego, con otros "descubrimientos neutros". De todos ellos, podemos encontrar abundantes ejemplos en la *Historia de la Lógica* de Julián Velarde.

Introducción

La *Historia de la Lógica* que aquí presentamos constituye el volumen IV del proyectado *Manual de Lógica*, cuyo vol. II: *Lógica Formal* apareció en 1982. Seguimos manteniendo las ideas directrices que, extraídas de la "teoría del cierre categorial", expusimos en la introducción a dicho vol. II. Como ampliación y especificación de lo allí expuesto consideramos de utilidad el análisis de la expresión "Historia de la Lógica" apelando a la teoría semántica de Frege, según la cual toda expresión lingüística dotada de sentido puede ser concebida como descompuesta en dos partes, una de las cuales está completa en sí misma (el argumento), mientras que la otra precisa de complemento; es no saturada (la función).

En la aplicación de este análisis a la expresión "Historia de la Lógica" podemos distinguir: "Historia de", como función, y "la Lógica", como argumento. Y es a "la Lógica", en cuanto término, a la que cabe buscar una referencia, a la que cabe atribuir un campo, una extensión, en tanto que la "Historia de" es una función que necesita ser saturada; sólo cobra valor cuando toma un argumento: la Lógica, la Filosofía, el Arte, la Lingüística, etc. En consecuencia, el significado de la "Historia de la Lógica" sólo quedará dilucidado cuando:

a) Quede determinada la referencia (la extensión, el campo) de la Lógica, y
b) Quede determinado el sentido (el tipo de función) de la Historia, en cuanto aplicación al campo de la Lógica.

Por lo que se refiere al apartado (a) nos remitimos de nuevo a la *Introducción de Lógica Formal*. Allí hemos intentado acotar el argumento (el campo de la Lógica). Y tal acotación es la que proporciona el sentido a la función en cuanto aplicada a ese argumento, esto es, el sentido de la Historia (de la Lógica). Señalamos allí el alto valor gnoseológico de la Historia (de la Lógica) en el *progressus* hacia la constitución de las categorías específicas de la Lógica. Añadimos aquí que la consideración histórica de la Lógica constituye la demarcación misma de su campo categorial, por cuanto que ese campo no subsiste dado de antemano (en el mundo ideal según Platón o Frege, en la mente divina según San Agustín o en el Espíritu antes de la creación del mundo según Hegel), sino que se va constituyendo como tal según causas y circunstancias precisas en un proceso de desarrollo histórico-científico. La Lógica, entendida como disciplina científica, exige una explicación (interna, gnoseológica) de por qué cristalizó en una época y en un lugar determinados, exige el conocimiento de los mecanismos que contribuyeron a su constitución como ciencia. Y es aquí donde situamos el valor gnoseológico de su Historia.

A la Historia de la Lógica compete determinar la constitución-desaparación de categorías e ideas que en un proceso de desarrollo e influencia mutua han configurado "la Lógica" y la *symploké* entre esas categorías e ideas constituyen su cuerpo. Para recomponerlo, hemos procurado actuar, según aconseja Platón, como un dialéctico: cortar por las junturas naturales. El resultado ahí está.

I. Los orígenes

1. Presupuestos gnoseológicos

Partimos del supuesto gnoseológico según el cual las ciencias proceden, no de la Filosofía, sino de técnicas y actividades artesanales[1].Y, así, la Geometría no nació de los pitagóricos, sino de la práctica de los agrimensores, de las necesidades de medir los campos en Egipto: "La Geometría nació para medir el suelo y fue en sus principios un conjunto de conocimientos experimentales"[2]. Así mismo, la Astronomía no nació de la Astrología, sino de necesidades muy concretas, como la navegación. La Química nace, no de la Alquimia, sino de los gremios de cocineros y médicos. La Lingüística nace, no de los mitos sobre el origen del lenguaje, sino de las necesidades políticas (el obispo de Avila elaboró en nombre de Nebrija, para la Reina Isabel, la frase "siempre la lengua fue compañera del Imperio"), o religiosas (necesidades de fijar los textos sagrados en la India), o económicas (defensa de la isegoría en Atenas), o de técnicas oratorias (el debate contradictorio, la discusión, la argumentación). "Históricamente son la retórica y la sofística las que mediante el análisis que llevan a cabo de las formas del discurso como instrumento de victoria en las luchas de la asamblea y del tribunal, abre el camino a las investigaciones de Aristóteles y definen al lado de una técnica de persuasión, las reglas de la demostración; sientan una lógica de lo verdadero, propia del saber teórico, frente a la lógica de lo verosímil o de lo probable que preside los azarosos debates de la práctica"[3].

Las obras de Aristóteles sobre lógica quedan encuadradas dentro de esta actividad en la vida pública, la práctica foral. El *De sophisticis elenchis* está dedicado a mostrarnos las reglas que han de conducir a la identificación y desenmascaramiento de los argumentos inválidos. En los *Tópicos*, en cambio, se dedica a suministrarnos las reglas para el desarrollo de las disputas mediante argumentos válidos. Incluso en su obra *De Interpretatione*, dedicada a una clasificación abstracta de las partes del discurso, el estudio de las proposiciones tiene como punto de referencia las actividades de los sofistas[4].

Es desde esta perspectiva como se entiende que la lógica en la tradición peripatética nunca llegase a ser considerada como una parte de la Filosofía, sino como una técnica (Τέχνη).

La otra gran escuela de Lógica en la antigüedad nos muestra igualmente el origen de la Lógica en los enredos del discurso cotidiano. Los megáricos alcanzaron gran reputación por su destreza en la disputa verbal como testimonia Platón en su *Eutidemo*. Se les conocía bajo el nombre de *erísticos* (argumentadores). Y para los estoicos las dos partes de que se componía la Lógica eran: a) La retórica, definida como "el arte de decir bien en discurso dilatado"; y b) la dialéctica, "el arte de disputar rectamente por preguntas y respuestas"[5]. En ambos casos se trata de desarrollar unas artes o técnicas con vistas a elaborar una teoría de la argumentación.

Es muy importante examinar este concepto de *técnica* (Τέχνη) con referencia a nuestra tesis según la cual las ciencias proceden de técnicas. Entendemos este concepto tal como es desarrollado por Aristóteles en la *Retórica:* La tecnología es una actividad que busca transformar la realidad y se caracteriza frente a la

---

[1] Confert G. Bueno: *Ensayos sobre las categorías de la economía política*. La Gaya Ciencia, Barcelona, 1972, p. 26 y ss.
[2] F. Vera, *La lógica en la matemática*, ed. Páez, Madrid, 1929, p. 135.
[3] J. P. Vernant, *Los orígenes del pensamiento griego*. Trad. M. Ayerra, Eudeba, Buenos Aires, 1965, p. 39
[4] *De Inter.*, cap. 6, último párrafo.
[5] Confert Diógenes Laercio, *Vida de filósofos ilustres*, II, 112.

empírica que no conoce más hechos particulares porque utiliza reglas generales; se requiere la intervención de la actividad humana, y es esencial la idea de producción que imita o supera la naturaleza[6]. Por ejemplo, el cocinero opera según unas reglas generales que constituyen el arte de cocinar. Además, frente a la ciencia, que tiene por objeto las esencias y no tiene objetivos fuera de sí misma, la técnica tiene un fin distinto de ella, opera para construir algo que no está dado en la naturaleza, sino que debe estar mediado por la propia actividad humana[7], por ejemplo construir una casa o un lecho. La casa y el lecho no se construyen por sí mismos, no nacen ni se pueden plantar como un árbol, sino que necesitan las técnicas de la arquitectura y de la ebanistería. La retórica, como la dialéctica, constituyen técnicas que suponen un lenguaje ya dado y tienen como objetivo los medios persuasivos para cada caso[8]. Estas técnicas van encaminadas a la consecución de argumentos que "no son hallados por nosotros, sino que tienen que ser dispuestos por el método y por nosotros y que hay que inventarlos"[9].

2. Técnicas de las que procede la lógica

La Retórica

Dice Cicerón en el *Orator* (cap. 32, pp. 113-114):

"Esse igitur perfecte eloquentis puto non eam tantum facultatem habere quae sit eius propria, fuse lateque dicendi, sed etiam vicinam eius ac finitimam dialecticorum scientiam assumere... Zeno quidem ille, a quo disciplina Stoicorum est, manu demonstrare solebat quid inter has artes interesset; nam cum compresserat digitos, pugnumque fecerat, dialecticam aiebat eius modi esse; cum autem deduxerat et manum dilataverat, palmae illius similem eloquentiam esse dicebat. Atque etiam ante hunc Aristóteles principio Artis rethoricae dicit illam artem quasi ex altera parte respondere dialecticae, ut hoc videlicet differant inter se, quod haec ratio dicendi latior sit, illa loquendi contractior"

Y el texto de Aristóteles al que se refiere Cicerón es éste: ἡ ῥητορικὴ ἐστιν ἀντίστροφος τῇ διαλεκτικῇ[10]. Cicerón se esfuerza por traducir el difícil adjetivo griego αντιστροφος.

Y según Diógenes Laercio[11] los estoicos dividían la lógica en:

a) Retórica: arte de decir bien en discurso dilatado.

b) Dialéctica: arte de disputar rectamente por preguntas y respuestas; y también: ciencia de lo verdadero, de lo falso y de lo dudoso.

La Retórica precede a la Lógica, por eso en Aristóteles los *Analíticos* van históricamente precedidos de los *Tópicos*, de los que la Retórica depende. Aristóteles antes de acometer el estudio de los *silogismos demostrativos* se había dedicado a analizar los *silogismos dialécticos*, entendiendo por tales aquellas formas de razonar que estaban en uso en las disputas públicas, en las controversias, en el triunfo sobre el adversario, o en la convicción del auditorio.

Los silogismos demostrativos constituyen razonamientos correctos que buscan el rigor formal. Los silogismos dialécticos constituyen razonamientos eficaces. Eficaces con relación a quien van destinados: argumentos *ad hominem* o dirigidos a un auditorio. Por esta caracterización de los silogismos dialécticos se entiende que Sexto Empírico llame a Diodoro Cronos διαλεκτικώτατος por su argumento κυριεύων.

La Retórica trata de los razonamientos argumentativos que, según Ch. Perelman[12], es irreductible al razonamiento formal propio de la lógica formal. Mas ambas, Retórica y Lógica, confluyen en el tratamiento del razonamiento. La Retórica, volviendo a Cicerón, es el arte de hablar elegantemente. Una argumentación (retórica) no tiene el rigor de una buena demostración; su validez es gradual; es más o menos fuerte; siempre queda abierta y puede ser reforzada acumulando argumentos convergentes. La demostración, en cambio, se apoya en el formalismo y resulta correcta o incorrecta. La demostración fuerza la convicción; la argumentación intenta persuadir.

Esta diferencia es la que explica por qué en el Renacimiento, por reacción contra el formalismo escolástico, se vuelve a la Retórica y se prefiere a Cicerón y a los retóricos frente a Aristóteles y los lógicos.

Las obras de Aristóteles sobre lógica quedan encuadradas dentro de la actividad de la vida pública, la práctica foral; y se desarrollan a partir de técnicas y prácticas muy concretas, como las que requerían el de-

---

[6] *Etica a Nicómaco*, 1140 a.
[7] Aristóteles, *Física*, 193 a.
[8] Aristóteles, *Retórica*, 1354 b.
[9] Aristóteles, *Retórica*, 1354 b.
[10] *Retórica*, I, 1.
[11] *Vidas de filósofos ilustres*, VII, 57.
[12] *Confert* Ch. Perelman y L. Olbrechts-Tyteka: *Traité de l'argumentation*, 2 vols., P.U.F. París, 1958.

recho de *isegoría*. Aristóteles se inserta en el gremio de los artesanos del *verbo* (λογος); gremio que se remonta a los protagonistas y héroes de las epopeyas antiguas (la primera paradoja de que tenemos noticia fue construida por Ulises -Odiseo. En su primer encuentro con Polifemo, éste le pregunta cómo se llama; a lo que Ulises responde que se llama "Nadie". Cuando ante los lamentos de Polifemo, mortalmente herido, sus compañeros le preguntan desde fuera de la cueva que quién le hace daño, Polifemo responde: "Nadie me mata" (Paradoja ésta de vital importancia para Odiseo). Aristóteles, que en la tradición platónica de *El Sofista* se dedica en un primer momento *(El Grilo)* a criticar la Retórica y le niega el carácter de arte (τέχνη), llega posteriormente, en polémica con Diógenes de Babilonia, Carnéades, etc., a reconciliarse con la Retórica y a ser el definitivo sistematizador de la misma. De modo que sus obras podrían considerarse como metatecnologías, es decir, presuponen y brotan de tecnologías. No brotan de la actividad teórica, sino de la conexión de las distintas tecnologías.

La Sofística y la Dialéctica

El término *sofista* no tuvo, en un principio, en el idioma griego, un carácter peyorativo. Antes, por el contrario, tal apelativo servía para encomiar, ya que sólo los dioses, héroes y excepcionalmente algún mortal, eran *sofistas*, esto es, sabios. Esquilo llama a Prometeo *sofista* en *Prometeo encadenado*[13]. Y Platón, en *Protágoras*[14] considera a los sofistas como maestros que, desde Simónides hasta Pródico, ejercen un arte. Así, Pródico, por ejemplo, es un técnico en Gramática[15].

Platón, en el *Protágoras*, marca una distinción entre la Sofística y la Erística en virtud de la técnica empleada y en la que son maestros. La Sofística se caracteriza por la utilización del arte del discurso largo (μακρολογία); en tanto que la erística apela al arte del discurso breve (Βραχυλογία). Y, así, en el mencionado diálogo platónico, Protágoras, como buen sofista, para acometer el tema acude al arte en el cual es maestro: al discurso largo; para probar, y convencer de ello al auditorio, que la virtud es enseñable, emplea "un mito" no "un discurso razonado". Y nadie le discute la primacía en tal arte. El conflicto con Sócrates se plantea cuando el sofista aspira también a la primacía en el arte del discurso breve: mediante preguntas y respuestas. "Porque Sócrates reconoce no poseer el arte de los discursos largos (οἰ μακρολογίας) y cede la primacía; pero en el arte de disputar (διαλέγεσθαι) y de saber ceder y tomar la palabra, me maravillaría si cediera la primacía a alguien"[16]. Este arte, en el que Sócrates es maestro, es la dialéctica, que, en un principio, constituye un método de argumentación característico: la técnica de pregunta y respuesta. Y esta técnica fue utilizada para muy diversos fines y en múltiples circunstancias: quienes la utilizaban eran llamados *erísticos* y luego *dialécticos*.

Los megáricos alcanzaron gran reputación por su destreza en las controversias y se les dio el nombre de erísticos. Euclides de Megara, fundador de esta escuela, era el más viejo de los discípulos de Sócrates, de quien aprendió dicha técnica. Posteriormente, la erística fue atacada por Platón y Aristóteles, porque sus cultivadores habían propendido a utilizarla en frivolidades (ver luego: paradojas). Para Platón, esa técnica, correctamente aplicada, será la dialéctica. La dialéctica en cuanto arte del discurso breve mediante preguntas y respuestas conlleva múltiples piezas lógicas.

1. Teoría de todos y partes. Todos isológicos y todos heterológicos.
2. Método de la división (διαίρεσις).
3. Leyes de oposición de los contrarios.
4. Leyes basadas en la relación de consecuencia lógica. Reducción *ad impossibile:* el argumento se derrumba si logra llegar a una tesis y su contradictoria; dialéctica que lleva a resultados negativos (este mismo procedimiento es utilizado en la *República*, 436 b).

Y la dialéctica como método de argumentación tenía orígenes aun anteriores a Platón: Zenón de Elea, considerado como inventor de la dialéctica, según una tradición historiográfica, (Aristóteles, en su diálogo el *Sofista* (perdido), como cuenta Diógenes Laercio)[17] usaba un procedimiento confutatorio, luego llamado "reducción a lo imposible", y que representa una conquista importante en la Historia de la Lógica. Presupone un esquema formal de razonamiento en el que se distingue claramente entre premisas y conclusión, y hace uso del principio de no-contradicción. En Geometría, el teorema de la inconmensurabilidad entre la

---

[13] Confert C. García Gual, *Prometeo: mito y tragedia*. Hiperión. Madrid, 1979, pp. 73 y 102.
[14] Trad. J. Velarde Lombraña. Pentalfa. Oviedo, 1980, pp. 26, III y 177.
[15] *Protágoras*, edic. cit., p. 163; *Cratilo*, 391 b.
[16] *Ed. cit.*, p. 161.
[17] D. Laercio, *Vidas...*, VIII, 57:"Aristóteles en el *Sofista* dice que primeramente Empédocles inventó la retórica, y Zenón la dialéctica".

diagonal y el lado del cuadrado, interpolado por Euclides en los *Elementos* X, 117, es probablemente más antiguo que la obra de Euclides, y Aristóteles[18] lo cita como paradigma de este procedimiento llamado *reductio ad impossibile*.

En los diálogos de Platón aparece Sócrates haciendo amplio uso de este procedimiento en las discusiones públicas que tenían lugar en Atenas en la 2ª mitad del siglo V. También aparece Sócrates utilizando otro procedimiento de argumentación más débil que el anterior, pero que supone varias nociones y una ley lógicas; es llamado *reductio ad falsum* o *reductio ad absurdum:* consiste en mostrar cómo a partir de la hipótesis inicial se derivan consecuencias, no contradictorias, sino falsas. Así, por ejemplo, en el *Menón* y en el *Protágoras*, a partir de la hipótesis "la virtud es enseñable", deriva Sócrates consecuencias empíricas (como que Pericles no enseña a sus hijos aquello en lo que él mismo es sabio). De modo que padres virtuosos jamás pudieron hacer mejores a nadie[19].

Otro elemento dentro de la primitiva sofística, que contribuyó al surgir de la Lógica, es el problema del *es* que adquiere importancia relevante por primera vez con Parménides. El verbo ser venía siendo usado en la lengua griega con múltiples significados,dando origen a ciertas aporías que los eleáticos comenzaron a plantear, que los cínicos utilizaron a su manera, que Platón empieza a dilucidar, y que Aristóteles pretende resolver.

La teoría eleática sobre la naturaleza del ser implica en Lógica la imposibilidad de la predicación: Los géneros no mantienen relaciones entre sí. La frase parmenídea "El Ser es, el No-Ser no es" implica, en términos lógicos, que un concepto es lo que es, en tanto que lo demás que no es ese concepto lo contradice y no puede mantener relación alguna con él. La contradicción y la alteridad se confunden. No hay más que el ser que conviene como atributo al ser como sujeto; ninguna combinación de conceptos es posible; la única afirmación posible es la que resulta del principio de identidad: "A es A". Ningún tipo de proposición sintética es legítima, ni tampoco las analíticas, a no ser aquellas que quedan reducidas a atribuir al sujeto el sujeto mismo. La ciencia se convierte en simples tautologías.

La confusión entre proposiciones de identidad y predicativas fue la que llevó a los lógicos de la escuela de Elea y a los Cínicos a declarar que es imposible decir otra cosa que aquello que es. Antístenes llega aún más lejos al sostener que no se puede afirmar un atributo de un sujeto, como por ejemplo, "un hombre es bueno", porque "hombre" y "bondad" son dos cosas distintas que es preciso no confundir. Los antisteneanos, como buenos nominalistas, sostienen que las palabras se corresponden directamente con la realidad y, puesto que la predicación queda confinada a asignar nombres a las cosas o limitada a fórmulas que determinan su estructura real, ningún atributo distinto del sujeto es posible atribuir a éste. No cabe aquí ni la contradicción, ni la falsedad, ni la definición; consecuencia que irrita a Aristóteles[20] y le obliga a calificar a sus defensores de ignorantes. Las paradojas de Antístenes están en la base de las discusiones cuyas soluciones, aportadas por Platón[21] y por Aristóteles[22], posibilitan la estructura predicativa.

Aristóteles[23], señala la importancia de Sócrates en la historia de la Lógica, por cuanto que es el fundador de la teoría del *concepto*. El concepto general es objeto de la ciencia. Platón generaliza el concepto tal como había sido definido por Sócrates; el concepto aparece como una *Idea* general que se aplica a una cantidad indeterminada de seres. Observa además Platón que no le basta al dialéctico elevarse hasta la Idea suprema (hasta el Uno) momento ascendente de la Dialéctica) sino que ha de preguntarse qué realación guardan las restantes Ideas con el Uno y, a su vez, cómo están relacionadas unas con otras. Sólo así el mundo de las Ideas constituye objeto de ciencia, cuyo método es la Dialéctica. La Dialéctica tiene, pues, como objeto mostrar la conexión entre las Ideas (συμπλοκὴ τῶν εἰδῶν). Se trata de explicar cómo lo sensible participa de lo inteligible y la comunicación de unos géneros con otros con vistas a hacer inteligible la predicación en la proposición. En la fórmula eleática de la identidad, la Unidad no podía contener la Pluralidad; ni la Pluralidad podía contener la Unidad. Sólo cabe decir "el hombre es hombre", no, por ej., "el hombre es justo". Pero si la predicación es posible ¿qué tipo de relaciones cabe establecer entre los géneros? Tres hipótesis cabe admitir[24]:

A- Nada está relacionado con nada. La realidad no es más que una multiplicidad discontinua de unidades inconexas. Esta hipótesis constituye la muerte de toda doctrina, incluida la propia que la mantiene.

---

[18] *Primeros Analíticos*, I, 23, 41 a 26.
[19] *Protágoras*, *ed. cit.*, p. 121.
[20] *Metafísica*, H, 3, 1043 b.
[21] *Teeteto*, 201 C y *Sofista* 251 A.
[22] *Segundos Analíticos*, II, 1, 89 b.
[23] *Metafísica*, M, IV, 1078 b.
[24] *Sofista*, 251, D.

B- Todo está relacionado con todo. La realidad forma un todo continuo. Esta hipótesis es la confusión absoluta. Identifica reposo y movimiento, y todos los contrarios.

C- Algo está relacionado con algo. Ciertas realidades poseen una participación mutua; otras, en cambio, quedan totalmente incomunicadas. Los elementos de la realidad son, según esta hipótesis, como las letras de un inmenso alfabeto: ciertas letras sólo pueden entrar en comunicación con ciertas letras y no con otras.

Esta última es la hipótesis que Platón convierte en tesis. Así como las conexiones entre las letras exigen una técnica y una ciencia, la Gramática, de igual modo, las conexiones o desconexiones entre las Ideas o los Géneros, constituyen el objeto de una ciencia: La Dialéctica.

Platón declara que ciertos géneros sólo pueden entrar en comunicación con ciertos géneros. El Ser de Parménides queda cuarteado y penetrado por la multiplicidad y la relación; el No-Ser queda mezclado con el Ser, y la existencia del No-Ser hará posible la predicación; considerado el No-Ser, no como pura negación del Ser (ἐναντίον), sino como lo otro (ἕτερον); porque "cuando enunciamos el No-Ser no decimos con ello algo contrario (ἐναντίον) al Ser, sino tan sólo algo distinto (ἕτερον μόνον)"[25]. Lo otro constiuye una Idea que es, la vez, ella misma y otra distinta al resto con las que puede entrar en relación, posibilitando así la formación de juicios legítimos al seguir las leyes de la Dialéctica.

3. La dialéctica platónica: La διαίρεσις

El silogismo es para Aristóteles el instrumento científico por antonomasia. Y es el mismo Aristóteles quien sitúa su teoría sobre el silogismo en la prolongación de la διαίρεσις platónica:

"Es fácil de ver que el procedimiento de división por géneros es un caso menor o particular del método descrito más arriba; la división es, en efecto, algo así como un silogismo débil, ya que postula la cuestión que es preciso demostrar y llega siempre a una conclusión más general que la que se busca. En primer lugar, este hecho había pasado por alto a todos los que hacían uso de este procedimiento, e intentaron insistir en que era posible conseguir una demostración de la sustancia y de la esencia. De aquí que ellos no comprendieran qué conclusión silogística se podía obtener por el procedimiento de división, ni cayeron en la cuenta de qué se podía lograr de la manera que hemos descrito nosotros. En las demostraciones, cuando se precisa demostrar de manera silogística una proposición afirmativa, el término medio, mediante el cual tiene fuerza conclusiva el silogismo, debe estar siempre subordinado al término mayor y no debe ser un universal que lo incluya, mientras que el sistema de división requiere el procedimiento contrario, puesto que toma al universal como término medio"[26].

En el texto aristotélico queda reconocido el papel que Platón ha jugado en la constitución de la Lógica. Las contribuciones de Platón a la nueva disciplina han sido expuestas por los especialistas desde diversos puntos de vista. Generalmente se subrayan las varias cuestiones epistemológicas desarrolladas por Platón que posteriormente se han reconocido como intersectadas por problemas de lógica.

Así, W. y M. Kneale señalan tres cuestiones tratadas por Platón:

1- ¿Qué es lo que propiamente puede decirse verdadero o falso?
2- ¿Qué nexo es el que hace posible la inferencia válida, esto es, en qué consiste la conexión necesaria?
3- ¿Cuál es la naturaleza de la definición y sobre qué recae esta última?

Cuestiones éstas -dicen- aún no deslindadas de las cuestiones metafísicas y epistemológicas que inextrincablemente se entrelazan con ellas[27].

Otros investigadores[28] han reinvindicado la invención del silogismo para Platón. Si bien es cierto que el término aparece en Platón, el sentido técnico que alcanza en la obra de Aristóteles no ha sido vislumbrado aún.

Cuando Aristóteles se considera en *De Sophisticis Elenchis* inventor del silogismo no niega que sus predecesores hayan tratado sobre algún tipo de razonamiento (περὶ τοῦ συλλογίζεσθαι), antes bien, reconoce, como se ha indicado arriba, que el razonamiento platónico por división es un razonamiento (un silogismo), aunque *impotente*. Y precisamente el término alcanzará su sentido técnico a partir de ese tipo de razonamiento platónico: la διαιρεσις.

---

[25] *Sofista*, 256 B.
[26] *Primeros Analíticos*, I, 31, 46 a, 31 y ss.
[27] W. y M. Kneale, *El desarrollo de la Lógica*, Trad. J. Muguerza, Tecnos, Madrid, 1972, p. 16.
[28] *Confert* Lutoslawski, *The origin and growth of Plato's logic*, Londres, 1897; y la refutación de E. de Strycker, "Le syllogisme dans Platon", *Revue Néo-scolastique de Philosophie*, XXXIV, Mayo, 1932.

Se ha señalado la importancia de Sócrates en la historia de la Lógica por cuanto que es el fundador de la teoría del concepto. El concepto general es objeto de la ciencia. Platón generaliza el concepto tal como había sido definido por Sócrates; aparece como una Idea general que se aplica a una cantidad indeterminada de seres. Considera Platón, además, que no basta elevarse hasta la Idea suprema, hasta el Uno, sino que es preciso investigar cómo las restantes ideas están conexionadas entre sí y qué relación guardan con el Uno. Sólo así las Ideas constituyen un mundo inteligible. Sólo así el mundo de las Ideas (o Formas) constituye objeto de ciencia, cuyo método es la Dialéctica. La Dialéctica tiene, pues, como objeto mostrar la conexión entre las Ideas (συμπλοκὴ Τῶν εἰδῶν)[29], en especial por lo que respecta a su generación.

La generación de las Ideas puede ser considerada desde dos perspectivas: a) La de la reunión; y b) La de la división. En consecuencia, la Dialéctica tendrá dos momentos: a) Un momento ascendente; y b) Otro en sentido inverso, descendente.

a) La Dialéctica ascendente (συναγωγή) tiene por objeto el conocimiento intuitivo (σύνοψις) de las Ideas a través de una marcha regular (μέθοδος) hasta llegar al Uno, la Idea suprema. En la *República*[30] expone Platón el momento regresivo de la Dialéctica. Esta, como la ciencia, parte de las hipótesis, pero no las acepta sin más como evidentes, antes bien, las considera como meras hipótesis, como punto de partida para remontarse de condición en condición hasta llegar al principio que no supone ya ninguna condición y que, fundado en sí mismo, engendra y justifica el resto.
b) La dialéctica descendente o división (διαίρεσις) es expuesta por Platón en sus diálogos de vejez *(Parménides, Sofista, Político).*

El movimiento descendente de la Dialéctica había sido establecido ya en la *República,* por cuanto que la dialéctica trasciende las hipótesis que no constituyen sino puntos de partida para llegar a los principios de los cuales hay que descender hasta las últimas conclusiones[31]. Pero es en los diálogos posteriores donde el momento descendente de la Dialéctica queda establecido de modo preciso mediante el método de la división (διαίρεσις). Platón se ha dado cuenta de que no le basta al dialéctico elevarse hasta la Idea suprema (hasta el Uno), sino que ha de preguntarse qué relación guardan las restantes Ideas con el Uno y, a su vez, cómo están relacionadas unas con otras.

La Dialéctica es la ciencia de las conexiones entre las Ideas: "Dividir de este modo por géneros sin tomar por otra distinta una forma que es la misma, ni por la misma aquélla que es distinta, ¿no podremos decir que es lo propio de la ciencia dialéctica?"[32] Su método es el método de la división: Partir de una idea considerada como compuesta y a través de una división metódica y exhaustiva reconstruir racionalmente la realidad. En esta marcha descendente y sintética la Dialéctica nos proporciona una definición o, más exactamente, una clasificación[33]. El sofista quedará definido y atrapado sin posibilidad de zafarse mediante el método de la división, método que posee las siguientes características:

1) Permite establecer relaciones entre los diversos géneros. Así, ante el sofista, el político y el filósofo, cabe preguntarse si puede considerarse ese conjunto como una sola unidad o como dos. O bien si, por el hecho de comprehender tres nombres, se distinguen tres géneros, uno para cada nombre[34].
2) Permite definir con exactitud cada género. La definición, efectivamente, resulta laboriosa, pero el método empleado cumple con el propósito perseguido[35].
3) Exige un interlocutor "complaciente y dócil"[36].
4) Es una técnica y un modelo (παράδειγμα) que se puede aplicar a cualquier contenido. Así, "¿Te parece bien, entonces, que hagamos previamente la investigación sobre alguna cuestión sin importancia, a modo de ensayo, para ver de encontrar en ella un modelo que poder aplicar a nuestra gran empresa?"[37]
5) El método consiste en aplicar divisiones dicotómicas sucesivas a un género compuesto, mediante las cuales dicho género queda especificado en sus partes y en su conjunto. En la definición del sofista como "creador de ilusiones" el método es aplicado como sigue: "Dividir sin más

---

[29] *Sofista*, 259 E.
[30] 511 y 533-535.
[31] *República*, VI, 511 B.
[32] *Ibidem*, 253 D.
[33] *Confert* J. Tricot, *Traité de Logique formelle*, Vrin, Paris, 3ª edic. 1973, p. 25.
[34] *Sofista*, 217 A.
[35] *Ibidem*, 219 A.
[36] *Ibidem*, 217 C.
[37] *Sofista*, 218 D.

tardar el arte que fabrica imágenes y, bajando a su guarida, si el sofista empieza por hacernos frente, apoderarnos de él, según ordenaba el edicto real y entregarle al soberano declarando nuestra captura. Y si por casualidad encuentra en alguna de las divisiones del arte de imitar un refugio donde ocultarse, seguirle paso a paso, dividiendo sin descanso la especie en que se haya refugiado, hasta que le hayamos aprisionado. Y de este modo, seguros podremos estar de que ni él ni otro, sea de la especie que sea, podrá alabarse de haber esquivado una persecución conducida tan metódicamente, no sólo en sus detalles, sino en conjunto"[38].

En términos formales, para precisar qué sea un concepto "S" es necesario partir de un concepto mucho más amplio, "A", y descender en la jerarquía de géneros y especies partiéndolo de forma pertinente ("por las junturas naturales") en dos conceptos más restringidos, "B" y "no-B", mutuamente excluyentes y totalmente exhaustivos. El concepto "S" queda encuadrado en una de ambas partes de la división, excluyendo la otra y quedando, en consecuencia, más delimitado. A continuación, en la parte retenida, se opera una nueva dicotomía, y así sucesivamente hasta llegar a la precisión deseada. Por ejemplo, sea "S", "el pescador de caña". Se parte de "A", un arte, que inmediatamente es dividido en dos: "B", producción; "no-B", adquisición. Este, a su vez, vuelve a ser dividido en dos, y así sucesivamente (véase cuadro).

διαίρεσις y silogismo como clasificación

La división dicotómica produce una definición o más exactamente una *clasificación*. A su vez, en la ciencia aristotélica aparece el ideal de clasificación[39]. El silogismo supone una clasificación de los seres, y no vale más que en virtud de dicha clasificación, tanto si se interpreta desde el punto de vista intensional como desde el punto de vista de la extensión. Para Aristóteles, lo mismo que para Platón, definir es clasificar. Entre los posibles métodos con los que cuenta Aristóteles para abordar la naturaleza y esencia del alma están el de la demostración silogística y el de la división. En cualquier caso, lo que propone es ir haciendo clasificaciones[40]: En primer lugar, determinar a qué genero pertenece el alma. En segundo lugar, de entre las almas hay que distinguir clases: si hay o no multiplicidad de almas. En el primer supuesto, buscar el elemento común a todos los vivientes. Se trata, como en Platón, de determinar un concepto siguiendo un orden de generalidad para llegar a una definición.

Otro ejemplo sobre el uso que Aristóteles hace del método platónico lo encontramos en el estudio sobre el problema del tiempo en la Física:

"Conviene -dice Aristóteles- en primer lugar, plantear las dificultades que encierra la cuestión y examinar, en una argumentación exotérica, si es necesario situarlo (el tiempo) entre los seres o bien entre los no-seres"[41].

ARTE

producción *adquisición*

por cambio *por captura*

mediante lucha *mediante caza*

del género inanimado *del género animado*

corredores *nadadores*

que vuelan *acuáticos*

mediante cerco o redes *golpeando la presa*

hiriendo de arriba abajo *de abajo arriba*

(pesca con caña)

---

[38] *Ibidem*, 235 B-C.
[39] *Confert*, para lo que sigue, J. M. Le Blond, *Opus cit.*, p. 291 y ss.
[40] *De Anima*, I, 1, 402 a.
[41] *Física*, IV, 10, 217 b.

L. Brunschvicg[42] hace especial hincapié en esta herencia platónica que los discípulos de la *Academia* parecen haber despreciado, pero de la que Aristóteles se ha apropiado. Señala a este respecto un fragmento de Epícrates: La escena que describe tiene lugar en los jardines de la *Academia*. En la búsqueda de los límites que separan de los animales vivos los géneros de árboles y plantas se presenta la cuestión de asignar la calabaza a un género. Silencio primero, y diversas respuestas después, de los jóvenes platónicos. La burla de un médico siciliano y la presencia de Platón que, sin inmutarse y con suavidad, pide a sus discípulos que vuelvan a retomar la determinación de los géneros.

Además, Aristóteles es, ante todo, un biólogo. En el *Liceo* la Biología sustituye a la Matemática como disciplina central a partir de la cual proceden las generalizaciones de la Filosofía[43], de ahí el papel esencial que la clasificación juega en el sistema de Aristóteles. La distribución de los seres vivientes en géneros y en especies está en la base de sus investigaciones biológicas.

El estudio del movimiento en la *Física* está guiado por un esquema biológico. Comienza por la distinción entre el movimiento violento (βίᾳ) y el movimiento natural (κατὰ φύσιν)[44]. Esta distinción en sí misma no pertenece a la Biología, sino más bien a la Física. Pero inmediatamente hace aparición la Biología en la investigación. En la distinción mencionada el movimiento violento, considerado como secundario y derivado, es desplazado de la naturaleza y, en consecuencia, fuera de la ciencia: "Si existe realmente el movimiento violento, es preciso también que exista el movimiento natural, porque lo violento es contrario a la naturaleza, y lo que es contrario a la naturaleza es posterior a lo que es conforme a ella. De manera que si en ningún ser corporal hay un movimiento natural, no habrá movimiento de ninguna clase"[45]. Aristóteles no considera al movimiento violento digno de un estudio serio. En todo caso es la perspectiva biológica la que le conduce a interpretar este tipo de movimientos como correspondientes a los de los seres vivos y explicarlos mediante un motor interno. Si la piedra cae es porque su *naturaleza* es caer. Lo mismo que la naturaleza o el alma del animal provoca o detiene sus movimientos, de igual modo, es la naturaleza de la piedra la que la arrastra hacia abajo. El movimiento recibe, de este modo, una interpretación vitalista según la cual la *naturaleza*, principio interno del movimiento en los seres inanimados, se corresponde con el *alma* en cuanto principio de las funciones vitales. Más aún, apelando a la etimología del verbo φυω, extrae Aristóteles la noción de "naturaleza" a partir de la misma noción de "nacimiento": "Naturaleza es, en una de sus primeras acepciónes, la generación de las cosas que nacen y se desarrollan (τῶν φυομένων) como una especie de prolongación de la vocal υ"[46].

El mundo viviente proporciona a Aristóteles el esquema de organización para todo lo dado y, así, el primer ejemplo de ser natural es para Aristóteles el animal, y en general lo viviente; la deferencia que separa a los animales de los demás seres se reduce simplemente a una diferencia de grado. Unos y otros tienen un principio de movimiento, sólo que en los primeros esta naturaleza es mucho más compleja y rica en determinaciones que en los segundos. Los vivientes son dueños de detener su movimiento, extremo que les resulta imposible a los demás.

El esquema biologista está presente asimismo en la división de los movimientos siguiendo (1) el orden de la cantidad (ποσόν); (2) el de la cualidad (ποιόν); y (3) el movimiento de lugar (τόπον)[47].

El movimiento según la cantidad -nos dice Aristóteles-[48] recibe el nombre de *crecimiento;* el movimiento según la cualidad recibe el nombre de *alteración;* y el movimiento según el lugar recibe el nombre de *traslación*. Pues bien, esta división de los movimientos está en correspondencia con el escalonamiento de las grandes funciones de la vida y de los movimientos que caracterizan a los seres vivos: La característica de los seres vivos es el alma, pero no es el alma toda entera la que constituye el principio del movimiento, ni el conjunto de sus partes, sino que "existe una parte, aquella precisamente que se encuentra también en las plantas, que es el principio del crecimiento; una segunda, la parte sensitiva, es el principio de la alteración; una tercera, el principio de

---

42 *Les Etapes de la Philosophie mathématique*, Alcan, Paris, 1912, p. 73.

43 L. Brunschvicg, *Les Etapes de la Philosophie mathématique*, edic. cit., p. 74.

44 *Física*, IV, 8, 215 a; V, 6, 230 b.

45 *Ibidem*, IV, 8, 215 a.

46 *Metafísica*, Δ 4, 1014 b 16.

47 *Física*, V, 1, 225 b; V, 2, 226 a; VII, 2, 243 a; VIII, 7, 260 b. No siempre está de acuerdo Aristóteles con esta división tripartita. A veces, distingue cuatro clases de movimientos o cambios: según la sustancia, la cualidad, la cantidad y el lugar (*Física*, IV, 10, 218 b). Asimismo, a veces incluye la generación entre los cambios (*Física*, VIII, 7, 261 a), mientras que, por otra parte, niega que la generación sea un movimiento (*Física*, V, 2, 225 b; *Metafísica*, K, 11, 1067 b). La confusión es debida, en parte, al empleo ambiguo de los términos κίνησις y μεταβολή; μεταβολή es empleado, a veces, como término más general que κίνησις y, a veces, como equivalente.

48 *Física*, V, 2, 226 a.

traslación; y ésta no es la parte noética"[49]. Aristóteles insiste en que la aparición sucesiva de cada uno de estos movimientos marca las etapas del desarrollo de los seres vivientes: "Para cualquier individuo de los que son susceptibles de generación la traslación es necesariamente el último de los movimientos, pues, luego del hecho de la generación, el movimiento que mueve, en primer lugar, es la alteración y el crecimiento, mientras que la traslación no corresponde sino a los seres ya acabados"[50].

Esta división de los movimientos característicos de los seres vivos es aplicada, no sólo al mundo viviente, sino que se extiende a toda la naturaleza. Así:

1) El movimiento de crecimiento es puesto en correspondencia con la función vital de la *nutrición:* "La nutrición es ciertamente lo mismo que el crecimiento, no obstante, su noción es diversa"[51]. Y ambos conceptos son aplicados a los seres inanimados: el crecimiento del fuego es una generación, porque cuando se echan maderos a él hay un crecimiento, y cuando los lechos se encienden hay una generación, una auténtica nutrición.

2) El movimiento de alteración es puesto en correspondencia con la *sensación:* La sensación es una alteración del alma siguiendo las partes sensitivas[52]. La sensación es la alteración en tanto que consciente, y es precisamente a lo consciente a lo que se aplica propiamente el término ἀλλοίωσις. Se aplica al cambio de las cualidades que constituyen los objetos de los cinco sentidos[53].

3) El movimiento de traslación es puesto en correspondencia con la *locomoción* animal, determinada ésta por un principio interno. Al igual que los seres animados poseen el alma, principio de las funciones vitales, así también la naturaleza es el principio interior del movimiento. La distinción entre ambas clases de seres es difícil de mantener en forma rigurosa. La diferencia reside, no en su naturaleza, sino en la complejidad de movimientos. Los movimientos naturales llegan incluso a ser considerados como un acabamiento de la generación: los elementos en su movimiento de caída o ascensión "perseveran en su movimiento a través del generador que les ha dado la ligereza o la pesadez"[54].

Los esquemas biologistas tienen asimismo su aplicación a la Lógica. Es precisamente el carácter extensional de la Lógica la expresión de la influencia que la clasificación ejerció en la silogística. El silogismo aristotélico, en su aspecto extensional, no es propiamente matemático[55]. No es el razonamiento matemático el que ha servido de guía a la lógica aristotélica, ya que las esencias matemáticas son singulares y las consideraciones de extensión no intervienen propiamente en los razonamientos geométricos. De ahí que Brunschvicg llegue a afirmar[56] que "la geometría euclidiana no es más que un caso particular de la lógica aristotélica". La disciplina que sirve de guía a la lógica aristotélica y que inspira su explicación del silogismo es la Biología. Es en el dominio de la vida donde es posible encontrar en sentido estricto la diferencia entre individuo y especie. Ha sido Brunschvicg quien más ha insistido en este punto, resaltando hasta el vocabulario biológico empleado por Aristóteles en su teoría del silogismo. Así el verdadero conocimiento *nace* de la *unión* de dos proposiciones porque una sola no puede engendrar[57]. Pero cuando dos proposiciones tienen en común una parte que las une, participan entonces de una potencia generatriz y engendran una tercera enunciación llamada conclusión, que no puede ser más que como ellas la han producido. Y así como el hijo refleja el rostro y el espíritu de sus padres, de igual modo la conclusión refleja la fuerza y la verdad de sus ascendientes. "Por eso -dice Brunschvicg-[58] no es accidental que el silogismo sea para Aristóteles el principio de la filosofía. Al imitar la vida de los seres animados y contener en sí su causa de existencia, es en sí una cosa perfecta; y, por esta razón, no puede por menos de conducir el espíritu a la verdadera inteligencia de la naturaleza de las cosas. Por eso, la tarea principal de la lógica consiste en demostrar cuál es el semen de vida y de fecundidad en el silogismo, es decir, resolver el silogismo".

La base biológica de la que proceden las generaliza-

---

[49] *Las partes de los animales*, I, 1, 641 b.
[50] *Física*, VIII, 7, 260 b.
[51] *De la generación y corrupción*, I, 5, 322 a.
[52] *Física*, VII, 4, 245 a.
[53] *De la generación y corrupción*, II, 4, 331 a.
[54] *Física*, VIII, 4, 256 a.
[55] *Confert* O. Hamelin, *Le systeme d'Aristóteles*, Alcan, Paris, 1920, p. 181.
[56] *Les etapes de la philosophie des mathématiques*, ed. cit., p. 85.
[57] *Segundos Analíticos*, II, 11, 94 a.
[58] *La modalité du jugement*, P. U. F., 3ª edic. 1964, p. 245.

ciones filosóficas hace que la clasificación juegue un papel esencial en el sistema aristotélico. Definir, como para Platón, no es otra cosa que clasificar, es decir, colocar un objeto en su contexto natural señalando lo que tiene de común con otros objetos (su género próximo) y la nota distintiva que le permite quedar especificado (diferencia específica). Más aún, de estos dos últimos la diferencia es suficiente para poner en orden el conjunto de los objetos, es decir, para clasificarlos y, por consiguiente, para definirlos, ya que la diferencia contiene en sí misma el género. Es por esto por lo que Aristóteles afirma que "la definición es la enunciación de diferencias"[59].

Asimismo, el silogismo supone una clasificación de los seres y sólo vale en virtud de esa clasificación. El silogismo es explicado por la relación contenido-continente que existe entre los términos que en él intervienen: "Cuando tres términos están entre sí en una relación tal que el último está contenido en el medio como en un todo, y el medio comprendido o no comprendido en el primero como en un todo, hay necesariamente un silogismo perfecto conectando los extremos"[60]. Ello supone el establecimiento de una subordinación entre los términos y la necesidad de su clasificación. Como en la división platónica, se hace preciso descender, bien de lo general a lo particular, bien del todo a la parte.

No obstante lo expuesto, Aristóteles considera la διαίρεσις platónica como incompleta. ¿Cuál es la diferencia entre el método silogístico de Aristóteles y el método platónico de la división?

Ante todo es preciso analizar la críticas que Aristóteles dirige al método dicotómico. Le considera como el esfuerzo más significativo, aunque imperfecto, hacia su propio método: "Es fácil de ver que el proceso de división por géneros constituye un caso menor del método que acabamos de descubrir; la división es, en efecto, como un silogismo impotente"[61].

La imperfección inherente al método de la división consiste, primeramente, en que pone el género pero no lo prueba[62]. La división parte de un género, pero ¿cómo encontrarlo? Platón no lo explicita. La impresión es que Platón lo pone hipotéticamente y que lo reemplaza por otro en caso de que la división no desemboque en una definición satisfactoria. Así, por ejemplo, en el caso de la sofística; se había supuesto que pertenecía a las ciencias de la adquisición, mas luego de seis definiciones de ensayo, se ve que hay que colocarla, en tanto que especie de imitación, entre las ciencias productivas[63].

En segundo lugar, el método de la división "postula la cuestión que se pretende demostrar"[64] y no conduce a una conclusión necesaria. No fuerza al interlocutor a admitir la conclusión, sino tan sólo le pide su asentimiento. En efecto, cuando se divide la clase "A" en "B" y "no-B" nada nos autoriza a afirmar que "S", que pertenece a "A", pertenece a la subclase "B" más bien que a la subclase "no-B". La conclusión que se impone cuando se admite que "S" pertenece a la clase "A" y que ésta se divide en "B" y "no-B" es: "S es B o no-B", mas esto no nos permite avanzar lo más mínimo; estamos justamente al principio. He aquí uno de los ejemplos ofrecidos por Aristóteles:

> "Supóngase que "A" es "animal"; "B", "mortal"; "C", "inmortal" y "D", "hombre", cuya definición se pretende hallar. Ahora bien, el que emplea el proceso de división supone que todo animal es, o bien mortal, o bien inmortal; es decir, que todo lo que es "A" es, o bien "B" o bien "C"; luego, siguiendo su proceso de división, pone que "hombre" es un animal; es decir, admite que "A" se predica de "D". El silogismo es, entonces, "Todo D será o bien B o bien C"; de manera que el hombre debe ser necesariamente mortal o inmortal, ya que es necesario que el animal sea mortal o inmortal. Pero no es necesario que sea mortal; esto es lo que se postula; y éste es precisamente el punto que debe ser demostrado por silogismo"[65].

Nada en el razonamiento nos obliga a elegir entre mortal e inmortal; el método no prueba que el hombre es mortal, sino que exige al interlocutor que lo conceda. Por consiguiente, en sí mismo, el razonamiento por división es un "silogismo impotente" (ἀσθενὴς συλλογισμός).

Por el contrario, Aristóteles busca un razonamiento que sea en sí mismo y por sí mismo suficiente; que no necesite un interlocutor, "complaciente y dócil". El método dialéctico, que exige como componente esencial el interlocutor es sustituido, así, por el método silogístico desarrollado en constante monólogo.

Pero lo que ante todo reprochaba Aristóteles al método dicotómico es el apelar constantemente a intuiciones nuevas, externas al razonamiento mismo. Ya,

---

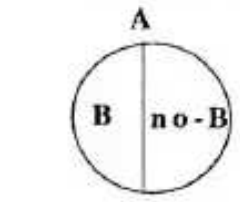
[59] *Metafísica*, Z, 12, 1038 a.
[60] *Primeros Analíticos*, I, 4, 25 b.
[61] *Ibidem*, I, 31, 46 a.
[62] *Ibidem; Segundos Analíticos*, II, 5, 91 b.
[63] Confert *Sofista*, 221 D-222 E y 265 A-B.
[64] *Primeros Analíticos*, I, 31, 46a, 34.
[65] *Ibidem*, I, 31, 46 b, 4-20.

de entrada, hay que operar con tacto a la hora de trocear la realidad. Como un buen carnicero -dice Platón-[66] "hay que observar las articulaciones naturales". Luego, la elección entre las dos partes de la dicotomía no viene impuesta *vi formae*, sino por vía de la intuición, y es precisamente el intento de hacer valer el razonamiento independientemente de toda hipótesis y de toda espontaneidad subjetiva lo que lleva a Aristóteles a rechazar el método platónico y a buscar un razonamiento que sea en sí mismo plenamente suficiente, que no proponga una elección, como la división platónica, sino que imponga una necesidad, "un razonamiento en el que, puestas ciertas cosas, alguna otra se sigue necesariamente por el solo hecho de que esas cosas son tales"[67]. Tal es el silogismo; en él interlocutor e intuición quedan eliminados, mientras que hacen presencia la objetividad y la necesidad. Por eso, insiste Aristóteles, "llamo silogismo perfecto al que no tiene necesidad de ninguna otra cosa fuera de lo que está puesto para mostrar lo necesario"[68].

Evidentemente, en el silogismo la intuición ha de intervenir en la elección del término medio. Como en la división platónica, los procedimientos para encontrar el término medio no se atienen a reglas necesarias: Se puede aprender a hacer silogismos, pero no a dar reglas inmutables para la elección del medio; de ahí que, según el mismo Aristóteles, "la sagacidad (ἀγχίνοια) es la facultad de encontrar el término medio rápidamente[69]. Aquí la intuición aparece en el punto de partida; mas una vez dado éste, una vez puestas ciertas cosas (τεθέντων τινῶν), el resto se desarrolla con necesidad y, por consiguiente, con la posibilidad de llegar a una conclusión necesaria. La clave está, entonces, en saber qué cosas hay que colocar y cómo. Recurriendo al esquema anteriormente expuesto en el caso de la división, según el cual "A" se divide en "B" y "no-B", y "S" pertenece a "A", el paso del método de la división al método silogístico consiste en concebir de modo distinto la mediación entre "S" y "B". Mientras que en Platón dicha mediación se realiza a través del término más universal -a través de "A"-, en Aristóteles, por el contrario, es a través de un término de extensión media entre "A" y "B". En este caso, si "S" es "A", se podrá llegar a la conclusión necesaria, según que "A" esté o no incluido en "B", de que "S es B " o de que "S es no-B".

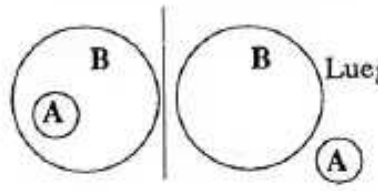
El esquema de ambos métodos sería como sigue[70]:

διαίρεσις platónica



S es A
A se divide en B y no-B
Luego S es ?

Silogismo aristotélico



S es A

A es B	A es no-B
Luego S es B	Luego S es no-B

El término "medio" lo es, tanto por su posición -lugar que ocupa en la primera figura y que hace de ésta, a los ojos de Aristóteles el silogismo acabado y perfecto-[71] como por la relación de extensión que guarda respecto de los demás términos: "Llamo término medio a aquél que está contenido en otro y contiene a otro en sí"[72]. El término medio es el pilar central del silogismo, el que garantiza la necesidad, el que establece las cosas que deben ser puestas y cómo, para que el razonamiento sea fecundo. Los teóricos de la división -dice Aristóteles-[73] al ignorar la naturaleza del término medio, no pudieron llegar a un razonamiento necesariamente válido; tomaban al universal como término medio, mientras que en el silogismo el término medio, en virtud del cual tiene fuerza conclusiva el silogismo, debe estar siempre subordinado al término mayor y no debe ser un universal que lo incluya. El término medio resulta, pues, el elemento esencial del razonamiento; elemento que faltaba en el método platónico y que se convierte en el punto central de la nueva lógica.

---

[66] *Fedro*, 265 E.
[67] *Primeros analíticos*, I, 1, 24 b.
[68] *Ibidem*, I, 1, 24 b.
[69] *Segundos Analíticos*, I, 34, 89 b.
[70] *Confer* R. Blanché, *La logique et son histoire*, Colin, París, 1970, p. 24.
[71] *Primeros Analíticos*, I, 4, 25 b.
[72] *Ibidem*.
[73] *Primeros Analíticos*, I, 31, 46 a.

BIBLIOGRAFIA

Aristóteles, *Retórica*, en *Aristotelis Opera*. Edic. I. Bekker, Berlín, 1831.

Barreau, H., "Zenon d'Elée, inventeur de la dialectique: dilemmes ou simples paradoxes?", en *Dialectique* (París), 1969, pp. 9-19.

Blanché, L., "Zenon d'Elée et l'invention de la dialectique", en *Les études philosophiques*, XII (1957), pp. 415-20.

Bochenski, I. M., *Ancient formal logic*. North-Holland, Amsterdam, 1951.

Calogero, G., *Studi sull'Eleatismo*. 2ª edic. la Nuova Italia, Florencia, 1977.

Celluprica, V., *La logica antica*. Loescher, Turín, 1978.

Faj, A., "Anticipazioni della logica stoica in Platone", en *Giornale di Metafisica* (Turín), XXV (1970), pp. 675-691.

Gillespie, G. M., "Te logic of Antistenes", en *Archiv für Geschichte der Philosophie*, XXVI (1913), pp. 479-500; y XXVII (1914), pp. 17-38.

Gomperz, T., *Pensadores griegos*, vol. III. Trad. J. R. Bumantel. Edit. Guarania, Buenos Aires, 1952.

Joja, A., "The origin of logic in Greace", en *Acta logica* (Bucarést), III (1960), pp. 24-29.

Lausberg, H., *Manual de retórica literaria*. Trad. Pérez Riesco. Gredos, Madrid, 1966.

Levi, A., "Le teorie metafisiche, logiche e gnoseologiche di Antistene", en *Revue d'histoire de la philosophie*, IV (1930), pp. 227-49.

Levi, A., "Sulla Sofistica, II: I pseudo-sofisti", en *Sophia*, VI (1938), pp. 325-56.

Lutoslawski, W., *The origin and growth of Plato's logic*. Londres, 1897.

Moravsik, J. M. "συμπλοκή εἰδῶν and the genesis of λόγος", en *Archiv für Geschichte der Philosophie*, XLII (1960), pp. 117-129.

De Pater, W. A:, "Les topiques d'Aristote et la dialectique platonicienne", en *Archiv für Geschichte der Philosophie*, XLII (1960), pp. 117-129.

Platon, *El Político* y el *Sofista*, en *Opera*. edic. J. Burnet, Oxford, 1899-1906.

Preti, G., "Sulla logica degli Eleati", en *Rivista critica di storia della filosofia*, XXXI (1976), pp. 82-84.

Preti, G., "Appunti sulle tappe della logica", en *Rivista critica di storia della filosofia*, XXXII (1977), pp. 3-10; 251-68.

Robin, L., *La pensée grecque et les origines de l'esprit scientifique*. Renaisance du libre, Paris, 1923.

Rodier, G., *Etudes de philosophie grecque*. Reimpr. en Vrin, Paris, 1969.

Robinson, R., *Plato's early dialectic*. Clarendon Press, Oxford, 2ª edic., 1953.

Sainati, V., "Tra Parmenide e Protagora", en *Filosofia* (Turín), XVI (1965), pp. 49-110.

Shorey, P., "The origin of syllogism", en *Classical Philology*, XIX (1924), pp. 1-19.

Solmsen, F., "Aristotle's syllogism and its platonic background", en *Philosophical Review*, LX (1951), pp. 563-71.

Vaccarino, G., "L'origine della logica", en *Scientia*, XCVI (1961), pp. 103-109.

Vernant, J.P, *Los orígenes del pensamiento griego*. Trad. M. Ayerra. Eudeba, Buenos Aires, 1965.

II. Aristóteles

1. Vida y obra

Aristóteles nació en Estagira en 384 a. n. e. En el 366, a los 17 años, entra en la Academia de Platón, donde permaneció durante 19 años, hasta la muerte de éste, ocurrida en el 348. En la Academia a Platón le sucedió Espeusipo, y Aristóteles no conforme con la nueva orientación la abandonó y junto con Jenócrates se fue a Asos (en la Tróada) a reunirse con otros discípulos de Platón, Erasto y Corisco, quienes habían constituido con el influyente político Hermias una comunidad filosófico-política. Asesinado Hermias por obra de los persas, Aristóteles pasa a Mitilene, hasta que en el año 342 es llamado a Pella por Filipo, rey de Macedonia, para que se hiciese cargo de la educación de su hijo Alejandro.

En el 335 Alejandro subió al trono y Aristóteles regresó a Atenas, y allí fundó el Liceo, que constaba de un edificio, un jardín y un paseo (Περίπατος), de donde tomó nombre la doctrina que allí se cultivaba. A la muerte de Alejandro, en el 323, los partidarios del rey fueron tachados de traidores por los nacionalistas. Para evitar el peligro Aristóteles huyó a Atenas y se fue a Calcis (Eubea), donde poseía una heredad de su madre. Allí, a los pocos meses, en el 322, le sobrevino la muerte a los 63 años a causa de una enfermedad de estómago.

Las obras que de Aristóteles han llegado hasta nosotros comprenden los escritos llamados *acroamáticos*, por estar destinados a los oyentes, o *esotéricos*, por contener una doctrina secreta; y a los que él mismo llamó *exotéricos*, destinados al público, en los que empleaba mitos y otros recursos literarios (de forma preeminente, el diálogo, a imitación de su maestro).

De los escritos exotéricos (se tiene noticia de sus títulos: *El Banquete, El Político, El Sofista, Menexeno, Grilo o De la Retórica, Protéptico, Eudemo o Del Alma)* sólo quedan unos pocos fragmentos.

Los escritos acroamáticos fueron encontrados, según nos cuenta Estrabón (XIII, 54), en la casa de los descendientes de Neleo, hijo de Corisco y admirador del estagirita. Fueron llevados a Roma por Sila y allí, hacia mediados del siglo I a. n. e., Andrónico de Rodas (undécimo sucesor de Aristóteles al frente de la escuela peripatética) los ordenó y los publicó.

La ordenación de Andrónico es la siguiente: 1º Tratados de Lógica; 2º Tratados de Metafísica; 3º Tratados de Física, Historia natural, Matemáticas y Psicología; 4º Tratados de Etica, Política, Economía y Retórica.

Los tratados de Lógica son seis: *Las Categorías, De interpretatione, Primeros Analíticos, Segundos Analíticos, Tópicos* y *Argumentos Sofísticos;* y constituyen un agrupamiento conocido bajo el nombre de *Organon*. El nombre de "Lógica" no se utilizó para designar estos tratados hasta que Alejandro de Afrodisia (hacia el a. 200 p.c.) se sirvió de éste término en sus comentarios a las obras de Aristóteles. Ni el agrupamiento ni el título son de Aristóteles. El título *Organon*, que significa "instrumento", responde a la concepción que de la lógica tenía Aristóteles, quien no reserva lugar alguno para la Lógica a la hora de clasificar las ciencias: teóricas (Física, Matemáticas, Metafísica), prácticas (Política, Etica y Economía) y poéticas (las artes útiles y bellas); por lo que los peripatéticos consideraron que la Lógica no es una disciplina científica, no forma parte de la Filosofía como para los estoicos, sino que es más bien un *organon*, un instrumento necesario para acceder a las ciencias teóricas. Sin embargo, Aristóteles llama a la reflexión sobre cuestiones lógicas "ciencia analítica"*(Segundos Analíticos)* y "ciencia del razonamiento"*(Primeros Analíticos)*. El agrupamiento obedece a criterios, no cronológicos, sino sistemáticos. Por lo demás, no arrojaban una ordenación fija entre los tratadistas de lógica durante el período que va desde la edición de Andrónico de Rodas hasta las traducciones de Boecio (470-524), quien sigue la ordenación del organon *ortodoxo*. Lo que hace suponer que ya a finales de la Era Antigua estaba fijado el orden de los tratados del *Organon*, en el que antes los hemos escrito, precedidos de la εἰσαγωγή (introducción) de Porfirio, que cumplía la

función de una introducción general a la lógica de Aristóteles.

Esta clasificación sistemática de los tratados, tiene el inconveniente de que no sirve de ayuda para reconstruir el proceso de desarrollo del pensamiento de Aristóteles. Y de ahí que recientemente muchos estudiosos (véase, por ejemplo, F. Solmsen) hayan tratado la vía de la reconstrucción genética de la composición de los tratados y también de las partes de cada uno. Pero esta vía no está exenta de obstáculos; el principal consiste en que los escritos acroamáticos, entre ellos los de Lógica, no fueran preparados por Aristóteles para su publicación, sino que fueron compuestos para uso interno de la enseñanza en el Liceo, a modo de lecciones o apuntes, por lo que los apartados, distinciones, etc., pueden obedecer tanto a los pasos seguidos en la redacción originaria, como a necesidades pedagógicas que obligan a repetir u ordenar las cuestiones de cierta manera. No obstante, la crítica parece ya dar por sentada la anterioridad de los *Tópicos* respecto de los *Primeros* y *Segundos Analíticos*. Según esto, Aristóteles habría comenzado sus investigaciones sobre lógica ya durante su estancia en la Academia, y, partiendo de posiciones platónicas, sus primeras preocupaciones fueron la dialéctica y las argumentaciones sofísticas. Y son las investigaciones lógicas en el campo de la dialéctica las que constituyen el tratado de los *Tópicos* (el más voluminoso del *Organon*). Consta de 8 libros, en los que expone la teoría del silogismo dialéctico. Se presupone ya el descubrimiento del silogismo, pero Aristóteles se mantiene aún en el ámbito de una situación dialógica. En esta obra Aristóteles ilustra los medios con los que es posible conducir las disputas, utilizando argumentos válidos, hasta vencer.

En la tradición platónica de su polémica contra los sofistas, Aristóteles afronta de manera sistemática el problema de la argumentación sofística, que dará lugar al tratado *Sobre los argumentos sofísticos* (περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων), que viene a constituir el noveno libro y el apéndice de los *Tópicos*. En este tratado se ejemplifican tipos de argumentos inválidos o sobre cuestiones triviales utilizadas por los sofistas y las aporías de los megáricos, extrayendo como conclusión general de ambos tratados que la diferencia entre el tipo de victoria que persiguen los sofistas y el de la perseguida por Aristóteles, consiste en el hecho de que la primera se funda sobre la experiencia adquirida con la práctica, mientras que la segunda deriva del conocimiento de los principios que regulan las argumentaciones válidas; lo cual comporta el conocimiento de la naturaleza del lenguaje y de sus reglas, de las relaciones entre los conceptos y de las leyes de la deducción, objeto de los restantes tratados de Lógica.

Ediciones de las obras de Aristóteles

La *edición fundamental* de las obras de Aristóteles es la de la Academia Regia Borussica, Berlín, dirigida por Bekker, en 5 volúmenes, 1831-1870. En los dos primeros volúmenes, en páginas a dos columnas, viene el texto aristotélico en griego *(Aristoteles graece)*. Las citas se hacen por esta edición: página, columna y línea. El volumen III contiene las traducciones latinas *(Aristoteles latine)* del Renacimiento. El volumen IV recoge los textos de comentaristas griegos *(Scholia in Aristotelem)*. Y el volumen V contiene la colección de fragmentos de Aristóteles recogidos por V. Rose *(Aristotelis qui ferebantur librorum fragmenta)* y el suplemento debido a H. Usener *(Scholia in Aristotelem)* y el *Index Aristotelicus* de H. Bonitz.

Otras ediciones muy utilizadas:

F. Didot, *Aristotelis opera onmia, grece et latine*. 4 tomos y un índice. París, 1848-1874.

Organon. Texto griego y comentario latino por T. Waitz. 2 tomos. Leipzig, 1844-46.

Prior and Posterior Analitics. Texto griego y comentarios en inglés por W. D. Ross. Oxford, 1949.

Traducciones y comentarios:

Organon. 5 volúmenes. Traducción al francés de J. Tricot. Vrin, París, 1966-69.

"Categories" and "De interpretatione". Trad. al inglés con comentario, por J. L. Ackrill. Oxford, 1963.

Traducciones al castellano:

Obras de Aristóteles. 10 volúmenes. Por P. de Azcárate. Madrid, 1874.

Obras completas de Aristóteles. 12 volúmenes. Por F. Gallach Palés. Madrid, 1931-34.

Aristóteles. Obras. Un volumen. Recoge las principales obras. Aguilar. Madrid, 1964.

Aristóteles. Metafísica, 2 volúmenes, ed. trilingüe. Por V. Garcia Yebra. Gredos, 1970. Madrid

Aristóteles. Tratados de lógica. Por F. Larroyo. México 1969.

Aristóteles. Analíticos Posteriores. (Teoría de la ciencia). Por J. D. García Bacca. Caracas, 1968.

Aristóteles. De Interpretatione. Por A. García Suárez y J. Velarde. Cuadernos Teorema. Valencia, 1979.

Aristóteles. Tratados de lógica (organon) I: Categorías, Tópicos, Sobre las refutaciones sofísticas. Por M. Candel Sanmartín. Gredos. Madrid, 1982.

Aristóteles. Categorías. Por L. M. Valdés. Cuadernos Teorema, Valencia, 1983.

Obras sobre la lógica de Aristóteles. Amén de las Historias de la lógica de C. Prantl, H. Scholz, I. M. Bochenski, W. C. y M. Kneale, R. Blanché:

G. Calogero, *Fundamenti della logica aristotelica*. Florencia 1927. 2ª edición, La nueva Italia, Florencia, 1968.

J. M. Le Blond, *Logique et methode chez Aristote*. 3ª edición. Vrin. Paris, 1973.

J. Lukasiewicz, *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna*. Trad. J. Fdez. Robles. Tecnos. Madrid, 1977.

H. Maier, *Die Syllogistik der Aristóteles* (I-III). Laupp, Tubinga, 1896-1900. Reimpresión, Hildesheim, 1969-70.

L. Lugarini, *Il problema delle categorie in Aristotele*. Nuvoletti. Milán, 1955.

G. Patzig, *Die aristotelische Syllogistik*. Vandenhoech und Ruprecht. Gotinga, 1959.

A. Plebe, *Introduzione alla logica formale attraverso una lettura logica di Aristotele*. Bari, 1969.

L. E. Rose, *Aristotle's syllogistic*. Springfield (Illinois) 1968.

F. Solmsen. *Die Entwicklung der aristotelischen Logik un Rhetorik*. Weirmann. Berlin, 1929.

H. Steinthal, *Geschichte der Sprachenwissenschaft bei den Griechen und Römern mit besonderer Rücksicht auf die Logik*. Berlin 1890. Riempr. G. Olms. Hildesheim 1961.

F. Trendelenburg, *Geschichte der Kategorienlehre*. Berlín 1846. Reimpresión, G. Olms. Hildesheim, 1963.

C. A. Viano, *La logica di Aristotele*. Taylor. Torino, 1955.

G. E. L. Owen (ed.), *Aristotle on Dialectic. The Topics*. Proc. of the third Symp. Arist., Oxford, 1963. Clarendon, Oxford, 1968.

J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and its Modern Interpretations*. Proc. of the Buffalo Symp., 1972. Reidel, Dordrecht, 1974.

P. Thom, *The Syllogism*. Philosophia Verlag, Munich, 1981.

J. Barnes et alii (eds.), *Articles on Aristotle*. 4 vols. Duckworth, Londres, 1975-79.

2. Las categorías

El *Organon* "ortodoxo", cuya ordenación de tratados obedece a criterios sistemáticos, contiene, en primer lugar, el tratado de las *Categorías*. Las materias de las que en él trata Aristóteles pertenecen a la *lógica material* más que a la *lógica formal* (utilizando terminología escolástica). Por eso no atraen la atención de los historiadores de la lógica vista desde una perspectiva formal. Por el contrario, constituían el tema central de las discusiones lógicas entre los lógicos antiguos y medievales, de forma que (tomando la parte por el todo) la εἰσαγωγή de Porfirio a las *Categorías* se convirtió entre los escolásticos en la introducción general al conjunto de la lógica.

El tratado de las *Categorías* viene dividido tradicionalmente en tres partes:

1ª parte: capítulos 1-3

Se tratan cuestiones preliminares bajo la denominación escolástica de "antepraedicamenta", que son cuatro: 1) división de los unívocos, equívocos y análogos; 2) distinción de complejos e incomplejos; 3) distinción de las cosas que están en un sujeto y las cosas que se dicen de un sujeto. Esta distinción da lugar a cuatro combinaciones posibles: a. -cosas que se dicen de un sujeto, pero no están en un sujeto; ej. "Hombre" se dice de "Sócrates": los universales que se predican de sus inferiores; b.- las cosas que están en un sujeto, pero no se dicen de ningún sujeto; ej. esta "blancura" está en este "cuerpo": los accidentes singulares que "inhaerent subiecto"; los accidentes singulares; c.- cosas que se dicen de un sujeto y están en un sujeto; ej.: "conocimiento" se dice de un sujeto: del conocimiento gramatical, y está en un sujeto: en el alma; los accidentes universales; d.- cosas que no están en un sujeto, ni se dicen de un sujeto; ej.: "este hombre", las sustancias singulares; 4) distinción de predicaciones según su transitividad, según dos "regulae": a.- la concerniente a la transitividad entre sujeto y predicado: Cuando algo se predica de algún sujeto, todo lo que se dice del predicado se dice del sujeto. Aquí se funda la teoría según la cual la lógica aristotélica ha de ser explicada en extensión; b.- las diferencias esenciales de los géneros no subalternados no son las mismas (no hay transitividad). Ej.: Dados los géneros "animal" y "conocimiento", no subalternado el uno al otro, las diferencias del primero ("pedestre", "acuático" y "bípedo"), no son las mismas que las del segundo.

2ª parte: capítulos 4-9

Aparece la lista de las 10 categorías y el tratamiento de algunas de ellas: la sustancia, la cantidad, la relación, la cualidad y la acción y la pasión.

Los críticos (L. Minio-Paluello, J. L. Ackrill) suponen que al final de esta parte hay una laguna y que el capítulo 9 no es genuinamente aristotélico, introducido aquí para servir de enlace con la 3ª parte, conocida bajo la denominación escolástica de *Postpraedicamenta*, de cuya autenticidad también se había dudado, ya que las materias aquí tratadas no conectan con las tratadas en la Parte II. Pese a ello, no cabe dudar de la autoría de Aristóteles; si bien, como algunos opinan (Ackrill, entre otros), probablemente no formaba parte del texto original de las *Categorías*, y fue, quizá, puesto aquí, tomado de otro lado, por algún editor. Los *postpraedicamenta* son ciertas propiedades comunes a

todas o varias categorías: la oposición (caps. 10-11), la prioridad y simultaneidad (caps. 12-13), el movimiento (cap. 14) y el tener (cap. 15).

La teoría de Aristóteles sobre las categorías juega un papel importante en la lógica y la ontología. No vamos a discutir aquí si son los esquemas lógicos meros *reflejos* de los esquemas ontológicos o viceversa, simplemente constatamos la correspondencia entre ambos tipos y la coherencia de unos respecto de otros. La noción de categoría en Aristóteles va ligada a (depende de) la idea de ser. "Categoría" viene de κατηγορεῖν, que significa "acusar" o "atribuir". La traducción latina de Boecio es "praedicamentum". Lo define Aristóteles como el elemento no ligado (con otro en la proposición). Al ser dicho fuera de toda ligazón (κατὰ μηδεμίαν συμπλοκὴν λεγόμενον), significa alguna de las posibles determinaciones del ser; esto es, una de las 10 categorías: sustancia, cantidad, cualidad, relación, ubicación, cuándo, situación, hábito, acción o pasión. De manera que un término no ligado (una expresión categorial) denota una entidad, significa un modo de ser, que cae en alguna de esas diez categorías. Habrá tantas categorías cuantas posibles modalidades o determinaciones del ser. Las categorías resultan ser así, las clases o los géneros supremos de entidades habidas y por haber. Estas clases o géneros supremos no son, sin embargo, fruto de una *división* (entendida ésta en sentido estricto: establecimiento del todo como sistema de sus partes), ya que el ser no es un género supremo que pueda ser dividido en diez (o más, o menos) partes (o especies o géneros inferiores). Las categorías aristotélicas no son las divisiones del ser en su totalidad (tesis de H. Maier, *Die syllogistik des Aristoteles*, II, 2, págs. 300-315). Aubenque (*El problema del ser en Aristóteles*, pág. 176):

> "Así entendida, la teoría de las categorías no sería sino el remate de una concepción jerárquica del universo, en la cual se descendería, mediante una serie de sucesivas divisiones, del ser a las categorías, de las categorías a los géneros, de los géneros a las especies últimas, desde la universalidad hacia la pluralidad. Pero semejante interpretación de la teoría de las categorías, que será recusada formalmente, más adelante, por Porfirio, se halla en contradicción con la inspiración general del proceso del pensamiento de Aristóteles".

Las diez categorías de Aristóteles son múltiples y separadas y no participan de un género supremo, el Ser o el Uno, como en Platón. En *Metafísica*, B, 3, 998 b 21:

> "Mas no es posible que el uno o el ser sean géneros de los seres. Es necesario, en efecto, que existan las diferencias de cada género y que cada diferencia sea una; pero es imposible atribuir las especies del género a sus propias diferencias, o el género considerado independientemente de sus especies. Por consiguiente, si el ser o el uno fueran género, ninguna diferencia tendría ni ser ni unidad".

De manera que el ser, si bien se dice de muchas maneras, sin embargo, no se dice unívocamente (no se contrae en sus inferiores -las categorías- por medio de diferencias sobre el concepto de ser), sino que se dice por respecto a uno, pero no a uno que lo es sólo por una razón, sino a uno que es una cierta naturaleza (se contrae en sus inferiores por medio de diversos modos de ser): "el es pertenece a todas esas cosas -las categorías-, pero no de la misma manera"[1].

Las categorías aparecen, así, como respuestas a la pregunta "¿en qué sentido decimos del ente que es?" Y se dice que es de muchas maneras. Así, por ejemplo[2], "sano" se aplica a todo lo que tiene que ver con la salud: a lo que la conserva, a lo que la produce, a lo que es digno de ella y a lo que es capaz de poseerla. Así también ocurre con el ser: unos entes se dicen seres porque tienen el ser *per se*, como son las sustancias; otros porque son pasiones o propiedades de la sustancia, etc.

De la no división del ser en las categorías se sigue, en primer lugar, que no es esencial para la teoría aristotélica el número determinado (10) de las categorías. La discusión sobre si la lista ofrecida por Aristóteles es completa (tesis sostenida en el s. XIX por Brandis, Zeller y Brentano, y antes por Santo Tomás) o incompleta (se detuvo circunstancialmente en 10), sólo tiene sentido cuando se busca en la tabla la división del ser. Y también, cuando es así considerada, es cuando caen sobre ella las mayores críticas: Trendelenburg y Brunschvicg (a quienes seguirán los filósofos analíticos) reprocharán a Aristóteles tomar por divisiones del ser lo que son partes de la oración gramatical. Trendelenburg, *Elementa logices Aristoteleae*. Berlín, 1892, 3ª edic. (págs. 56 y ss.): "quae quattuor genera primo loco collocata sunt, ea si grammaticas orationis partes comparaveris, substantiva una cum adiectivis et numeralibus complectantur, quae quattuor postremo loco ea verborum genera, quae interiecta sunt, adverbiorum naturam referunt". Así οὐσία sería el sustantivo, ποιόν el adjetivo, ποσόν el número, πρός τι las formas comparativas y relativas, etc. Concluye Trendelenburg: "Ita Aristoteles categoriarum genera ex grammaticis fere orationibus invenisse videtur".

---

1 *Metaf.* Z, 4, 1030 a 21.
2 *Metaf.* G , 2, 1003 a.

Las categorías no tratan de dividir un terreno, el del ente (ὄν), sino de distinguir significaciones, las del ser (εἶναι). Las categorías designan las maneras múltiples que tiene el ser de significar. Por lo que la noción de categoría y de ser resultan indisolubles en su elucidación. Y, en consecuencia, no es posible que tratemos la lógica (las categorías) de Aristóteles al margen de su ontología.

2. 1. Lógica-ontología

La idea de *ser* en Aristóteles posee el mismo estatuto ontológico que la idea de *sustancia*. Ambas son ideas *límite*. En efecto, la idea de ser es una idea límite de un *regressus*, en tanto que el ser no puede ser pensado en sí mismo fuera del contexto de la propia realidad y de los seres que nos son dados en el mundo: los múltiples seres (S_i), en donde $S_i=[s_1, s_2, s_3, ..., s_n]$, correspondientes a las diez categorías. Por consiguiente, la idea de ser (S) ha de entenderse en este contexto; como una idea que ha sido construida regresivamente a partir del mismo universo de categorías, pero que, a su vez, (en el *progressus)* posibilita el ordenamiento ontológico de ese campo de categorías. Ordenamiento que trasciende el campo ontológico para convertirse en ordenamiento lógico. Así, en el cap. 13 de *De Interpretatione*, 23 a, 17-26, Aristóteles establece una jerarquía de las relaciones modales -relaciones lógicas- ateniéndose a criterios de tipo ontológico:

> "De lo dicho se desprende, pues, que lo que es por necesidad es en acto. Por consiguiente, si las cosas eternas son las primeras, el acto es también anterior a la potencia. Y unas cosas están en acto, sin potencia, como, por ejemplo, las sustancias primeras; otras, con potencia, las cuales son anteriores por su naturaleza, pero posteriores en el tiempo; otras, en fin, nunca están en acto, sino que son sólo potencias".

Este es el resumen de un ordenamiento ontológico ampliamente tratado a lo largo de la *Metafísica* y que es el siguiente:

1. En primer lugar, están los actos puros, como es el acto puro y las Inteligencias de las esferas, los cuales son anteriores en el tiempo a toda potencia[3]. En este ámbito rigen las relaciones de lo *necesario*.
2. Tenemos, en segundo lugar, los seres corruptibles (τὰ φθαρτά) en las que el acto y la potencia están unidos y forman el mundo sublunar[4]. Este mundo está regido por las leyes de lo *posible* y de lo *contingente*.
3. Finalmente, están las puras potencias: la materia prima, lo indefinido (ἄπειρον) y lo vacío (κενόν)[5]. Estas forman el grupo de lo *imposible*.

En virtud del esquema ontológico, propuesto por Aristóteles, las proposiciones modales sobre lo necesario deberán ser colocadas en primer lugar. A éstas seguirán las modales sobre lo posible y lo contingente y finalmente las que tratan sobre lo imposible. Obtenemos, así, una nueva distribución de las proposiciones que Fonseca[6] ha resumido en las palabras mnemotécnicas siguientes: *sUnt AtAvi (Amabimus), qul rEfErUnt (Edentuli), vErIdIcA (Iliace), ArgUtUlE (Purpurea).*

Es evidente la estrecha conexión que guardan los esquemas, lógico y ontológico, en la obra de Aristóteles. Nadie niega esto. Lo que sí suele producirse, en cambio, es cierta resistencia a introducir las nociones modales en el cálculo de la lógica formal moderna. La tendencia de la lógica clásica así como de la lógica formal es la de mantenerse en el nivel extensional y asertórico.

El ser es un ser análogo, que se dice de muchas maneras[7], y no significa algo siempre idéntico, sino algo analógicamente plural y con sentidos muy diferentes. El ser -decían los escolásticos-[8] es un analogado con analogía de proporcionalidad propia, en cuanto que el ser, cuando se predica de la cantidad, de la cualidad, etc., significa esas categorías, en cuanto que tienen ser, y aunque el ser de cada una de ellas es diverso, la proporción de los diversos poseedores de ser respecto de su ser es la misma, esto es, la sustancia es a su ser como la cualidad al suyo, etc.: el ser de la sustancia es el acto de la sustancia, como el ser de la cualidad es el acto de la cualidad.

La distinción de los diversos sentidos del ser aparece de forma clara y específica en el siguiente pasaje de los *Analíticos:*

> "Las cuestiones son tantas cuantas son las que sabemos. Y son cuatro: sobre el hecho (τὸ ὅτι), sobre la razón (τὸ διότι), sobre la existencia (εἰ ἔστιν), sobre la esencia (τί ἐστιν). Cuando indagamos si se da esto o esto otro y cuando el objeto de indagación es

---

[3] *Metafísica*, Λ, 6, 1071 a.
[4] *Metafísica*, θ, 8.
[5] *Metafísica*, θ, 6, 1048 b, 10.
[6] Citado por Tricot en Trad. *De Interpretatione*, Vrin, Paris, 1969, p. 137, nota 3.
[7] *Metaf.* Δ, 5, 1017 a.
[8] J. Gredt, *Elementa Philosophiae*...I, p. 142.

compuesto, por ejemplo, si el sol se eclipsa o no, entonces indagamos sobre el hecho (τὸ ὅτι). Una señal de esto es que cuando nos encontramos con que el sol se eclipsa, entonces nos detenemos, y si supiésemos desde el principio que se eclipsa, no indagaríamos sobre si se eclipsa. En cambio, cuando conocemos el hecho, indagamos sobre la razón (τὸ διότι). Por ejemplo, cuando, sabiendo que el sol se eclipsa y que la tierra se mueve, indagamos por qué se eclipsa o por qué se mueve. Así, indagamos sobre este tipo de cuestiones. Pero hay otro tipo sobre las que indagamos de otro modo. Por ejemplo, si centauro existe o no (εἰ ἔστι ἢ μὴ) o si dios existe o no. Tomo el "es o no" *simpliciter*, no en el sentido de si "es blanco o no". Cuando conocemos la existencia, indagamos qué es (τί ἐστιν). Por ejemplo, qué es dios o qué es hombre"[9].

Estas cuatro cuestiones quedan agrupadas, tal como Aristóteles indica, en dos apartados. Las cuestiones sobre el hecho (ὅτι ἔστιν) y el por qué (διότι ἔστιν) versan sobre materias complejas y, por lo tanto, la proposición que les corresponde constituye, ante todo, una síntesis; es la unificación de una diversidad, expresando, bien un hecho que constituye la comparación de dos seres, bien una causación que constituye la acción de un ser sobre otro.

Las cuestiones sobre la existencia (εἰ ἔστιν) y la esencia (τί ἐστιν) versan, por el contrario, sobre materias simples y, por lo tanto, también lo son las proposiciones que les corresponden. Tomamos, pues, éstas como las más inmediatas para nuestro análisis. En ellas hallamos los dos conceptos de Ser -existencial/esencial- objeto de nuestro análisis.

¿Qué relaciones guardan estos dos conceptos de ser? La mayoría de los investigadores se inclinan por una interpretación similar a la mantenida en el caso de la sustancia, a saber, considerar el tratamiento que Aristóteles hace de estos dos conceptos como ambiguo. Aristóteles distingue -según esta interpretación- los dos tipos de ser, pero no es ni consciente ni consecuente siempre con esta distinción. "Aristóteles -dice Ross-[10] es consciente de la distinción entre el *es* existencial y el *es* copulativo. Pero no tiene todavía una idea clara de su relación".

Pero cabe otra interpretación, que va en el mismo sentido que la ofrecida también en el caso del concepto de sustancia. Precisamente la distinción entre ser existencial y ser esencial corre paralela a la distinción entre sustancia primera y sustancia segunda. Y el primer par se comporta, respecto de la idea de Ser, igual que el segundo respecto de la idea de Sustancia. Ambas ideas son ideas límite, el primer analogado. Y, entonces, la idea de Ser como la de Sustancia tiene como paradigma una cierta entidad que consideramos como un caso límite, en el cual la distinción de Frege entre *sentido* y *referencia* queda abolida: cuando el sentido (o el significado) contiene en su misma estructura la referencia, es decir, cuando la esencia de una entidad contiene su propia existencia. No es otro el meollo del argumento ontológico.

La idea de Ser de Aristóteles tiene como paradigma una entidad que siendo individual y sensible es, a su vez eterna y necesaria y, por tanto, calificada como abstracta. Este paradigma son los astros. Los astros son sustancias eternas e inmutables y existen, por tanto, en acto. Son estos los seres *per se*, a través de los cuales cobra significado la teoría aristotélica de los ritmos cíclicos: "Si siempre se repite cíclicamente lo mismo, tiene que subsistir siempre algo que actúe del mismo modo. Y, si ha de haber generación y corrupción, tiene que haber otra cosa que actúe siempre, unas veces de un modo y otras veces de otro"[11]. La referencia es, sin duda, el cielo de las estrellas fijas, en el que el sol y los otros planetas se mueven todos en círculo, arrastrando a todos los demás seres del mundo sublunar. El sol es "divino" y junto con los demás astros constituyen las esencias eternas y, además, existentes[12]. "Hay una tradición -dice Aristóteles-[13] según la cual los astros son dioses y que toda la naturaleza queda sometida a la divinidad. Pues bien, si de esta narración tomamos sólo el principio, es decir, que todas las esencias primeras son dioses, se comprenderá que es una tradición verdaderamente divina."

He aquí el esquema ontológico de la idea de Ser, esquema que se proyecta sobre la lógica, porque constituye un esquema de lógica material. Los seres en acto y sin potencia, es decir, las sustancias primeras, como el primer motor y las inteligencias de las esferas, son los seres *per se;* aquéllos en los que el ser esencial realiza su ser existencial, y su ser existencial consiste en su ser esencial: expresión exacta de lo que entendemos por conceptos conjugados[14].

No es que Aristóteles fluctúe entre la consideración

---

9 *Segundos Analíticos*, II, 1, 89 b.
10 W. D. Ross, *Aristóteles*, *ed. cit.*, p. 47.
11 *Metafísica*, Δ, 6, 1072 a.
12 *Metafísica*, Δ, 6, 1073 a.
13 *Metafísica*, Δ, 8, 1074 b.
14 Esquema que Sto. Tomás, *In Analyitica Posteriora*, II, VI, aunque partidario de la distinción real entre esencia y existencia aplica al "ser imparticipado": "In solo enim essendi principio quod est essentialiter ens, ipsum esse et quiddítas eius est unum et idem".

existencial o esencial del ser, sino que, más bien, su teoría lógica es consecuente con su doctrina ontológica. En el silogismo, la conclusión se sigue *necesariamente* de las premisas, y esa necesidad, en contra de Lukasiewicz, no es mera expresión de un cuantificador universal, sino que nos movemos en un espacio ontológico regido por lo necesario, y ese espacio ontológico regido por leyes necesarias es el espacio de las sustancias cuyo ser esencial y ser existencial funcionan conjugadamente. Aristóteles sabe distinguir perfectamente ambas nociones, pero no es menos cierto que dicha distinción queda cruzada por otra, la distinción entre el ser *per se* y el ser *per accidens*. Son las proposiciones en las que aparece el ser *per se* las que Aristóteles toma en consideración en sus esquemas de silogismos. El ser *per se* es afirmado de tantas maneras cuantas categorías hay. Mas el ser no es género, como el Uno platónico, compuesto de partes alicuotas. El ser es común a todas las categorías y no caracteriza a ninguna de ellas. Se predica, ante todo, de la sustancia -sólo la sustancia es *simpliciter* - y sólo a través de ella de las restantes categorías que constituyen, para seguir con la terminología fregeana, las referencias del ser, es decir, el campo material del ser existencial: lo que hay. Pero, a su vez, las categorías no son sino los últimos tipos de respuesta a la cuestión sobre la esencia (τί ἐστιν)."Es evidente -dice Aristóteles-[15] que quien significa la esencia (τί ἐστιν), significa, o bien la sustancia, o bien la cualidad o bien alguna de las restantes categorías". De modo que ahora las categorías quedan asociadas exclusivamente con el ser esencial. De nuevo topamos con un proceso dialéctico según el cual entre el ser esencial y el ser existencial se establece un esquema de conexión diamérica, en virtud del cual la realización de cada concepto tiene lugar a través de los componentes del otro. El τί ἐστιν y el εἰ ἔστιν constituyen dos momentos de un único proceso, tanto en el orden de ser como en el del conocer. Aristóteles hace referencia expresa a estos dos momentos cuando dice:

a) "Que no podemos evidentemente aprehender la razón antes de conocer el hecho; e igualmente es evidente que no podemos conocer la esencia de un objeto (τί ἐστιν) sin conocer su existencia (εἰ ἔστιν): imposible saber lo que una cosa es si se ignora que ella es"[16].

b) "El hecho de la existencia de las verdades primeras debe ser supuesto"[17]. El conocimiento necesario de la esencia supone la existencia. La existencia puede, efectivamente, ser distinguida en abstracto de la esencia, ya que podemos conocer la existencia, tanto por la esencia, como por accidente. Pero "cuando conocemos la existencia por accidente no poseemos ningún elemento para juzgar de la esencia y en realidad no sabemos la existencia"[18].

Este esquema ontológico es el que rige asímismo en el plano lógico. En el estudio de las proposiciones topamos con las mismas distinciones que merecen una interpretación a través del esquema ontológico. En lógica, el problema del *ser esencial/ser existencial* se presenta bajo la forma verbal del ser que aparece en la proposición. El verbo ser es parte integrante de todas las proposiciones, ya que aquéllas en las que no aparece explícitamente son susceptibles de ser transformadas en otras equivalentes con el verbo ser, por ejemplo, "el hombre pasea" queda transformada en "el hombre es paseante". La proposición fundamental en la lógica aristotélica es, pues, la proposición atributiva, el λόγος ἀποφαντικός, la única que forma parte de la lógica aristotélica, ya que a ella sola le corresponde el ser verdadera o falsa.

Un texto esencial, bajo varios puntos de vista, sirve para ilustrar nuestra tesis: el final del cap. 3 de *De Interpretatione*. El texto merece consideración especial: a) pertenece al tratado en el que Aristóteles se propone como objetivo el estudio de las proposiciones; b) el cap. 3 al que pertenece el texto está dedicado al estudio del verbo; c) el texto toma en consideración explícitamente el problema del ser. El texto contiene, por otra parte, el pasaje más difícil de interpretar de toda la obra[19]:

"Los verbos (ῥήματα) en sí mismos y por sí mismos proferidos son nombres (ὀνόματα) y significan algo -pues el que habla detiene el pensamiento y el que escucha hace una pausa- pero no significan todavía si es o no (εἰ ἔστιν ἢ μή). Porque "ser" o "no ser" (τὸ εἶναι ἢ μὴ εἶναι) no es un signo de las cosas reales (τοῦ πράγματος), ni si dices, sin más, "lo que es" (τὸ ὄν). En sí mismo no es nada, sino que cosignifica (προσημαίνει) cierta síntesis (σύνθεσιν τινα) que no puede ser pensada sin los componentes (συγκειμενων)"[20].

Aristóteles declara explícitamente:

a) Que el verbo ser funciona en la proposición exclusivamente como cópula; cópula que desde el punto de vista lógico constituye una relación formal de identidad.

---

[15] *Tópicos*, I, 9, 103 b.
[16] *Segundos Analíticos*, II, 3, 93 a.
[17] *Segundos Analíticos*, I, 10, 76 a.
[18] *Segundos Analíticos*, II, 8, 93 a.
[19] Véase nuestra trad. de *De Interpretatione* en Teorema, Valencia, 1977.
[20] *De Interpretatione*, 3, 16 b, 19-25.

b) Que esa relación expresa una síntesis. Por lo tanto, el ser representa una relación de identidad sintética.

c) Que en cuanto función copulativa, es decir, en cuanto relación formal, exige unos componentes, que son los términos de la relación. Sin estos componentes (ἄνευ τῶν συγκειμένων) la función copulativa, es decir, la síntesis, no tiene ningún sentido, "no puede concebirse".

Que el sintagma συγκειμένων designa los *componentes* de un todo -en este caso, los componentes de la proposición- queda de manifiesto en el uso que Aristóteles hace del mismo[21]. Por ejemplo, "la forma de gobierno compuesta (συγκειμένη) de democracia y de tiranía"[22]. En el caso de la proposición, esos componentes son el sujeto y el predicado[23].

En cuanto cópula compositiva el "es" apunta al atributo con el que forma un todo y del que no puede separarse sin perder su significación. Con el sujeto y el predicado como términos, la síntesis es una composición de pensamientos que tiene que ver con la verdad y la falsedad[24]. Esto no quiere decir que la verdad y la falsedad queden reducidas al plano subjetivo, al plano del pensamiento, sino que la relación sintética funciona en el plano del pensamiento como en el plano real (ὥσπερ ἐν ὄντων). Ahora bien, en las proposiciones atributivas, que son las únicas susceptibles de ser verdaderas o falsas, la verdad o la falsedad viene marcada por el atributo, o mejor, por la parte compuesta por el ser más el predicado. El verbo "pasea" y su equivalencia "es paseante", siempre es un signo de lo que se atribuye (τῶν ὑπαρχόντων), esto es, de lo que se atribuye a un sujeto (ὑποκειμένον)[25]. Y la verdad consiste en atribuir al sujeto lo que se le atribuye (τὸ ὑπάρχον); en tanto que la falsedad consiste en atribuirle lo que no se le atribuye. El ser copulativo posee, así, una función doble: *función selectiva*, orientada hacia el término que aparece como sujeto, y *función compositiva*, que toma como valor el predicado. Ambas funciones constituyen dos momentos de un único proceso, y cada una de las cuales, por separado, pierde su valor.

El esquema desarrollado en la *Metafísica* (Δ, 6, 1017 a) sobre los distintos modos del ser es el mismo que Aristóteles aplica en el campo de la lógica. Mediante este esquema es posible una interpretación coherente del papel que el ser desempeña en las proposiciones de la lógica aristotélica. El cap. 11 de *De Interpretatione* constituye una muestra. Las mismas distinciones entre atributos *per se* y *per accidens* son empleadas para la clasificación y examen de las proposiciones. Examina Aristóteles primeramente las proposiciones posibles a partir de la unión de dos predicados *(ex divisis ad coniuncta):* Ni dos predicados *per accidens*, ni dos predicados tautológicos pueden quedar unidos formando uno solo. Pero, lo que es más importante: La clasificación de los predicados no se atiene a criterios formales, sino que exige la consideración ontológica. Dos predicados son tautológicos, no sólo cuando así sucede en el plano lingüístico, por ejemplo, "blanco"-"blanco", sino cuando así resulta en el plano ontológico, como sucede con los predicados "hombre" y "bípedo". Ambos son el mismo predicado a nivel ontológico. Resulta, así, tan absurdo decir "Sócrates es hombre-bípedo" como decir "Sócrates es blanco-blanco"[26]. Sólo cuando la atribución es *per se* es posible la unión de los predicados como, por ejemplo, "animal" y "bípedo".

Más importancia aún posee para nuestro análisis del concepto de "ser" en la proposición el examen que efectúa Aristóteles a continuación: Examen de los argumentos *a coniunctis ad divisa* (la posibilidad de separar dos atributos compuestos). Aristóteles precisa que sólo cuando la atribución es *per se* cabe la atribución *simpliciter* siempre. En los casos restantes puede fallar por contradecir el segundo término la esencia del primero, problema que queda obviado bajo la condición de la atribución *per se*. De nuevo constatamos que para examinar cuándo la atribución es *per se* y cuándo un término contradice a otro es preciso recurrir al esquema ontológico arriba esbozado.

Es el tipo de atribución *per se* el que constituye el material de la lógica aristotélica. Y esto por la sencilla razón de que la lógica, como la ciencia, es de lo necesario. El método silogístico busca conocimientos necesarios, y, en tanto que las proposiciones que en él intervienen constituyen tipos de atribución necesaria, el problema entre "es" esencial y "es" existencial se desvanece, desde el momento en que, tanto ontológicamente como lógicamente -en la lógica aristotélica- ambos coinciden. Para decirlo con palabras de Ross: "Puede parecer sorprendente que Aristóteles, que trata

---

21 Bonitz, *Index aristotelicus*, 708 b, 33.

22 *Política*, II, 4, 1266 a, 1, 5.

23 Bonitz, *Index aristotilicus*, 708 b 33, que cita *Metafísica*, θ, 10, 1051 b, 4.

24 *De Anima*, III, 6, 430 a, 27; b, 2: "En las cosas que hay falsedad y verdad hay ya una síntesis de pensamientos como en los seres".

25 *De Interpretatione*, 3, 16 b, 10.

26 Confert, *De Interpretatione*, 21 a, 4.

de los dos principales sentidos de "es" copulativo -ser accidental y ser esencial- no diga nada del "es" existencial... La razón es que, aunque lógicamente el "es" existencial puede ser distinguible del copulativo, sin embargo, metafísicamente no lo es. Ser es, o bien ser una sustancia, o ser una cualidad, o ser en alguna otra de las categorías; nada puede ser sin ser de alguna manera"[27].

Se puede argumentar, en la separación de atributos compuestos, *a coniunctis ad divisa* siempre que la atribución es *per se*, como cuando se dice que tal hombre es hombre[28]. Pero cuando la atribución es *per accidens* como, por ejemplo "Homero es un poeta" ¿se sigue o no que Homero existe? La respuesta de Aristóteles es negativa: el "es" no es afirmado de Homero más que por accidente, y de "Homero es un poeta" no se puede concluir que él "es" en sentido propio[29]. De "Homero" se predican "es" y "poeta", pero "es" no se predica solo, sino en cuanto que es poeta; por lo tanto, sólo se predica accidentalmente y, en consecuencia, no es válida aquí la argumentación.

Aristóteles insiste con otro ejemplo; ejemplo que supone adelantarse a la objeción sofística siguiente: Puesto que del no-ser se puede hablar, el no-ser es; es decir, cabría la argumentación *a coniunctis ad divisa: Non ens est opinabile, ergo non ens est.* Pero Aristóteles replica: "La opinión sobre el no-ser no es que es, sino la de que no es"[30]. El verbo ser se predica, en efecto, del no-ser, no *per se*, sino accidentalmente, es decir, *merito opinabilis*, lo mismo que en el ejemplo anterior el ser se predica de Homero, no en sentido propio, sino *merito poetae*.

La doctrina aristotélica, según esto, es bastante explícita en lo referente a la conexión entre el ser esencial y el ser existencial: Ambos conceptos no son sino dos funciones de un único elemento. Estas funciones quedan disociadas precisamente en los casos límite, en las excepciones. Mas en las proposiciones tipo -aquéllas que constituyen el campo de la lógica aristotélica-[31] siempre aparecerá el verbo ser con sus dos funciones conjugadas. En las proposiciones en las que la predicación es *per se* el ser existencial realiza el ser esencial, porque la lógica, en cuanto ciencia, no busca el conocimiento de los seres existentes y concretos, sino el conocimiento de la esencia, y en el conocimiento de la esencia "es" una verdad; una verdad que no es sensible y concreta, pero que "es". Y, así, dice Aristóteles, "el geómetra muestra que el triángulo existe"[32] y "El aritmético supone la esencia de la unidad y su existencia"[33]. Porque no se puede reconocer o afirmar la existencia de aquello de lo que no se tiene una noción, y, en este sentido, la afirmación de la existencia presupone el conocimiento de la esencia. Dicho con palabras del mismo Aristóteles: "La definición es una tesis... no una hipótesis"[34], es decir, una proposición existencial. El τί ἐστιν no constituye un conjunto de notas abstractas, sino la esencia real.

A su vez, el ser esencial viene dado a través del ser existencial. En primer lugar, porque la respuesta al τί ἐστιν ha de recaer en alguna de las categorías, y éstas constituyen los únicos modos de ser. Y, en segundo lugar, porque el conocimiento de la esencia es sólo de aquello que existe. "Es necesario para conocer la esencia de hombre o de cualquier otra cosa, conocer que el hombre existe; porque nadie conoce la esencia de lo que no existe"[35]. Y, así, en el pasaje antes citado en donde distingue las cuatro cuestiones sobre el hecho, la razón, la existencia y la esencia, los ejemplos que pone Aristóteles para la cuestión sobre la existencia son modificados para la cuestión sobre la esencia. Sustituye "centauro" por "hombre"; ello es debido a que de "centauro" no cabe la cuestión τί ἐστιν, precisamente porque la cuestión εἰ ἔστιν recibe respuesta negativa.

Las dos funciones del ser han de estar presentes en las proposiciones de la lógica aristotélica. Sin este doble aspecto el silogismo queda reducido a una mera tautología o bien pierde su rigor y carácter de necesidad.

2. 2. La sustancia

En el cap. 5 de las *Categorías* trata Aristóteles *ex profeso* de la sustancia, distinguiendo: las sustancias primeras y las sustancias segundas.

La sustancia primera (οὐσία πρώτη) es el individuo: aquello que no se dice de un sujeto ni está en un sujeto.

La sustancia segunda (οὐσία δευτέρα) es la espe-

---

28 *De Interpretatione*, 21 a, 20.

29 *De Interpretatione*, 21 a, 25-28. Véase Sto. Tomás, *Opera Omnia*, II, 1, VII, 76; comentario que se debe a Cayetano.

30 *De Interpretatione*, 11, 21 a, 33.

31 La predicación accidental es ajena a la demostración; sólo cuando el predicado se predica invariablemente estricta y no accidentalmente del sujeto, pues de esta predicación dependen las demostraciones (*Segundos Analíticos*, I,22, 83 a.).

32 *Segundos Analíticos*, II, 7, 92 b, 16.

33 *Ibidem*, II, 9, 93 b, 24.

34 *Segundos Analíticos*, I, 2, 72 a, 23.

35 *Ibidem*, II, 7, 92 b, 4.

cie a la que pertenece la sustancia primera o el género de esa especie. La sustancia segunda expresa una calificación de la sustancia primera.

Propiedades, tanto de las sustancias primeras como de las segundas son:

1.- No poseen contrarios, ya que los contrarios suponen un sujeto común; mas la sustancia no está en un sujeto.

2.- Su aptitud para recibir contrarios. Esta aptitud es propiedad exclusiva de la categoría sustancia, ya que las otras categorías no pueden recibir contrarios sin dejar de ser tales. Así, el color (categoría cualidad) que es el mismo y uno en número no puede ser blanco y negro; no puede devenir negro sin dejar de ser blanco. En cambio, este hombre (categoría sustancia) siendo uno y el mismo puede ser virtuoso y devenir malvado, sin dejar de ser hombre.

3.- La sustancia es la primera de las categorías en tres sentidos (*Metaf.*, Z, 1, 1028 a 32-b 2):

a) Es la primera en el tiempo, por cuanto que puede existir separadamente; cosa que no les está permitido a las otras categorías[36].

b) Es la primera en la definición, por cuanto que la definición de la sustancia está incluida en la definición del resto de las categorías. Cualquiera de las categorías accidentes no se definen más que por referencia a la sustancia, a la que son inherentes.

c) Es la primera en el conocimiento, por cuanto que lo primero conocido es siempre aquello que es lo más conocido y que manifiesta la cosa; y se conoce mejor una cosa sabiendo qué es, que conociendo lo que le es accidental. Tan es así, que, cuando queremos conocer una cosa que pertenece a una de las categorías accidentes, buscamos saber qué es, tratándola, así, como una especie de sustancia.

Sustancia primera-sustancia segunda

En el plano abstracto distingue Aristóteles, en primer lugar, la sustancia primera. Esta es la sustancia propiamente dicha; es lo individual; la sustancia es, por ejemplo, Bucéfalo, el Sol, Sócrates. Es decir, las realidades individuales y concretas; precisamente lo que en el platonismo eran las apariencias: "Parece imposible que algún término universal, cualquiera que sea, sea una sustancia"[37]. La sustancia es un tipo de realidad que admite predicados, es soporte de movimientos permaneciendo la misma, puesto que los movimientos tienen lugar en los accidentes. Sustancia, en este sentido, se opone a accidente y se opone igualmente a predicado, por cuanto que es el sujeto puro. "Sustancia -dice Aristóteles-[38] es aquello que en el sentido más propio y primario ni se dice de algún sujeto, ni está en algún sujeto, como por ejemplo, tal hombre o tal caballo". Sustancia es aquello que es en sentido pleno, el ser *per se*, la acepción primaria de ser a la cual se refieren todas las demás y que constituyen las diferentes formas de ser[39]. Así, "el adjetivo 'sano' se aplica a todo lo que se refiere a la salud: a lo que la conserva, a lo que la produce, a lo que es digno de ella, a lo que es capaz de poseerla"[40]. El ser se predica, pues, en primer lugar, de la sustancia; y de las demás categorías, por analogía; analogía según el modo de atribución, de igual modo a como en la proposición el sujeto es lo absoluto sobre lo que versa directamente la afirmación, la negación, etc.

En *De Interpretatione*, tratado dedicado a las proposiciones, la afirmación y la negación no vienen determinadas por la proposición en cuanto tal, sino por el atributo, o mejor, por la cópula en cuanto unida al atributo, que constituye los diferentes modos de darse la proposición. "La proposición unitaria es un sonido vocal significativo acerca de si algo se atribuye o no se atribuye"[41]. Lo que hace que las proposiciones sean afirmativas o negativas es el atributo -el afirmar o negar algo de algo-, pero el "de algo" (el sujeto) queda invariante. Y así tenemos luego[42] afirmaciones y negaciones, verdaderas o falsas, según que le pertenezca o no le pertenezca al sujeto lo que se le atribuye. Así por ejemplo, una proposición que tiene como sujeto "blanco" recibe las siguientes determinaciones en virtud del atributo. (Que el término "blanco" pueda, a su vez, ser atributo no empece ahora para nada):

Afirmación:

lo blanco es blanco..... afirmación verdadera
lo blanco es no-blanco..... afirmación falsa

Negación:

lo blanco no es no-blanco.. negación verdadera
lo blanco no es blanco..... negación falsa

---

[36] *Metafs.*, Z, 1028 a 33: τῶν μὲν γὰρ ἄλλων κατηγορημάτων οὐθὲν χωριστόν, αὕτη δὲ μόνη.
[37] *Metafísica*, Z, 13, 1038 b.
[38] *Categorías*, 5, 2 a.
[39] *Confert* D. R. Cousin, "Aristotle's doctrine of substance", en *Mind*, 42, 1933, pp. 319-320.
[40] *Metafísica*, Γ, 2, 1003 a.
[41] *De Interpretatione*, 5, 17 a, 23.
[42] *Ibidem*, 6, 17 a, 26-30.

En todo el tratado de *De Interpretatione* no cabe hablar de proposiciones afirmativas o negativas en el sentido fregeano, en donde la afirmación o la negación afecta a toda la frase; por ejemplo, si una frase la representamos por *p*, su negación será *-p*. Nada de esto ocurre en Aristóteles, que en términos de lógica moderna se expresa diciendo que Aristóteles no está a nivel de lógica de proposiciones, sino a nivel de lógica de términos; y que la afirmación o negación no es una función aplicada a la proposición como un todo, sino función del predicado. En este caso, como hemos visto en el ejemplo anterior, el sujeto funciona como un sustrato, como una sustancia efectivamente, que recibe una serie de cualificaciones. Lo mismo sucede con la división de las proposiciones según la cantidad. "Sócrates es mortal" y "un hombre es mortal" (entendido el "un", no en sentido existencial, sino indefinido) constituyen proposiciones del mismo rango por respecto a la universalidad. En el segundo caso, la proposición es sobre un universal, pero no es una proposición universal; es el "todo" o el "ninguno" lo que hace que la proposición sea universal. Aquí también el sujeto funciona como la sustancia, como invariante que recibe la cuantificación. En ambos casos el sujeto, como la sustancia, en la realidad por excelencia, lo que es *per se*, capaz de recibir determinaciones cualitativas, como afirmación/negación o cuantitativas, como universal/particular. El sujeto recibe los atributos, la sustancia, los accidentes[43]. Una realidad de este tipo ha de ser total, completa, caracterizada por su inmovilidad, pero que posea el principio de su movimiento y de su plenitud; no es, pues, una materia pasiva, sino que en virtud de su potencia tiene en sí misma (en potencia) la forma formando una unidad, materia-forma, que en los seres sustanciales es íntima, por eso son causas[44]. La sustancia natural es la que por sí misma tiende a desarrollar lo que tiene en potencia; es un ser que lleva en sí internamente su forma y su naturaleza, a diferencia de los seres artificiales en los que la forma les viene dada por el demiurgo. El cap. 7, libro I de la *Física* resume cuanto acabamos de señalar. Dice entre otras cosas Aristóteles: " 'llegar a ser' (γίγνεσθαι) admite multiplicidad de acepciones: además de aquello que llega a ser de modo absoluto hay aquello que llega a ser esta cosa determinada; llegar a ser de modo absoluto pertenece solamente a las sustancias; para el resto resulta evidente que es necesario que sea puesto como sujeto algo que es lo que llega a ser. Y, en efecto, la cantidad, la cualidad, la relación, el tiempo, el lugar, llegan a ser de un sujeto, porque sólo la sustancia no se dice de ninguna otra cosa como sujeto y todas las demás se dicen de la sustancia. Pero es evidente que las sustancias y todo lo que es de modo absoluto llegan a ser a partir de un cierto sujeto. En efecto, siempre hay algo que es sujeto a partir de lo que llega a ser lo que llega a ser, como las plantas y los animales a partir del esperma"[45]. Bonitz, por su parte, señala: "Quoniam substantiae sensibiles coaluisse indicantur e materia et forma, dicitur ἡ σύνθετος οὐσία, οὐσία οὕτως ὡς συνθέτη; sed nomen οὐσίας et ad coniuncta inter se refertur materiam et formam, et ad utumque et materiam et formam serosim, οὐσία ἥ τε ὕλη καὶ τὸ εἶδος καὶ τὸ ἐκ τούτων "[46]. La sustancia y el sujeto constituyen el elemento permanente que queda fuera de los flujos de los atributos y de los accidentes. Y en este sentido, lo universal, como los géneros o las especies, no son sustancias, porque los géneros y las especies no existen en sí. Por consiguiente, si el sujeto en la proposición representa la sustancia, una proposición propiamente atributiva sería la que constase de un sujeto puro, un sujeto que no puede ser atributo; esto es, las cosas individuales, las sustancias primeras, el τόδε τι[47]: noción de sustancia y de sujeto como existiendo separados e individuales. Mas entonces ¿Cómo compaginar la afirmación aristotélica: "la sustancia es la única que admite definición, o al menos es la que con más fundamento la admite"[48] y ésta otra: "no hay definición ni demostración posible respecto de las sustancias sensibles individuales"?[49] O bien la afirmación de que la sustancia es, por una parte, lo individual, concreto y sensible[50], mientras que, por otra, es considerada como una entidad persistente que "siendo numéricamente una y la misma es capaz de recibir determinaciones contrarias"[51].

La aporía que se presenta es sólo aparente. El texto

---

43 La estrecha similitud entre los conceptos de "atributo" y "accidente" viene señalada en el libro I de la *Física*. Para designar el atributo emplea Aristóteles, a la vez, el término gramatical κατηγορούμενον (I, 6, 189 a, 32) y el término metafísico συμβεβηκός (I, 3, 186 a, 34).

44 "La sustancia es la forma inmanente cuya unión a la materia constituye lo que se llama sustancia compuesta" (*Metafísica*, Z, 11, 1037 a).

45 *Física*, I, 7, 190 a.

46 *Index aristotelicus*, 545 a, 18-23.

47 *Ibidem*, 544 b, 37: Πᾶσα οὐσία δοκεῖ τόδε τι σημαίνειν; τὸ τόδε τι ταῖς οὐσίαις ὑπάρχει μόνον. El τόδε τι significa "el ser ontólogicamente determinado", y no debe ser confundido con el τόδε, que designa lo que es percibido por los sentidos: el ser concreto y sensible.

48 *Metafísica*, Z, 13, 1039 a.

49 *Ibidem*, Z, 15, 1039 b.

50 *Categorías*, 5, 2 a, 14; 5, 2 b, 7.

51 *Categorías*, 5, 4 a, 10.

anterior sigue: "porque tienen una materia, cuya naturaleza es tal que puede ser o no ser". Aristóteles, en el plano abstracto, cuida de distinguir los conceptos de materia y forma. La forma, la noción, no está sujeta a destrucción, porque tampoco está sujeta a generación; constituye el elemento estable y eterno, el contenido inteligible: "κατὰ τὸ εἶδος ἅπαντα γιγνώσκομεν"[52]. Determinaciones todas éstas aplicables a la sustancia. Pero estas formas no existen (contra Platón) separadas. Para Aristóteles la objetividad de los conceptos universales no entraña la realidad de Ideas en estado independiente: "No es necesario admitir la existencia de Ideas o de una Unidad separada de la Multiplicidad... Lo que, sin embargo, es necesario, es que un atributo pueda ser afirmado de varios sujetos"[53]. En cambio, de la sustancia es de la que con mayor propiedad se dice que "es".

La materia, por otro lado, es el sujeto de inherencia, el sustrato pasivo, el verdadero ὑποκείμενον, en tanto que materia *prima*, sin propiedades o determinaciones de ninguna especie, y, en cuanto tal, la materia viene a resultar una sustancia: "En efecto, si no es ella la sustancia, nos escapa totalmente qué otra cosa pueda ser, porque suprimidos los atributos, no parece quedar otra cosa que la materia, ya que todo lo demás que había en el objeto eran modificaciones de los cuerpos, acciones, facultades o potencias; y, por su parte, la longitud, la anchura y la profundidad son cantidades pero no sustancias"[54]. Pero este carácter de absoluta indeterminación y positividad no cuadra con las características esenciales de la sustancia como son la individualidad, la concreción y el dinamismo.

Nos hallamos, así, ante una serie de distinciones que tomadas por separado establecen esquemas ontológicos opuestos. Mas el planteamiento puede y debe, creemos, ser el inverso: Un esquema ontológico que soporta alternativamente las distinciones lógicas opuestas. Según esto, la idea de sustancia de Aristóteles tendría como paradigma una cierta entidad que siendo individual y sensible realiza plenamente la idea de sustancia. Podría decirse, entonces, que toda la teoría de la sustancia de Aristóteles ha de entenderse introduciendo la referencia: cierta entidad que realiza plenamente el esquema ontológico desarrollado por Aristóteles. Esta referencia la constituyen, sin duda, los astros. Los astros son las auténticas sustancias individuales, inmutables, eternos e incorruptibles; pero son, además, esencias y están dotadas de existencia: "La naturaleza de los astros, en efecto, en una sustancia eterna y existente: lo que mueve es eterno y anterior a lo que es movido, y lo que es anterior a una sustancia, necesariamente es también una sustancia. Es, por tanto, claro que es necesario que cuantos sean los planetas, otras tantas sean las sustancias naturalmente eternas y por sí mismas inmóviles y sin magnitud"[55].

Que los astros son el paradigma de la sustancia viene confirmado por multitud de textos. Los astros constituyen los seres por excelencia; son seres "divinos": "El cielo -dice Aristóteles-[56] está poblado de cuerpos divinos a los que solemos llamar astros". Aristóteles presta gran atención a los seres individuales y sensibles, a todo aquello que en el platonismo eran las apariencias, y por ello aplica el concepto de sustancia a estas realidades individuales y concretas, como por ejemplo, a Bucéfalo o a Sócrates. Pero este tipo de seres no constituyen el paradigma de la idea de sustancia, porque "poco importa, por otra parte, que se afirme la superioridad del hombre sobre todos los seres vivos, pues hay muchas cosas que tienen una naturaleza más divina que él; por ejemplo, los elementos más esplendorosos y brillantes de que se compone el mundo"[57]. Estos elementos son los astros, a los que Aristóteles no duda en llamar "dioses"[58].

Con este paradigma a la vista pueden conciliarse las afirmaciones anteriormente expuestas de que la sustancia es algo individual; de que de lo individual no hay definición ni demostración; y de que sólo la sustancia tiene definición. En efecto, "si se encontrasen -dice Rodier-[59] cosas individuales de las que quedase excluida toda contingencia, éstas constituirían objeto de ciencia. Pues bien, las hay; son los astros".

Elegido el paradigma, pueden venir ahora las distinciones en el plano abstracto. Aristóteles distingue tres tipos de sustancias: 1) Sustancias sensibles y corruptibles: el mundo de la generación y de la corrupción. 2) Sustancias sensibles pero incorruptibles: los astros. Los astros son, como las sustancias corpóreas, finitos y, por lo tanto, no podrían explicar la eternidad del mundo. 3) Sustancias no sensibles e incorruptibles: el acto

---

[52] *Metafísica*, Γ, 5, 1010 a, 25.
[53] *Segundos Analíticos*, I, 11, comienzo.
[54] *Metafísica*, Z, 3, 1029 a.
[55] *Metafísica*, Λ, 8, 1073 a.
[56] *Sobre el cosmos*, 2, 391 b.
[57] *Etica a Nicómaco*, VI, 7, 1141 b.
[58] *Metafísica*, Λ, 8, 1074 a.
[59] *Etudes de Philosophie grecque*, Vrin, Paris, 1969, p. 172.

puro. Este no tiene corporeidad y, por lo tanto, tampoco potencia; es el primer motor y deberá ser eterno, ya que organiza eternamente el mundo que es plural pero unitario. (Unidad, no lógica, sino analógica, que es, en cuanto tal, principio de diferenciación). El mundo es movido por el primer motor, pero éste no conoce el mundo. El es νόησις νοήσεως: Idea límite, porque un pensamiento que no tiene objetos no es pensamiento. Esta Idea límite es la idea de sustancia de Aristóteles, la sustancia eterna e inmutable, pero principio de todo movimiento. Esta idea está aludiendo, no a algo que tenga que ver con el espíritu subjetivo, sino que hace referencia al espíritu objetivo. Son las formaciones objetivas envolventes, las materialidades terciogenéricas que constituyen la condición de las demás. "Es necesario que exista una sustancia eterna e inmutable... y en acto"[60]. Mas ¿de qué tipo de necesidad se trata aquí? Evidentemente de una necesidad ontológica, en el sentido de que todo lo real ha de estar enmarcado en el esquema ontológico de la sustancia y de la esencia, que no están más allá de las realidades del mundo[61], sino que son la condición misma de estas realidades. Por ese motivo, este esquema ontológico no es en modo alguno "metafísico", sino estrictamente físico. El sol solamente se configura como astro central de nuestro sistema en tanto se nos da por la mediación del esquema de identidad sustancial; el centro de un cuadrado que experimenta transformaciones sometidas a las reglas de la estructura de grupo realiza como invariante el esquema de la sustancia. Si este esquema ontológico no constituyese los objetos del mundo distribuidos en las más heterogéneas categorías, el mundo desaparecería. Al ser en cada instante distintas las cosas que nos rodean, así como las personas con las que convivimos, nuestra conciencia se desintegraría. Mas por otro lado el esquema ontológico de la sustancia es un esquema de identidad y, en cuanto tal, un esquema lógico, perteneciente a la lógica trascendental en cuanto representa funciones al margan de las cuales la realidad desaparece.

3. Las proposiciones

Aristóteles dedica un tratado completo al estudio de las proposiciones: el *De Interpretatione*, que en el orden estructural del *Organon* "ortodoxo" sigue a las *Categorías* (donde se trata de los términos que componen la proposición), y es seguido por los *Analíticos* (donde se trata de los silogismos, cuyos componentes son las proposiciones). La crítica histórica da por sentado que el *De Interpretatione* es una obra de madurez bien trabada y formando una unidad, a excepción del cap. 14, que probablemente constituía originariamente un tratado aparte.

Formalmente, el *De Interpretatione* se compone de las siguientes partes:

Parte I (caps. 1-4), en la que Aristóteles introduce una serie de nociones (nombre, verbo, oración, oración enunciativa) extraídas, en buena parte, de su teoría lingüística.

Parte II (caps. 5-11), forma ésta el núcleo de la obra; en ella se trata de los distintos tipos de proposiciones, de sus propiedades lógicas y de sus relaciones de oposición.

Parte III (caps. 12-13), que trata de las proposiciones modales y de sus relaciones de oposición y de consecuencia.

Parte IV (cap. 14), dedicada al estudio de las relaciones de contrariedad entre las proposiciones.

En la Parte I encontramos, aunque muy sintetizada, perfectamente definida la teoría del lenguaje de Aristóteles. La filosofía del lenguaje entre los griegos se polariza en torno a dos temas principales: a) sobre el origen y naturaleza del lenguaje, y b) sobre el sistematismo del lenguaje.

Respecto del primer tema (aunque las cuestiones pueden presentarse, y de hecho a veces se presentaron, por separado) el problema fue generalmente planteado entre los griegos como la determinación de la relación entre los nombres y las cosas en cuanto significadas. Las dos respuestas más significativas a este problema son: el naturalismo y el convencionalismo.

Respecto del segundo tema (sistematismo) se plantea una doble cuestión: a) ¿tiene, o no, el griego (a diferencia del bárbaro) un sistematismo? Y en el supuesto de una respuesta afirmativa, b) ¿es ese sistematismo un sistematismo racional o tiene otra estructura, por ejemplo patética (de πάθος). Las dos principales respuestas son: el analogismo y el anomalismo.

Pues bien, Aristóteles se alinea con los convencionalistas ante el primer problema, y con los analogistas frente al segundo.

---

[60] *Metafísica*, Λ, 6, 1071 b.

[61] Véase G. Bueno: *Ensayos Materialistas*, Taurus, Madrid, 1972, p. 53: "Porque, en cierto modo, lo que hemos llamado antes "metafísica" puede, en gran parte, redefinirse como *la transposición de las propiedades y categorías del mundo, entendido como unidad, a la materia*; como la invasión de la ontología general por la ontología especial... El propio "acto puro" aristotélico, al ser representado como "pensamiento del pensamiento", resulta ser, en parte, un concepto intramundano, por cuanto la conciencia o el pensamiento son puramente mundanos; un concepto de la ontología especial, que reclama, sin embargo, ser identificado con el Ser ontológico-general, definido como el *Ser por esencia*".

Los analogistas defendían que el lenguaje no se producía al azar, sino que obedecía a un sistematismo interno de tipo analógico. La relación analógica supone el lenguaje como un campo de términos estructurado de forma cerrada, en el que cada elemento viene definido por las relaciones que mantiene con los demás. La construcción gramatical tiene lugar mediante paradigmas analógicos, que sirven de pauta a las operaciones efectivas de los hablantes.

Los paradigmas analógicos que rigen las construcciones lingüísticas se fundan en una relación matemática: la igualdad entre dos razones (proporción). "Por relación de analogía -dice Aristóteles-[62] entiendo todos los casos en donde el segundo término es al primero como el cuarto al tercero, lo que permitirá al poeta emplear el cuarto en lugar del segundo y el segundo en lugar del cuarto". Así, dada la proporción

$$\frac{\text{Dionisos}}{\text{Copa}} \qquad \frac{\text{Ares}}{\text{Escudo}}$$

se puede despejar el segundo término y decir que la copa es "el escudo de Dionisos", o bien, despejando el cuarto, que el escudo es "la copa de Ares", procedimiento éste mediante el cual se transfiere a un objeto el nombre que designa otro objeto, produciéndose, así, la figura metafórica.

El paradigma analógico es una figura compleja y sintética, resultante de varias operaciones y relaciones entre los elementos componentes. Las relaciones verticales -Dionisos/Copa; Ares/Escudo- son relaciones de contigüidad; en tanto que las horizontales -Dionisos/Ares; Copa/Escudo- son relaciones de semejanza. El sistema analógico exige, además, la "superposición" de dos campos semánticos, mediante la identificación de dos semas y la sustitución de uno de los términos por el otro, ya que sin esta última operación obtendríamos una comparación, no una metáfora. La auténtica metáfora es para Aristóteles precisamente la metáfora por analogía, entendida siempre ésta como "analogía de proporcionalidad", sin que aparezca en su obra la otra especie distinguida por los escolásticos: "analogía de atribución"[63].

La proporcionalidad aparece, entonces, como el principio y guía en el razonamiento y en la conducta lingüística. Y esta doctrina de la proporcionalidad está en consonancia con la tesis aristotélica según la cual el lenguaje es por convención.

El lenguaje es definido por Aristóteles como símbolo (σύμβολον), en cuanto elemento lingüístico convencional: "el nombre (ὄνομα) es un sonido vocal significativo por convención... porque ningún nombre lo es por naturaleza"[64]. La relación entre nombres y cosas, que para los naturalistas (para Platón, por ejemplo) es directa, deviene una relación de segundo orden para Aristóteles. Distingue éste tres niveles:

1) los sonidos vocales (τὰ ἐν τῇ φωνῇ)
2) las afecciones del alma (τὰ παθήματα τῆς ψυχῆς)
3) las cosas reales (τὰ πράγματα)

De manera que la relación de 1 con 3 deviene indirecta, a través de 2, siendo 1 símbolos de 2, y 2 imágenes (ὁμοιώματα) de 3.

El nombre es tal, cuando se convierte en símbolo, y ello sucede cuando es un sonido vocal (φωνὴ) escribible (γραμματόν), en contraposición a los ruidos (ψόφοι), como los de las bestias, que no son escribibles (ἀγράμματοι). Estos últimos son, ciertamente, indicios, en el sentido de Peirce, porque indican algo (δηλοῦσί γέ τι), pero no son símbolos. Para ser tales, han de someterse a los esquemas analógicos. Dicho con terminología de Saussure, han de someterse a relaciones sintagmáticas (relaciones de contigüidad): contrastar en el discurso, y a relaciones paradigmáticas (relaciones de semejanza): oponerse en el sistema. El convencionalismo del símbolo reside en la posibilidad de entrar, o no, esos ruidos en el sistema del griego. Aristóteles -a diferencia de los estoicos de la primera escuela, que eran bilingües- propendía a contemplar dicho sistema como único. El término "bárbaro" era empleado por los griegos para designar, tanto al que no sabía hablar, el que sólo sabía decir "bar", "bar"[65], como al que hablaba otro idioma distinto del griego[66]. Cuando Aristóteles defiende el sistematismo analógico del lenguaje está pensando en el griego en cuanto un estado de lengua dado en el corpus homérico y, por consiguiente, finito.

El disponer de un estado concreto de esa lengua favorece y permite la creación de modelos regulares (modelos analógicos) y describir (gramática descriptiva) o corregir (gramática prescriptiva) cualquier uso anómalo del lenguaje. De ahí que los alejandrinos, entre los que cabe destacar a Aristarco de Samotracia, de-

---

[62] *Poética*, 21, 1457 b, 16 ss.
[63] *Confert*, P. Aubenque, *El problema del ser en Aristóteles*. Trad. Vidal Peña. Taurus, Madrid, 1974, p. 198.
[64] *De Interpr.*, I, 16 a, 19 y 26-27.
[65] Platón, *Teeteto*, 175 B: βαρβαριζειν significa decir cosas incomprensibles.
[66] S. Pablo, *Corintios*, I, 14, 11: "Si no capto el sentido de las palabras, seré bárbaro para quien me habla, y éste será bárbaro para mí".

dicados a la crítica literaria (al corpus de textos griegos), fuesen los paladines decididos del analogismo.

En los capítulos 2 y 3 de *De Interpr.* estudia Aristóteles el nombre y el verbo en tanto que constituyen las partes de la oración, ya que antes de acometer el estudio de las proposiciones, es preciso -dice- establecer las definiciones de los elementos que la componen.

El nombre y el verbo son las unidades mínimas significativas, ninguna de sus partes significa nada por separado. El verbo posee, además, la propiedad -que no tiene el nombre- de "cosignificar tiempo". Cosignificar tiempo, a diferencia de significar tiempo -lo cual también pueden hacer algunos nombres; por ejemplo, "día", "hora", etc.- quiere decir que a la cosa significada añade siempre el tiempo en que ella ocurre. Así, por ejemplo, "paseará" significa el "paseo" que ocurrirá después; y "pasea" significa el "paseo" que ocurre ahora.

La oración (λόγος) exige -según Aristóteles- dos términos (o componentes), ya que un término solo -nombre o verbo- no es más que mera locución (φάσις), que ciertamente posee un significado, pero que no constituye una oración. Así, por ejemplo, "hombre" significa ciertamente algo, pero no que es o que no es. Aristóteles precisa aún más: pueden darse expresiones que no comportan verbo, como, por ejemplo, cuando para definir el hombre se emplea la expresión "animal bípedo implume". Pero el verbo es necesario para que haya una auténtica oración enunciativa (λόγος ἀποφαντικός).

Es el mismo Aristóteles quien señala inmediatamente que no toda oración (λόγος) es enunciativa (ἀ–ποφαντικός), es decir, portadora de una aseveración, y en cuanto tal verdadera o falsa. Pero Aristóteles deja de lado los restantes tipos de oraciones, tales como preguntas, ruegos, etc. para dedicar su atención a las enunciativas, y, por consiguiente, la teoría sobre las proposiciones tiene como referencia este tipo: las oraciones enunciativas:

> "Y no todas [las oraciones] son enunciativas, sino aquellas a las que pertenece la verdad o la falsedad; pues no pertenece a todas. Por ejemplo, una súplica es ciertamente una oración, pero no es ni verdadera ni falsa. Dejemos a un lado los restantes tipos de oraciones, puesto que su examen es más propio de la retórica o de la poética. De las enunciativas trata la presente teoría"[67].

La noción de "oración enunciativa", como portadora de verdad o falsedad viene a coincidir con la moderna noción de "proposición", por lo que ambos términos pueden tomarse como sinónimos.

Como se ha indicado, una proposición comprende dos términos. Y términos son los nombres -tanto lo que gramaticalmente se entiende por nombre común o propio como por adjetivo- y los verbos. Ahora bien, el verbo ha de intervenir necesariamente en la proposición: "Toda oración enunciativa consta necesariamente de un verbo o de una flexión de verbo"[68]. Según esto, serán proposiciones las locuciones como "Sócrates es" "Dión pasea" etc. En ambos ejs. aparecen dos términos y uno de los cuales es verbo, cumpliendo así el requisito exigido.

Sin embargo, cualquier lector de Aristóteles, podrá percatarse de que este tipo de proposiciones, no aparece en la lógica aristotélica, especialmente a partir de los *Analíticos*, es decir, en su teoría sobre el silogismo.

Ambos ejs. constituyen un tipo de proposiciones (véase luego clasificación de las proposiciones) llamadas de *secundo adiacente* o *secundi adiacentis*, frente a otro tipo tales como "Sócrates es justo" o "el hombre es mortal" llamadas *de tertio adiacente*. Pero, además, dentro del primer tipo los dos ejs. citados no poseen el mismo estatus. El segundo ejemplo -"Dión pasea"- a diferencia del primero -"Sócrates es"- es fácilmente convertible en otra proposición perteneciente al grupo de las *de tertio adiacente:* "pues en nada se diferencia decir que un hombre pasea de decir que un hombre es paseante"[69].

Mas ¿Qué sucede cuando no aparece el atributo en la proposición? O más concretamente ¿Cómo interpretar, según el esquema de la proposición atributiva la proposición ἔστιν ἄνθρωπος?[70] Podría decirse que cabe el mismo procedimiento que aplicamos a la proposición "un hombre pasea" (="un hombre es paseante"); así "un hombre es" sería la misma proposición que "un hombre es existente". En cualquier caso, se efectúe o no la transformación, las proposiciones del tipo reseñado constituyen un caso límite de las proposiciones atributivas, precisamente aquellas proposiciones en las que el predicado tiene valor cero, no porque represente la nada absoluta, sino porque representa el elemento neutro, porque su contenido semántico es tal que al funcionar como predicado, por una parte, absorbería al sujeto en su propia función de tal, mientras que, por otra parte, al no quedar determinado en alguna de las categorías, pierde su valor, y, no porque no determine nada, sino porque lo determina todo. Aquí estriba la crítica a la concepción del ser como predicado. Para que haya predicación el sujeto ya debe ser; por lo tanto, predicar el ser es suponer que el sujeto no era, lo cual es absurdo. Por eso el verbo

---

[67] *De Interpret.* 4, 17 a, 3-7.
[68] *De Interpret.* 5, 17 a, 10.
[69] *De Interpret.* 12, 21 b, 9.
[70] *De Interpret.* 10, 19 b, 15.

ser en sus funciones verbales funciona en la lengua griega ante todo como cópula. Separado del atributo pierde su significación, por cuanto que no tiene existencia distinta. El verbo ser en la proposición no significa ninguna cosa real (τὸ πρᾶγμα); constituye, más bien, una relación formal susceptible de varias interpretaciones, como luego veremos.

En consecuencia, quedan como prototipo de proposiciones aristotélicas las denominadas de *tertio adiacente*, como "un hombre es justo" o "Sócrates es blanco". Son éstas las oraciones enunciativas simples: "La proposición simple es un sonido vocal significativo acerca de si algo se atribuye (ὑπάρχει) o no se atribuye, según las divisiones del tiempo" *(De Interpret.* 5, 17 a, 24-25), el ὑπάρχει marca el atributo, no la proposición entera. Se dice, así, que "blanco" se atribuye (ὑπάρχει), o no, a "hombre". No tienen aquí cabida las proposiciones de tipo fregeano, por ej. "es el caso que p". Bastaría traducir el ὑπάρχει, no en su forma -relativa al atributo- sino en forma absoluta: "acerca de si algo se da o no se da" o bien "... acerca de si algo es el caso o no es el caso". Entraríamos así en una lógica de proposiciones -"es el caso que p" en donde "p" puede ser sustituida con pleno sentido por un enunciado como por ej. "Dión pasea"- abandonando la lógica de términos. Pero el texto que sigue a continuación del citado no deja dudas al respecto: Las proposiciones se dividen en afirmaciones y negaciones.

En cada uno de ambos tipos, están presentes los dos elementos de la proposición atributiva -el sujeto y el predicado-: κατάφασις δέ ἐστιν ἀπόφασις τινός κατὰ τινός, en donde la primera ocurrencia de τινός hace referencia al predicado y la segunda, al sujeto. Sujeto y predicado constituyen los términos de la proposición atributiva. Sin estos componentes (ἄνευ τῶν συγκειμένων) la función copulativa, es decir, la síntesis no tiene ningún sentido, "no puede concebirse".

La división de la proposición en sujeto-predicado, corresponde a la división metafísica sustancia-accidente. El sujeto, como la sustancia, es la realidad por excelencia, lo que es *per se* capaz de recibir determinaciones cualitativas, como afirmación/negación, o cuantitativas, como universal/particular: el sujeto recibe los atributos; la sustancia los accidentes. La estrecha similitud entre los conceptos "atributo" y "accidente" viene señalada en el libro I de la Física. Para designar el atributo emplea Aristóteles, a la vez, el término gramatical κατηγορούμενον (I, 6, 189 a 32) y el término metafísico συμβεβηκός (I, 3, 186 a 34).

El Sujeto (ὑποκείμενον)

Distingue Aristóteles el sujeto *puro*, -el que no puede ser más que sujeto en el lenguaje natural, como por ej. "Sócrates" en "Sócrates es justo"- del sujeto *último* -aquél que puede funcionar, a su vez, como atributo en otra proposición, por ej. "animal" que funciona como sujeto en "un animal es mortal" y como atributo en "un hombre es animal". Esta distinción se corresponde con la distinción en el plano ontológico entre sustancias *primeras* -las cosas individuales, como Sócrates, Bucéfalo, Calías- y sustancias *segundas* -definiciones abstractas, como las que señalan el género, la diferencia o la especie.

El predicado o atributo (κατηγορούμενον)

En nuestra discusión los tomamos como sinónimos: Puede ser distinguido de la cópula o bien comprenderla formando un todo. El atributo es el que determina, el que marca la verdad o la falsedad. El verbo "pasea", por ejemplo, y su equivalencia "es paseante". "Siempre es un signo de lo que se atribuye, esto es, de lo que se atribuye a un sujeto"[71] y la verdad consiste en atribuir al sujeto lo que se le atribuye; en tanto que la falsedad consiste en atribuirle lo que no se le atribuye.

El concepto de verdad, aquí mencionado, es el correspondiente al de "verdad-relación", frente al concepto de "verdad-correspondencia" -verdad como adecuación o isomorfismo (ὁμοίωσις)- apuntando por Aristóteles en *Metafísica* Γ, 7, 1011 b, 26-27: "Es falso decir de lo que es que no es o de lo que no es que es, y verdadero decir de lo que es que es o de lo que no es que no es".

El concepto de "verdad-correspondencia" lo toma Aristóteles de Platón. Este en el *Teeteto*, 188 E-189 A y más detalladamente en el *Sofista*, 240 D y 260 C-263 D compara el pensamiento con el habla (es el diálogo del alma consigo misma), y el habla para que sea verdadera o falsa ha de ser compleja: sólo los enunciados completos -los enunciados que constan de nombres y verbos- son verdaderos o falsos. Por ejemplo, "Teeteto está sentado" y "Teeteto vuela". El primero de ellos es verdadero, porque Teeteto está sentado, en tanto que el segundo es falso, porque Teeteto no vuela.

Este concepto de verdad retomado por Aristóteles ha quedado profundamente arraigado en la historia de la lógica. En la Edad Media Sto.Tomás lo formula como sigue: *"adaequatio intellectus et rei, secundum quod in-*

---

71 *De Interpret.*, 3, 16 b, 10.

tellectus dicit esse quod est, et non esse quod non est"[72]. La verdad es entendida como una cualidad de las proposiciones o de los pensamientos -concepto no lógico, sino epistemológico o metafísico de verdad. Modernamente, aunque con otra formulación diferente esta concepción es propugnada por Wittgenstein (Véase *infra):* Las proposiciones se refieren a hechos. El hecho está compuesto de objetos y los objetos son independientes unos de otros. Los objetos componen la estructura del hecho y la figura del hecho es la proposición. La proposición es verdadera cuando es verdadera figura del hecho.

Pero la formulación más conocida de lo que venimos denominando "verdad-correspondencia" se debe a A. Tarski[73]. Distingue Tarski varios niveles del lenguaje: Lenguaje objeto (primer nivel), metalenguaje (segundo), metametalenguaje (tercero), etc. Se hace preciso indicar en qué lenguaje se dice de una proposición que es verdadera. Empleando el lenguaje objeto tal cual y el metalenguaje acotado por comillas, podemos formular el concepto semántico de verdad mediante el bicondicional siguiente: "p" es verdadero si y sólo si p. Por ejemplo, "la nieve es blanca" si y sólo si la nieve es blanca.

En general, la dificultad mayor que plantea esta concepción de la verdad es la separación de dos planos que se dan por establecidos: separación entre el plano proposicional y el plano objetual. Estos dos planos son establecidos de forma explícita por Aristóteles en el Capítulo I de *De Interpretatione.*

Mas es también Aristóteles quien sienta las bases para el concepto de "verdad-relación". Y es preciso no confundir ambos conceptos, si bien dicha confusión se encuentra en el mismo Aristóteles. De esta confusión resulta la dificultad que entraña el capítulo IX de *De Interpretatione* sobre los futuros contingentes. Si el concepto de verdad que allí se maneja es el de "verdad-correspondencia" -y hay razones en favor de tal suposición, "puesto que similarmente (ὁμοίως) las oraciones son verdaderas según sean las cosas reales" (19 a, 33)- entonces Aristóteles erró, como dicen W. y M. Kneale[74], al tratar de hacer valer la ley de tercero excluido al tiempo que rechaza el principio de bivalencia. Pero el concepto de "verdad-relación" aparece explícito a través de las cópulas ὑπάρχει y κατηγορεῖται: en el cap. IX (18 a, 39-18 b, 3) así como en varios otros (11, 20 b, 31-40; 21 a, 12, 31-33). La verdad y la falsedad de las proposiciones no viene ahora determinada por la realidad, sino que es función de la relación compositiva establecida por la cópula, "pues lo falso y lo verdadero está en relación con la composición (σύνθεσιν) y la separación (διαίρεσιν)"[75]. La proposición constituye una síntesis que exige al menos dos términos, uno de los cuales sea verbo. Los términos por separado no son ni verdaderos ni falsos, y es el "es" o el "no es" lo que constituye esa síntesis que, por otra parte, no es nada sin los componentes -sujeto y predicado-[76]. El "es" constituye aquí una relación formal entre el sujeto y el predicado. La verdad o la falsedad, como la afirmación o la negación son determinaciones del sujeto por su relación con el predicado, siendo posible, según esto[77], las cuatro combinaciones siguientes:

a) Atribuir a un sujeto lo que no se le atribuye (Afirmación falsa), por ejemplo, "lo blanco es no-blanco").
b) Atribuir a un sujeto lo que se atribuye (Afirmación verdadera), por ejemplo, "lo blanco es blanco".
c) No atribuir a un sujeto lo no se le atribuye (Negación verdadera, por ejemplo, "lo blanco no es no-blanco").
d) No atribuir a un sujeto lo que se le atribuye (Negación falsa, por ejemplo, "lo blanco no es blanco").

Aquí el sujeto funciona como un sustrato, como una sustancia, que recibe una serie de cualificaciones, entre ellas la verdad o la falsedad que son funciones del predicado.

División de los predicados o atributos

Los atributos pueden ser *per se* y *per accidens*. División ésta que se corresponde con el esquema ontológico empleado por Aristóteles para establecer los modos de ser[78]. La distinción primera que corta todas las demás es:

I) El Ser *per accidens* (κατὰ συμβεβηκός) y

II) ser *per se* (καθ' αὐτό).

I) El ser se dice *per accidens* de tres maneras:

---

[72] *Summa contra Gentiles,* Lib. I, c. 17.
[73] "The concept of truth in formalizad languages", en *Logic, Semantics Metamathematics,* Clarendon, Oxford, 1956, pp. 152-278.
[74] *The development of logic.* Trad. cast., Tecnos, Madrid, 1972, p. 45.
[75] *De Interpretatione,* 1, 16 a, 12.
[76] *De Interpretatione,* 3, 16b, 24.
[77] *De Interpretatione,* 6, 17 a, 26-30.
[78] *Metafísica* Δ, 6, 1017 a.

a) Cuando los dos términos relacionados por el "es" son accidentes de un mismo sujeto; por ej. "el justo es músico".
b) Cuando el predicado es un accidente del sujeto; por ej. "el hombre es músico".
c) Cuando el sujeto es un accidente del predicado; por ej. "el músico es un hombre".

II) El ser *per se:* los tipos de ser esencial responden a las formas de designación, es decir, a las categorías.

El ser *per accidens* o lo que es lo mismo, la atribución *per accidens* constituye meramente una conexión temporal entre el sujeto y el atributo. La atribución *per se*, en cambio, establece una conexión necesaria. Existen cuatro clases de proposiciones que exhiben esta conexión necesaria, según que lo predicado del sujeto sea: a) su definición; b) su género; c) su diferencia; y d) su propiedad.

La clasificación de los predicados no se atiene, pues, a criterios formales, sino que exige la consideración ontológica. Se apoya en dos distinciones: La que se da entre predicación necesaria y no-necesaria, por una parte, y entre predicación convertible y no-convertible, por otra.

Los silogismos aristotélicos exigen proposiciones cuyo tipo de predicación sea la atribución *per se*. Y esto por la sencilla razón de que la lógica, como la ciencia, es de lo necesario; por lo tanto, las proposiciones que intervienen en el silogismo han de constituir tipos de atribución necesaria.

Por lo que respecta a la distinción entre predicables convertibles y no-convertibles, resultan convertibles, es decir, de "X es Y" se puede pasar a "Y es X", cuando el atributo constituye la definición o la propiedad del sujeto. No son convertibles cuando el atributo constituye el género o la diferencia del sujeto.

A finales del s. III Porfirio en su *Isagogé* añade a los cuatro predicables señalados por Aristóteles en *Tópicos*, I, 4, y 5 un quinto predicable: la *especie*, y retrotrae la definición a la diferencia. Esta teoría llamada posteriormente de las *quinque voces* -género, especie, diferencia, propiedad y accidente- se convertirá en una de las bases de la enseñanza de la lógica en la Edad Media. Pero el criterio porfiriano en el establecimiento de los predicables difiere bastante del aristotélico.

Para Porfirio las diferencias auténticas son aquéllas que permiten distinguir las especies dentro de un género. La definición se hace a través del género próximo y la diferencia específica. Esto permite definir la definición y, por tanto, eliminarla de la lista de los predicables.

Por lo que respecta al predicable *especie*, Porfirio no sigue a Aristóteles. La silogística aristotélica exige proposiciones cuyo sujeto es un término conceptual, esto es, un término que pueda funcionar también como atributo, en cuyo caso el sujeto es ya una especie y, por lo tanto, basta con el predicable género. Porfirio, en cambio, toma en consideración las proposiciones singulares, es decir, aquéllas cuyo sujeto es un individuo y que no puede ponerse en relación directa con un género, sino con una especie. Por lo tanto, es preciso que la especie figure entre los predicables.

Finalmente, la divergencia fundamental entre la doctrina porfiriana y la aristotélica se basa en la interpretación sobre la lógica. Al hablar de predicados, Porfirio piensa en clases, individuos y relaciones de inclusión o de permanencia. El género engloba (περιέχει) a la especie e igualmente la especie al individuo. Esta jerarquía de inclusión, de unas clases en otras, es la que se representa mediante el así llamado *árbol de Porfirio*.

La Cópula

La cópula o verbo (ῥῆμα) es el elemento esencial de la proposicón ya que "sin verbo no hay ni afirmación ni negación"[79]. 12). La cópula es el elemento unificador; la *forma* frente al sujeto y el predicado que constituyen la *materia*. Generalmente, aparece en Aristoteles sobre todo como "tercer elemento" de la proposición junto con el sujeto y el predicado, formando las proposiciones *de tertio adiacente* como, por ej., "un hombre es justo", en la que la cópula "es" forma el *tertium adiacens*, pero que se une, no al sujeto, sino al predicado. Separado del atributo pierde su significación, por cuanto que no tiene existencia distinta. El verbo ser en la proposición no significa ninguna cosa real (τὸ πρᾶγμα); constituye, más bien, una relación formal de identidad interpretable según los casos por "=", "⊂", "∈", "→".

Cuando el "es" forma el tercer elemento de la proposición, puede ser considerado -según Aristóteles-[80] como nombre o como verbo. En realidad, ese *tertium adiacens* no es ni nombre ni verbo. Puede, no obstante, ser considerado como nombre en tanto que es una φάσις y cualquier φάσις es un nombre; le falta, en cambio, la significación. Por otro lado, puede ser considerado como verbo, ya que marca el tiempo, pero en cambio, no es un signo de lo que se dice del sujeto. El ser, pues, desempeña en este tipo de proposiciones

[79] *De Interpret.*, 19 b, 14.
[80] *De Interpret.* 10, 19 b, 21.

la función copulativa, función que no se agota en servir de nexo entre los términos sujeto-predicado.

En "un hombre es animal" el "es" fuciona como cópula compositiva y selectiva, está desconectado "hombre" de otros posibles términos, con lo cual la función copulativa se nos revela asociada con una función selectiva que aproxima el *verbum abstractum* a un verbo activo.

3. 1. Interpretación extensional/ intensional de la proposición

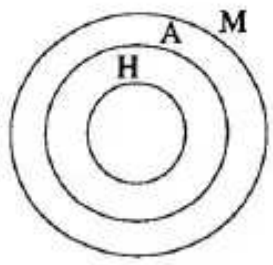
La proposición aristotélica es suceptible de ser interpretada desde el punto de vista extensional y desde el punto de vista intensional. Los investigadores quedan divididos. Son extensionalistas los escolásticos posttomistas seguidos por Leibniz, Euler, Hamilton. En general la nueva lógica, a partir de Boole, se desarrolla a partir de la perspectiva extensional, es decir, a partir de totalidades distributivas. La representación gráfica de la extensión de los términos se divulga en los tratados de lógica a partir de Euler (S. XVIII) y, posteriormente, según los diagramas de Venn, que se inspira en el cálculo de Boole y representa la lógica de clases reducida a una lógica distributiva con entidades geométricas.

Defienden la interpretación intensional, generalmente los filósofos. Especialmente en Francia, a finales del S. XIX, como reacción a la nueva lógica, propugnan una lógica intensional, Lachelier, Rodier, Rabier y Hamelin.

Cada una de estas interpretaciones se apoya en ciertos textos a los que se adapta perfectamente, pero que resulta artificial y forzada cuando se pretende proyectarla sobre todos los demás.

Interpretación extensional

Desde esta perspectiva la proposición comporta una subordinación en el orden de la extensión: es una comparación de clases de individuos que poseen unas determinadas notas, y no una comparación de las notas en sí mismas. La formulación del silogismo, según esta perspectiva, sería la siguiente: "Mortal es atribuido a todo animal; animal es atribuido a todo hombre; mortal es atribuido a todo hombre", cuya representación gráfica apelando a diagramas que representan clases es:



M = Mortal
A = Animal
H = Hombre

Los términos son clases. La proposición "Todo animal es mortal" quiere decir, interpretada de una forma extensional, que la clase de los animales "A" está incluida en la clase de los mortales "M"; esto es "A ⊂ M", en donde la cópula "es" constituye la relación formal de inclusión "⊂".

Como han reconocido los lógicos modernos y como Aristóteles tuvo el mérito de presentir, una lógica formal no puede desarrollarse más que sobre el terreno de la extensión. En el silogismo el término medio consigue su oficio de mediador en virtud precisamente de que su extensión es media entre los dos extremos. Es por ello por lo que a los ojos de Aristóteles sólo la primera figura del silogismo, y más en concreto el modo primero de la primera figura, constituye un silogismo perfecto, ya que es aquí donde el término medio lo es, tanto por su posición (θέσις) como por su relación (σχέσις), con los extremos. Es la propiedad de contener un término y de estar contenido en otro lo que posibilita al término medio la función mediadora entre las dos proposiciones que componen las premisas.

Interpretación intensional

Desde la perspectiva intensional, la proposición y el silogismo aristotélicos consisten en una subordinación de conceptos. Lo que se compara y se clasifica ahora son totalidades atributivas, los conceptos, y no las clases de individuos. El todo no aparece como un todo colectivo, sino atributivo. La formulación del silogismo anterior sería "Mortal está contenido en animal; animal está contenido en hombre; mortal está contenido en hombre".

Aquí no es la comparación de las clases y de los individuos que poseen las notas en cuestión, sino la comparación de las notas en sí mismas, lo que permite y justifica el razonamiento. Decir que todo animal es mortal significa, en esta perspectiva, no que la clase de los animales está incluida en la de los mortales, sino que el concepto "animal" comprehende entre sus determinaciones el concepto "mortal". Desde el punto de vista de las totalidades atributivas, "mortal", en tanto que concepto, entra en el concepto "animal"; el concepto "animal" designa, no un conjunto de individuos, sino una naturaleza, una totalidad de caracteres que lo componen.

El punto de vista intensional lo adopta Aristóteles en su teoría de la proposición. Esta queda reducida, como hemos visto, a su forma atributiva y se interpreta:

a) En el caso de las proposiciones singulares como, por ej., "Sócrates es blanco", como enunciando la inherencia de un atributo a un sujeto individual.

b) En el caso de las proposiciones cuyo sujeto es un término universal, como, por ej., "un hombre es blanco", como la relación de implicación entre dos conceptos.

El empleo de "es" como cópula podría, en principio, permitir una interpretación extensional, en el sentido de interpretar el predicado como una clase y el "es" como signo de pertenencia ∈ (inicial precisamente del verbo ἐστιν). Pero Aristóteles se sirve de la cópula "es" en los ejemplos concretos y claros, como en los que acabamos de mencionar. En cambio, en los casos más técnicos, precisamente cuando reduce sistemáticamente los silogismos con sus términos concretos a su esquema abstracto, en el que los términos son sustituídos por variables literales, Aristóteles emplea cópulas que exigen claramente una interpretación intensional. Tal es el caso de las partículas ὑπάρχει y κατηγορεῖται. Por ej., "Si A se predica (κατηγορεῖται) de todo B y B se predica de todo C, entonces necesariamente A se predica de todo C"[81]. Y "supongamos, por ej., que A significa animal; B, respirar, y C, pared. Entonces, A se atribuye (ὑπάρχει) a todo B (porque todo lo que respira es animal), pero no se atribuye a ningún C; por consiguiente, B no se atribuye a ningún C: luego la pared no respira"[82].

En estos ejemplos, decir que "A" "se predica" o "se atribuye" o "pertenece" a "B" es expresarse desde el punto de vista intensional; mediante dichas cópulas se señala el envolvimiento del predicado en el sujeto. Tal es el sentido del término en ὑπάρχει. El todo es el sujeto, pero un todo atributivo del que forma parte atributiva el predicado. El sujeto es la materia lógica del predicado, el cual informa al primero: *"subiectum se habet materialiter, praedicatum se habet formaliter"*[83]. El predicado deberá, pues, ser entendido como un atributo, según una u otra de las categorías de la predicación; en ese caso el sujeto desaparece, de forma que la proposición categórica -"Todo A es B"- se convierte en una proposición hipotética (Si x posee el atributo "A", entonces posee el atributo "B"), en donde el sujeto de la proposición categórica deja de ser el verdadero sujeto para convertirse también en un atributo. El sujeto es así el soporte (ὑποκείμενον) de las cualidades -la sustancia- la cual queda, a su vez en este caso, identificada por Aristóteles con la materia.

3. 2. Clasificación de las proposiciones

Como se ha indicado más arriba, la primera distinción de Aristóteles a propósito de las oraciones es:

a) Oración enunciativa (λόγος ἀποφαντικός): "Aquella a la que pertenece la verdad o la falsedad". Por ej., "Sócrates es justo".

b) Oración no enunciativa, como por ej., una súplica.

Es a las oraciones enunciativas a las que se atiene la doctrina aristotélica. A ellas las hemos denominado proposiciones, y sobre ellas recaen las clasificaciones que siguen.

Por razón de la cualidad de cópula

Desde el punto de vista de la cualidad la proposición (ἀπόφανσις) se divide en:

a) *Afirmación* (ἀπόφασις): Aquella en la que el predicado es afirmado del sujeto, como, por ej., "un hombre es justo".

b) *Negación* (κατάφασις): Aquella en la que el predicado es negado del sujeto, como, por ej., "un hombre no es justo".

Hay que hacer notar que una proposición es afirmativa o negativa en virtud de la cópula: "es" y "no es". De ahí que no tengan aquí cabida un tercer tipo de proposiciones tales como "un hombre es no-justo", tipo que entra en la división kantiana bajo el nombre de "proposiciones indefinidas". Aristóteles conoce y discute este tipo de proposiciones, en las que el predicado es expresado mediante un nombre indefinido (ἀόριστον ὄνομα) pero entonces es sobre el predicado sobre el que recae la negación, no sobre la proposición. En una proposición es la cópula y no uno de los términos lo que determina la cualidad.

Por razón de la cantidad del sujeto

Por respecto de la cantidad o extensión del sujeto Aristóteles presenta dos clasificaciones diferentes. La primera, en *De Interpretatione*, consta de dos divisiones:

a) Proposiciones *universales:* "Cuando se enuncia que algo se atribuye o no a un universal"[84]. Es decir, proposiciones cuyo sujeto es un término universal, como, por ej., "Un hombre es justo".

b) Proposiciones *singulares:* "Cuando se enuncia que algo se atribuye o no a un particular"[85]. Es decir, proposiciones cuyo sujeto es un término singular, como, por ej., "Calías es justo".

Las proposiciones tipo (a) -las universales- se subdividen en:

a) *Universales* propiamente dichas: "Cuando se enuncia universalmente de un universal que algo

---

[81] *Primeros Analíticos*, I, 4, 25 b.
[82] *Segundos Analíticos*, I, 13, 78 b.
[83] Sto. Tomás, *Commentarium in Perihermeneias*, I, lect. 8.
[84] *De Interpret.*, 7, 17 b, 2.
[85] *Ibidem*.

le pertenece o no le pertenece"[86]. Por ej. "Todo hombre es blanco".

b) *Particulares:* Cuando se enuncia que algo se atribuye o no a un sujeto universal tomado particularmente o no universalmente. Por ej., "Algún hombre es blanco" o "No-todo hombre es blanco".

c) *Indefinidas:* Cuando se enuncia que algo se atribuye a un sujeto universal sin indicar si se toma o no universalmente. Por ej., "Un hombre es blanco" (entendiendo el "un" no en sentido existencial, sino indefinido).

Esta clasificación de las proposiciones pierde su efecto en la silogística aristotélica, y por ello Aristóteles emplea tipos de proposiciones que conllevan una clasificación diferente. Aristóteles deja de lado las *singulares* y trata las indefinidas como particulares. Las razones son conocidas: las operaciones silogísticas exigen la posibilidad de convertir las proposiciones, es decir, de permutar el sujeto y el predicado. Un término singular puede funcionar como predicado pero el resultado es una atribución accidental, consecuencia indeseable para la silogística. En resolución, en la silogística aristotélica, desde el punto de vista de la cantidad, hay dos tipos de proposiciones:

a) Universales
b) Particulares

en el sentido antes apuntado.

Por razón de la modalidad:

a) Proposiciones *puras* o de *inesse* o *asertóricas* o *categóricas*, son las proposiciones simplemente atributivas; las que enuncian que tal predicado se atribuye a tal sujeto. Por ej., "Un hombre es blanco".

b) Proposiciones *modales:*

En los caps. 12 y 13 de *De Interpr.*, en *Prim. Anal.* I, 3 y 8-22 y en *Metafís.*, Z, trata Aristóteles de las proposiciones modales.

La auténtica modalidad es una determinación que recae exclusivamente sobre la cópula, de manera que una proposición modal es aquella que enuncia el modo o la manera en que la cópula une el predicado al sujeto.

Aristóteles distingue dos modalidades:

- lo necesario (τὸ ἀναγκαῖον), es decir, aquello que no puede no ser.
- lo contingente (τὸ ἐνδεχόμενον) o lo posible (τὸ δυνατόν): lo que no es necesario; aquello que puede ser o no ser.

De manera que para Aristóteles hay tres tipos de proposiciones[87]: Πρότασίς ἐστιν ἥ τοῦ ὑπαρχειν ἤ τοῦ ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχειν, ἤ τοῦ ἐνδέχεσθαι ὑπάρχειν.

a) las llamadas asertóricas o de *inesse* (τοῦ ὑπάρχειν): expresan que la cosa es simplemente. Por ejemplo, "Sócrates es hombre".

b) las apodícticas o necesarias (τοῦ ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχειν): expresan que la cosa es necesariamente. Por ejemplo, "Es necesario que Sócrates sea hombre".

c) las contingentes o posibles (τοῦ ἐνδέχεσθαι ὑπάρχειν): expresan que la cosa puede ser. Por ejemplo, "Es posible que Sócrates sea hombre".

La caracterización que Aristóteles hace de éstas últimas adolece de algunos defectos, debido a que el término "posible" (τὸ δυνατόν) no es tomado siempre unívocamente, antes bien es un homónimo, susceptible de, al menos, dos sentidos distintos:

a) El sentido de expresar la potencia unida al acto. Ej.: un hombre que camina *puede* caminar.

b) El sentido de expresar la potencia separada del acto. Ej.: un hombre que está sentado *puede* caminar.

El sentido (b) es el auténtico sentido de posible, el cual no existe más que entre los seres del mundo sublunar, los seres corruptibles (τὰ φθαρτά), en los que el acto y la potencia están unidos[88]. Este es el mundo de lo posible (así entendido) y de lo contingente. Por eso dice Aristóteles[89] que "es posible que sea" y "es contingente que sea" se implican mutuamente.

Sin embargo, en otras ocasiones[90] parece que Aristóteles da claramente a entender que "es posible que P" se sigue de "es necesario que P". Mas, entonces, pueden plantearse ciertas contradicciones, derivadas de las relaciones de lo posible con lo contingente y con su contradictorio lo imposible. Esas dificualtades son las que analiza Aristóteles en cap. 13 de *De Interpr.*

Sobre la base de las relaciones de contradictoriedad entre las proposiciones modales establecidas al final del cap. 12 (donde, curiosamente, introduce entre las cláusulas modales "es verdadero que" y "no es verdade-

---

[87] *Primeros Analíticos*, I, 2, 1.
[88] *Metafís.*, Z, 8, 1049 b, 10-1050 a, 23.
[89] *De Interpr.*, 13, 22 a, 15.
[90] *De Interpr.*, 23 a, 20.

ro", lo que constituye un precedente del tratamiento de la verdad como noción cuasi modal) hace un primer ordenamiento de las proposiciones modales y sus relaciones de oposición"

I
1 Es posible que *P*
2 Es contingente que *P*
3 No es imposible que *P*
4 No es necesario que *P*

II
1 Es posible que no *P*
2 Es contingente que no *P*
3 No es imposible que no *P*
4 No es necesario que no *P*

III
1 No es posible que *P*
2 No es contingente que *P*
3 Es imposible que *P*
4 Es necesario que no *P*

IV
1 No es posible que no *P*
2 No es contingente que no *P*
3 Es imposible que no *P*
4 Es necesario que *P*

Si este ordenamiento trae dificultades (paradojas), se debe a la implicación antes mencionada ($IV_4 \rightarrow I_1$) junto con las relaciones en *I* y de I_1 con su contradictoria. En efecto, la colocación en I_4 de "No es necesario que *P*" lleva a una paradoja, ya que, si tenemos por una parte que:

1) I_4 y IV_4 son contradictorias, esto es:
$\neg I_4 \Leftrightarrow IV_4$

2) IV_4 implica I_1 esto es:
$IV_4 \rightarrow I_1$

3) I_1 y III_3 son contradictorias, esto es:
$I_1 \Leftrightarrow \neg III_3$

y tenemos por otra parte que:

4) I_4 se sigue de I_3, que, a su vez, se sigue de I_1 (ya que son proposiciones del mismo orden), esto es:
$(4_a)\ I_3 \rightarrow I_4$
$(4_b)\ I_1 \rightarrow I_3$

cabe concluir que I_4 ("No es necesario que *P*") se sigue de IV_4, ("Es necesario que *P*"), lo cual es absurdo.

Para evitar este absurdo propone Aristóteles que II_4 (No es necesario que no *P*) tome el lugar de I_4 (No es necesario que sea), ofreciendo en favor de tal propuesta las razones siguientes:

Si quitamos I_4 de su lugar y hemos de sustituirla por otra, entonces, en primer lugar, tenemos que elegir entre las tres modalidades de lo necesario que quedan: II_4, III_4 y IV_4. Pero, en segundo lugar, I_1 implica, a la vez, la afirmación y la negación, así como también las restantes del grupo *I*; por lo tanto, la modalidad de lo necesario elegida debe presentar, asimismo, esa doble posibilidad; requisito éste que no cumplen ni III_4 ni IV_4. Por consiguiente, queda II_4 como la única posible sustituta de I_4.

Con esta sustitución se evita el *absurdo* a que daba origen el ordenamiento anterior, ya que ahora II_4 no es la contradictoria de IV_4, pudiendo ser ambas verdaderas al mismo tiempo. Queda, en definitiva, el ordenamiento siguiente:

I
A Es posible que *P*
A Es contingente que *P*
I No es imposible que *P*
U No es necesario que no *P*

II
E Es posible que no *P*
E Es contingente que no *P*
U No es imposible que no *P*
I No es necesario que *P*

III
I No es posible que *P*
I No es contingente que *P*
A Es imposible que *P*
E Es necesario que no *P*

IV
U No es posible que no *P*
U No es contingente que no *P*
E Es imposible que no *P*
A Es necesario que *P*

Sistematización y simbolización de las proposiciones modales:

En toda proposición modal cabe distinguir el *modus* y el *dictum*. El *dictum* enuncia la atribución del predicado al sujeto, y a él se añade el *modus*, que enuncia la modalidad de atribución. Ejemplo: en "Es

necesario que Sócrates sea hombre" tenemos que "Es necesario que" constituye el *modus*, y "Socrates sea hombre", el *dictum*.

Dado que el *modus* puede revestir 4 formas (posible, contingente, imposible y necesario, y cada una de ellas puede, a su vez, ser afirmativa o negativa), y el *dictum* 2 formas (afirmativo y negativo), resultarán 4 x 2 x 2 = 16 clases de proposiciones modales en 4 grupos, cada uno de los cuales los lógicos medievales representaban por una letra:

Modus / Dictum	Afirmativo	Negativo
Afirmativo	A	I
Negativo	E	U

Anteponiento la letra a las proposiciones correspondientes en los cuatro órdenes que forman la anterior tabla de Aristóteles formaron los escolásticos las palabras mnemotécnicas siguientes:

AmAbImUs, EdEntUli, IllAcE, pUrpUrEA.

Cambiaron, además, el orden establecido por Aristóteles (para establecer las relaciones de oposición; (véase *infra)* y se decía:

Purpurea, Iliace, Amabimus, Edentuli.

Aristóteles, en los *Primeros Analíticos*, ofrece, finalmente, un ordenamiento de las proposiciones modales que obedece a los criterios ontológicos siguientes: Ya que en el campo ontológico unos seres mantienen la primacía (la anterioridad) respecto de otros, en correspondencia unas modalidades deben venir antes que otras.

En ontología está:

- Primero, el mundo de los actos puros, regido por las leyes de lo necesario.
- Segundo, el mundo sublunar, el de los seres corruptibles, regido por las leyes de lo posible y de lo contingente.
- Tercero, el mundo de las puras potencias, regido por las leyes de lo imposible.

Por correspondencia, en Lógica deben venir, primero, la modalidad sobre lo necesario, a la que seguirán las de lo posible y de lo contingente, y, finalmente, la de lo imposible. Lo cual queda resumido en las palabras mnemotécnicas (debidas a Fonseca) siguientes:

sUnt AtAvI (Amabimus), quI rEfErUnt (Edentuli), vErIdIcA (Iliace), ArgUtUlE (Purpurea).

3.3. Relaciones entre las proposiciones

Relaciones de oposición

Aristóteles trata de las relaciones de oposición entre las proposiciones en *De Interpr.* y en *Primeros Analíticos*, I, 1 y II, 11.

Dos proposiciones son opuestas (ἀντικείμεναι), cuando, enunciando el mismo atributo del mismo sujeto (tomados atributo y sujeto sin que se produzca homonimia), difieren por la cantidad, por la cualidad o por ambas.

De la combinación de las clasificaciones de las proposiciones (expuestas más arriba) por razón de la cantidad y por razón de la cualidad se obtiene los cuatro tipos de proposiciones que los escolásticos representaron por las letras:

A universal afirmativa
E universal negativa
I particular afirmativa
O particular negativa

Estas, combinadas dos a dos, dan lugar a 6 posibles relaciones. De estas seis relaciones posibles las diferentes entre sí son: la contradicción, la contrariedad, la subalternación y la subcontrariedad. Aristóteles habla de la contradicción y de la contrariedad en los caps. 6, 7 de *De Interp.*

La relación de contradictoriedad

La contradicción ἀντίφασις es definida por Aristóteles[91] como "la oposición de una afirmación y su negación"; "cuando la una significa universalmente lo mismo que la otra significa no universalmente". Ej. : "Todo hombre es blanco" - "No todo hombre es blanco"; "Ningún hombre es blanco" - "Algún hombre es blanco".

Dos proposiciones contradictorias son opuestas por razón, a la vez, de la cantidad y de la cualidad. De un par de proposiciones contradictorias es necesario que una de ellas sea verdadera o falsa, y la otra niegue a la 1ª.

La relación de contrariedad

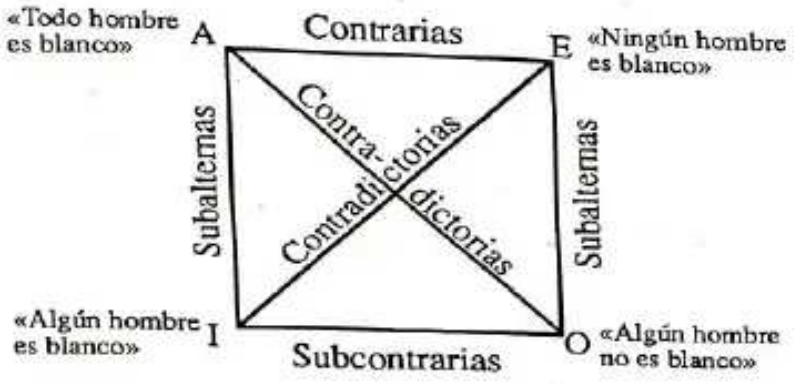
La contrariedad (ἐναντίωσις) es definida por Aristóteles[92] como la oposición de dos proposiciones una

[91] *De Interp.* 6; 7, 17 b, 16-20.
[92] *De Interp.* 7, 17 b, 20-22.

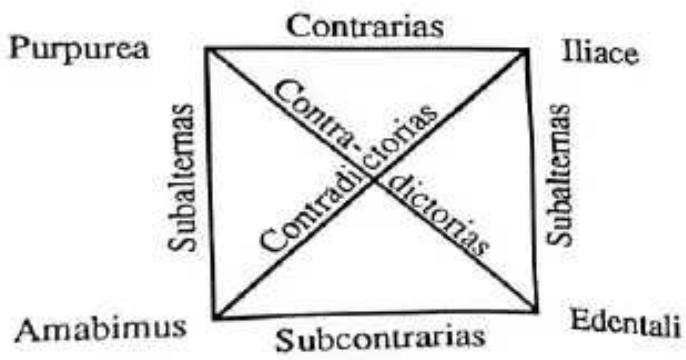
de las cuales enuncia de un universal que algo le pertenece y la otra enuncia del mismo universal que ese algo no le pertenece. Ejs.: "Todo hombre es blanco" - "Ningún hombre es blanco".

Dos proposiciones son contrarias cuando siendo ambas universales, se oponen por razón de la cualidad. No pueden ser verdaderas a la vez, pero sus opuestas (contradictoriamente) lo pueden ser respecto de la misma cosa. P. ej.: "No todo hombre es blanco" y "Algún hombre es blanco". Las contrarias pueden ser ambas falsas, y también una verdadera y la otra falsa.

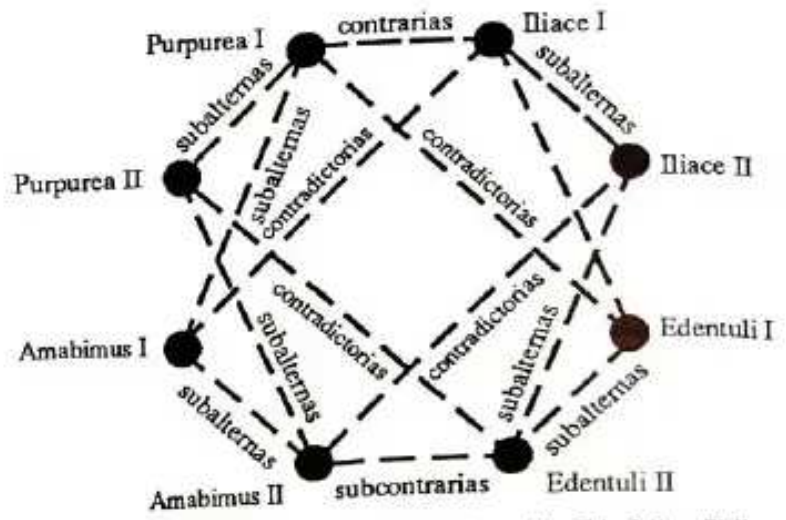
Los escolásticos añadieron y definieron los otros dos tipos de oposición: *subcontrariedad:* media entre dos proposiciones que siendo particulares se oponen por razón de la cualidad: Ej.: "Algún hombre es blanco" y "Algún hombre no es blanco". Pueden ser, a la vez, ambas verdaderas, pero no falsas; y *subalternación:* media entre dos proposiciones que manteniendo la misma cualidad se oponen por razón de la cantidad: Ej.: "Todo hombre es blanco" - "Algún hombre es blanco". Las relaciones de oposición expuestas quedan representadas gráficamente en el llamado cuadrado de la oposición:



La oposición de las proposiciones modales reposa sobre los mismos principios que la oposición de las proposiciones de *inesse*, pero precisando que: La oposición debe recaer sobre el *modus*, no sobre el *dictum*. Así, la contradictoria de "Es necesario que A sea B" no es "Es necesario que A no sea B", sino "No es necesario que A sea B". De manera que, sin tomar en cuenta la cantidad del *dictum*, tendremos las siguientes relaciones de oposición que muestra el cuadro siguiente:



Si, además, se toma en consideración la cantidad del *dictum*, p. e. "Es necesario que algún B sea A", "Es necesario que todo B sea A", los 4 grupos de proposiciones modales (con 4 clases de proposiciones cada grupo) se multiplican por dos: 8 grupos (con 32 tipos de proposiciones diferentes) y sus relaciones de oposición vienen expresados en el gráfico siguiente:



(Cf. J. Tricot: *Traité de logique formelle*. Ed., Libr., Phil., J. Vrin, París 1973) p. 169).

4. El silogismo

El paso de 3. a 4. viene marcado por el paso, en el campo gnoseológico de la lógica aristotélica, del plano relacional al plano operacional.

Dado un campo de términos (proposiciones lógicas, p. e.) la relación se caracteriza porque la totalidad resultante de los términos no queda *segregada* de ellos y enfrentándose a cada uno de ellos, sino englobándolos, o configurándolos. De manera que las relaciones son funtores (entendido el término "funtor" en sentido amplio -véase *Lógica formal*, cap. IV) que sacan configuraciones (proposiciones) a partir de términos o a partir de otras configuraciones. La operación, en cambio, se caracteriza por la *segregación* del resultado, que queda como enfrentado a los términos que lo generaron y perteneciendo al mismo nivel categorial, pero que puede ser "reconstruido" de otro modo. De manera que las operaciones son funtores *determinativos*, que sacan términos a partir de otros términos o a partir de configuraciones o proposiciones.

Toda operación envuelve necesariamente una relación, pero no recíprocamente. Así, dados dos conjuntos, X e Y, se establece una correspondencia (o relación) entre los elementos de ambos, pero cuando la correspondencia pasa a ser función (o aplicación) con univocidad a la derecha los elementos de Y quedan "individualizados", "determinados por la función. Si los elementos de X y de Y son los mismos, se da una transformación (o sustitución) que también constituye ya una operación.

Según esto, la teoría de Aristóteles sobre la oposición de las proposiciones pertenece al plano relacional; en tanto que su teoría de la conversión de las proposiciones al plano operacional, por cuanto que, ahora, el elemento resultado (de la conversión: la proposición inferida) queda *individualizado, determinado* frente al elemento generador, y perteneciendo al mismo nivel categorial (proposiciones) y puede ser reconstruido de otras maneras. Por eso tradicionalmente la teoría de la conversión de las proposiciones forma parte de la teoría de la inferencia inmediata. Y la inferencia (mediata e inmediata) constituye la parte operacional de la lógica aristotélica:

4.1. Teoría de la inferencia inmediata

La teoría de la inferencia inmediata se basa en la consideración de las proposiciones como totalidades compuestas de elementos (sujeto-predicado). Y la inferencia es *inmediata* porque la totalidad resultante contiene los mismos elementos de su generadora, obteniéndose mediante una transformación de la 1ª totalidad, sin que medie ningún otro elemento (término) o totalidad (proposición)[93]. Las inferencias inmediatas son, pues, transformaciones. Las transformaciones de las proposiciones se basan en el principio denominado *dictum de omni et nullo* interpretado en extensión. Dicho principio lo apoyan los intérpretes en el texto que aparece en las *Categorías* (3, 1 b 11-12) "Todo lo que se dice del predicado se dice también del sujeto", y los escolásticos, que lo interpretaban en extensión lo formulaban de la siguiente manera:

El *dictum de omni: Quiquid universaliter dicitur de aliquo subiecto, dicitur de omni quod sub tali subiecto continetur.*

O bien, *quiquid de omnibus valet, etiam de quibusdam et singulis.*

El *dictum de nullo: Quidquid universaliter negatur de aliquo subiecto, dictur de nullo quod sub tali subiecto continetur.*

O bien, *quidquid de nullo valet, nec de quibusdam et singulis valet.*

La conversión de las proposiciones exige la consideración de éstas desde la perspectiva extensional, esto es, tomar sus elementos (sujeto y predicado) como extensiones. Y sobre éstas rige el principio del *dictum.*

Las inferencias inmediatas más significativas son: la conversión y la obversión.

Conversión de las proposiciones

La conversión (ἀντιστροφή) es una inferencia inmediata que permite pasar de una proposición dada a otra que posee la misma cualidad que la primera pero con los términos permutados. De ella trata Aristóteles en *Primeros Analíticos* I, 2, 25 a 14 y ss.

La condición esencial que impone la conversión es que la extensión de los términos de las proposiciones (a transformar y transformada) quede inmutable. En el análisis clásico de la proposición en sujeto-predicado, la extensión del sujeto queda siempre indicada por el cuantificador, pero no ocurre lo mismo por lo que respecta al predicado, por lo que para hacer la conversión (dado que hay que atender a la extensión de los términos) es preciso determinar la extensión del predicado, aun cuando no venga marcada con partícula externa alguna. Tal parece ser el supuesto de que parte Aristóteles. Por lo que respecta a la extensión del predicado, el análisis de las proposiciones permite establecer que en toda proposición afirmativa (sea de tipo A o de tipo I) el predicado *supponit particulariter*, esto es, que no está tomado en toda, sino en parte de, su extensión; en tanto que en toda proposición negativa (sea del tipo E, o del tipo O) el predicado *supponit universaliter*, es decir, está tomado en toda su extensión. Enmarcando el término distribuido (Tomado universalmente o en toda su extensión) obtenemos la siguiente determinación de la extensión de los términos en los diferentes tipos de proposiciones:

A Todo [A] es B
E Ningún [A] es [B]
I Algún A es B
O Algún A no es [B]

La conversión perfecta, según Aristóteles, luego denominada por los escolásticos *simplex*, es aquella en la que los términos, aunque permutados, conservan la misma extensión. De la tabla anterior se desprende que sólo la E y la I son susceptibles de tal operación. Aristóteles *demuestra* la conversión *simplex* de la E mediante el procedimiento de exposición o ἔκθεσις: "Si A no conviene a ningún B, tampoco B convendrá a ningún A; porque si conviniese a alguno, por ej. a C, no sería cierto que A no conviene a ningún B; pues C es alguno de los B"[94]. Esto es, la prueba por exposición se hace mediante la introducción de un nuevo término, el C, que se denomina el "término expuesto".

---

[93] *Segundos analíticos* I, 10, 76 b, 3 y ss.
[94] *Primeros Analíticos* I, 2, 25 a 15.

De "Ningún B es A" se sigue "Ningún A es B".

Prueba:

(1) Supuesto: "Ningún B es A"

(2) A es un universal y, por lo tanto, comprende partes; C, D, E,... Esto es:
Todo C es A
Todo D es A
Todo E es A

(3) Supongamos la negación de la conclusión a la que queremos llegar; esto es, "Algún A es B". Como A consta de C, D, E, etc., sea que B es C, por lo que todo C es B.

(4) Podemos ahora formar el silogismo siguiente (en Darapti)
4a) Todo C es A.....por (2)
4b) Todo C es B.....por (3)
4c) Luego "Algún B es A"..... de (4a) y (4b)

(5) 4c: "Algún B es A" y 1: "Ningún B es A" se contradicen.

(6) Por llegar a una contradicción se niega el supuesto (3) del que se había partido, y se obtiene, así, "Ningún A es B", que constituye la conclusión buscada. Y, por tanto, en (6) cerramos el supuesto inicial, diciendo en

(7) que de (1) sigue (6), esto es, que de "Ningún B es A" se sigue "Ningún A es B".

El esquema proposicional de esta deducción sería:

(1) X..... s
(2) Def ..... de (1)
(3) ¬Y..... s.
(4) ¬X..... por silog.
(5) X & ¬X..... I. C. 1-4
(6) Y..... I. N. 3-5
(7) X→Y..... I. I. 1-6

Las proposiciones de tipo I: "Algún B es A" se convierten también *simpliciter*. Aristóteles ofrece la siguiente demostración:

De "Algún B es A" se sigue "Algún A es B"

Prueba:

(1) Supuesto: "Algún B es A"

(2) Supongamos que no sea el caso que algún A es B; lo que equivale a "Ningún A es B", de donde:

(3) "Ningún B es A" por conversión simple de (2). Obtenemos así que

(4) "Ningún B es A" Y "Algún B es A" se contradicen

(5) Por tanto se niega el supuesto (2) quedando

(6) "Algún A es B", que constituye la conclusión buscada. Por lo que del supuesto (1) se sigue la conclusión (6).
Esto es:

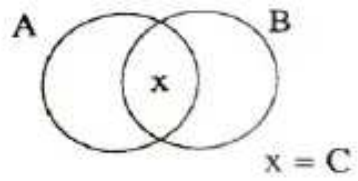
(7) De (1) "Algún B es A" se sigue "Algún A es B"

Prueba de conversión simplex de I por ἔκθεσις:

Algún A es B → Algún B es A

(1) Algún A es B → $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es B}\\ \text{Todo C es A}\end{pmatrix}$

tesis evidente de:



(2) $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es B}\\ \text{Todo C es A}\end{pmatrix}\rightarrow$ Algún A es B

tesis conversa de (1) (también evidente).

(3) $\begin{pmatrix}\text{Todo C es B}\\ \text{Todo C es A}\end{pmatrix}\rightarrow \begin{pmatrix}\text{Todo C es A}\\ \text{Todo C es B}\end{pmatrix}$

Tautología. p & q → q & p

(4) $\begin{pmatrix}\text{Todo C es B}\\ \text{Todo C es A}\end{pmatrix}\rightarrow (\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es A}\\ \text{Todo C es B}\end{pmatrix}$

Teor: (A → B) → (A → (∃x) B)

(5) $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es B}\\ \text{Todo C es A}\end{pmatrix}\rightarrow (\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es A}\\ \text{Todo C es B}\end{pmatrix}$

Teor: (Pa → p) → (∃x) Px → p (en 4).

(6) Algún A es B → $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es A}\\ \text{Todo C es B}\end{pmatrix}$

silog. 1, 5.

(7) $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es A}\\ \text{Todo C es B}\end{pmatrix}\rightarrow$ Algún B es A

tesis (2), Sust. A/B; B/A.

(8) Algún A es B → Algún B es A
silog. 6,7.

La conversión imperfecta o *per accidens* (κατὰ μέρος) es aquella en la que los términos no conservan la misma extensión (cambia la cantidad de la proposición). Cabe aplicar este tipo de conversión a las proposiciones de tipo A y de tipo E.

Aristóteles *(ibidem)* prueba la conversión *per accidens* de A del siguiente modo:

De "Todo B es A" se sigue "Algún A es B"

Prueba:

(1) Supuesto: "Todo B es A"

(2) Supongamos la negación de la conclusión; esto es: "Ningún A es B"

(3) Ningún "B es A" por conversión simple de (2).

(4) (1) "Todo B es A" y (3) "Ningún B es A" son contrarias, y, por tanto, no pueden ser ambas verdaderas a la vez, esto es -[(1) & (3)]. es así que (1), por hipótesis, luego queda rechazado (3); esto es, queda no (3), formándose una contradicción en

(5) entre (3) y no (3)..... una contradición

(6) Por llegar a una contradicción se niega el supuesto (2) del que se había partido y se obtiene, así, la conclusión deseada: "Algún A es B".

(7) Se cierra el supuesto inicial, de modo que del supuesto (1) "Todo B es A" se sigue (6) "Algún A es B"

Aristóteles señala, finalmente, que las proposiciones de tipo O, "Algún A no es B"; no son convertibles, ya que el predicado de una proposición tipo O está tomado en toda su extensión *(supponit universaliter)*, y en la conversión el sujeto, que no está tomado en toda su extensión *(supponit particulariter)*, al pasar a predicado ha de ser tomado en toda su extensión *(supponere universaliter)*, lo cual viola el principio del *dictum* sobre el que se apoya la conversión.

La conversión por contraposición

Es una combinación de la obversión (que luego veremos) y de la conversión. Consiste en permutar los términos (sujeto y predicado) de la proposición anteponiendo a cada uno de ellos la partícula negativa. Este tipo de conversión vale para las proposiciones de tipo A y de tipo O[95]. Ejs.: de "Todo incompetente es inofensivo" se sigue que "Todo no inofensivo es no incompetente", y de "Algunos crédulos no son fieles" se sigue "Algunos no fieles no son no crédulos" ("Algunos infieles son crédulos").

Las reglas para las posibles conversiones han quedado recogidas en los siguientes versos mnemotécnicos:

Simpliciter fEcI convertitur, EvA per acci(dens)
AstO per contra(positionem); sic fit conversio tota.

La conversión de las modales (de la que trata Aristóteles en *Primeros Analíticos* I, 3) sigue estas mismas reglas. Así, por ej., una proposición modal de tipo E:

"Es necesario que ningún B sea A".

se convierte en *simpliciter:*

"Es necesario que ningún A sea B".

Obversión de las proposiciones

La obversión es también una inferencia inmediata. Consiste en cambiar la cualidad de la proposición y negar el predicado. Los cuatro tipos de proposiciones (A, E, I, O), son susceptibles de esta transformación.

Ejemplos:

de A:

"Todo ignorante es presumido" (Todo A es B), se transforma en "Ningún ignorante es no presumido" (Ningún A es no B).

de I:

"Algún A es B" se transforma en "Algún A no es no B".

4.2. Teoría de la inferencia mediata: La silogística

La inferencia (y el razonamiento, en cuanto que consta de inferencias) es, como ya se ha indicado, pasar de algo dado conocido a otra cosa desconocida. Todo razonamiento supone (consta de) inferencias; mas no toda inferencia es (supone) un razonamiento. La inferencia *inmediata* no es, propiamente, un razonamiento. El razonamiento saca inferencia (o inferencias) mediatas; esto es, apoyándose, aunque luego eliminándolo, en un elemento intermedio. Por eso el término medio juega un papel esencial en la lógica aristotélica, ya que en el silogismo, que es para Aristóteles la demostración por excelencia, el término medio constituye, no sólo el lazo de unión entre las premisas, sino también la razón misma de la conclusión: τὸ μὲν γὰρ αἴτιον τὸ μέσον[96]. Aristóteles distingue dos formas de realizar este paso[97], dos formas de pasar de lo dado

---

[95] De la que habla Aristóteles en *Tópicos* II, 8, 113 b. 17 y ss.

[96] *Seg. Analít.* II, 2, 90 a, 6.

[97] *Primeros Analíticos* II, 23, 68 b, 13: "Todas nuestras seguridades a las que llegamos son, bien por silogismo, bien por inducción"; y *Segundos Analíticos* I, 18, 81 a: "Aprendemos bien por inducción (ἐπαγωγῇ), bien por demostración (ἀποδεί–ξει). La demostración parte de lo universal (ἐκ τῶν καθόλου); la inducción de lo particular (ἐκ τῶν κατὰ μέρος).

(como verdadero o supuestamente verdadero) a lo desconocido:

a) mediante la inducción (ἐπαγωγή)

b) mediante la demostración (ἀποδείξεις) o el silogismo (συλλογισμὸς).

Para Aristóteles el razonamiento por excelencia es el silogismo, que define en *Primeros Analíticos* I, 1; 24 b, 18 así:

> *Συλλογισμὸς δέ ἐστιν λογός ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι.*

El silogismo es un enunciado, en el cual asentadas (dadas) ciertas cosas, alguna otra cosa diferente de las asentadas (dadas), sobreviene por necesidad, por el hecho de que las 1[as] hayan sido asentadas (dadas). Esta caracterización general de "silogismo" es aplicable asímismo a "razonamiento"[98]. Es por ello por lo que algunos autores traducen sistemáticamente συλλογισμὸς por razonamiento[99].

Componentes del silogismo

El silogismo comprende tres proposiciones, y las dos primeras son las premisas llamadas προτὰσεις o ὑποθέσεις o διαστήματα, y la 3ª es la conclusión (συμπέρασμα), así llamada porque une los dos términos extremos (πέρασα): el término menor como sujeto y el mayor como predicado.

Las premisas comprenden tres términos: (ὅροι): dos de ellos extremos (ἄκρα), que son: el mayor (τὸ πρῶτον ἄκρον) o más extremo (τὸ μεῖξον ἄκρον) y el menor (τὸ ἐλάττον) o el menos extremo (τὸ ἔσχατον ἄκρον); y el término medio (ὁ μέσος ὅρος o τὸ μέσον).

La premisa que contiene el término mayor, y que suele colocarse la primera, aunque no siempre, se denomina premisa mayor (ἡ πρώτη πρότασις); y la que contiene el término menor, y suele colocarse la segunda, se denomina premisa menor (ἡ δευτέρα πρότασις).

Los silogismos se dividen, según Aristóteles[100], en perfectos e imperfectos.

a) Silogismo perfecto (συλλογισμὸς τέλειος) es "aquel que no necesita ninguna otra cosa además de lo admitido en las premisas para que la necesidad de la conclusión sea evidente". Silogismos perfectos son los de la primera figura. Por ej., "Si A predica de todo B y B se predica de todo C, entonces necesariamente A se predica de todo C"[101].

En el silogismo perfecto la conclusión sale necesaria y explícitamente de las premisas por aplicación directa del principio *dictum de omni et nullo* interpretado en extensión. En el silogismo citado el término medio, el B, consigue su función precisamente porque su extensión es media entre la de los extremos. Es la propiedad de contener un término, el menor, y de estar contendio en otro (el mayor) lo que posibilita al término medio la función mediadora entre las dos proposiciones que componen las premisas. Y esta situación sólo se da en los silogismos de la primera figura, y más en concreto, en el primer modo de la primera figura.

b) Silogismo imperfecto (συλλογισμὸς ἀτελής) es "aquel que tiene necesidad de una o varias cosas, que ciertamente resultan necesariamente de las premisas, pero que no están explícitamente enunciadas en las premisas. Son silogismos imperfectos los de la 2ª y 3ª figuras. En un silogismo imperfecto la conclusión sale de las premisas, pero no explícitamente, y el principio del *dictum de omni et nullo* no aparece con evidencia. Es por esto, por lo que algunos investigadores, entre los que cabe citar a Lukasiewicz por su brillante exposición de la silogística de Aristóteles[102], consideran que la clasificación de los silogismos en figuras no obedece al criterio de extensión de los términos (no se rige por el principio del *dictum de omni et nullo)*, sino a criterios formales de posición (θέσις) del término medio. Según esta interpretación -que luego discutiremos- "Aristóteles se equivocó al decir que todo silogismo debe quedar encuadrado en una de estas figuras"[103], ya que desde un criterio formal, las figuras silogísticas resultan ser, efectivamente, cuatro. Pero lo cierto es que Aristóteles admite sólo tres figuras.

---

98 Confert *Tópicos* I, 1, 100 a 25.

99 *Confert* trad. de *Tópicos* por Miguel Candel San Martín, en Gredos, Madrid, 1982, p. 94 y ss.

100 *Primeros Analíticos* I, 1, 24 b 18 y ss.

101 *Primeros Analíticos* I, 4, 25 b 38-40.

102 Lukasiewicz.: *La silogística de Aristóteles desde el punto de la lógica formal moderna*. Trd. J. Fernández Robles, Madrid, Tecnos, 1977; p. 39-40.

103 *Ibidem*, p. 29.

Aristóteles clasifica los modos silogísticos en tres figuras (σχήματα). En efecto, "para llegar a una conclusión silogística de A de B", esto es, para poder concluir que A se atribuye, o no se atribuye, a B, "es necesario tomar algún término común a los dos, si, además, no puede efectuarse más que de tres maneras, a saber: atribuyendo A a C y C a B, o C a ambas, o ambas a C, que son las figuras que hemos explicado, será evidente que todo silogismo debe formarse de dichas figuras"[104]. Los esquemas, de las tres figuras indicadas son, pues:

1ª	2ª	3ª
C - A	A - C	C - A
B - C	B - C	C - B
B - A	B - A	B - A

Estudio de las figuras

Cualquier figura tiene 64 modos silogísticos ya que, dado que un silogismo consta de tres proposiciones y cada una de éstas puede ser del tipo A, E, I, O, tendremos Variaciones con repetición de cuatro elementos (A, E, I, O) de grado tres (dos premisas y una conclusión). Esto es: $V_4^3 = 4^3 = 64$.

Si, desde un criterio formal, se admiten cuatro figuras distintas, entonces caben 64 x 4 = 256 modos silogísticos posibles. Pero no todos ellos son concluyentes, ya que la mayoría de ellos no se atienen a las reglas generales del silogismo. Tales reglas han quedado recogidas en unos versos mnemotécnicos que aparecen ya en las *Summulae logicales* de Pedro Hispano (S. XIII). Son ocho, concernientes cuatro a los términos y cuatro a las proposiciones:

Terminus esto triplex, medius, maiorque, minorque.
Latius hunc quam praemissae conclusio non vult.
Nequaquam medio capiat conclusio fas est.
Aut semel, aut iterum, medius generaliter esto.
Utraque si praemissa neget, nihil inde sequetur.
Nil sequitur geminis ex particularibus unquam.
Ambae affirmantes nequeunt generare negantem.
Peiorem sequitur conclusio partem.

Según estas reglas
la 1ª figura contiene cuatro modos legítimos
la 2ª " " cuatro " "
la 3ª " " seis " "
la 4ª " " cinco " "

Y en cada figura los modos legítimos son representados por las palabras mnemotécnicas siguientes:

1ª figura: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio*

2ª figura: *Cesare, Camestres, Festino, Baroco*

3ª figura: *Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Fresison*

y según quienes no reconocen la cuarta figura, sino que la consideran como una figura indirecta de la 1ª figura, tenemos:

1ª figura Ind.: *Baralipton, Celantes, Dabitis, Fapesmo, Frisesomorum.*

y según quienes reconocen una cuarta figura como distinta de la primera, tenemos:

4ª figura: *Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.*

Estas palabras contienen ciertas letras que son significativas:

I) Las tres primeras vocales (las siguientes servían para completar los hexámetros que formaban) indican el tipo de proposición que aparece en las premisas y conclusión. P. e., *Celarent* indica que la premisa mayor es una proposición universal negativa: tipo E; la premisa menor, una proposición universal afirmativa: tipo A; y la conclusión una proposición universal negativa: tipo E.

II) La consonante inicial (B, C, D, F), indica el modo correspondiente de la primera figura al que es reducible cualquier otro modo de cualquier otra figura. P.e., la F de Felapton indica que este modo de la tercera figura es reducible al modo de la primera figura que también empieza por F, esto es, *Ferio*.

III) También son significativas las letras *s, p, m, c*. Indican las diversas transformaciones que hay que hacer para reducir los modos de las figuras 2ª, 3ª, y 4ª a los correspondientes de la primera. La *s* indica que la vocal que le precede (la proposición, ya que la vocal representa una proposición de tipo A, E, I, O) ha de ser convertida *simpliciter*. Ej., en *Cesare* la primera *e* (universal negativa: Ningún A es B) ha de convertirse *simpliciter* (Ningún B es A). La *p* indica que la vocal que le precede ha de ser convertida *per accidens*. Ej., en *Felapton* la A (universal afirmativo: Todo A es B) ha de ser convertida *per accidens* en particular afirmativa I (algún B es A). La *m* indica que hay que permutar las premisas. Ej., en *Camestres*, para la reducción, hay que colocar primero la *e* (premisa menor) y luego la *a* (premisa mayor). La *c* indica la reducción, de los modos que la contienen *(Baroco* y *Bocardo)* por reducción indirecta *(per impossible)*. Si de las dos premisas 1 y 2, se sigue la conclusión 3, entonces de una premisa y la negación de la conclusión se sigue la negación de la otra premisa, siendo ésta la

[104] *Prim. Analit.* I, 23, 41 a, 10 y ss.

que precede a la letra *c*. Esta transformación es, en realidad, una regla de la lógica de proposiciones que podríamos representar así:

a) $\dfrac{(\alpha \,\&\, \beta) \rightarrow \gamma}{(\alpha \,\&\, -\gamma) \rightarrow -\beta}$

b) $\dfrac{(\alpha \,\&\, \beta) \rightarrow \gamma}{(-\gamma \,\&\, \beta) \rightarrow -\alpha}$

En términos formales de la lógica de proposiciones: si el silogismo tiene esta estructura: de dos premisas (α) y (β) se sigue necesariamente (implicación formal) la conclusión (γ):

(1) $(\alpha \,\&\, \beta) \rightarrow \gamma$

De donde: (2) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$..... por la ley de export. en 1.

(3) $\alpha \rightarrow (-\gamma \rightarrow -\beta)$.. ley de contrap. en 2.

(4) $(\alpha \,\&\, -\gamma) \rightarrow -\beta$... ley import. en 3.

Está también la prueba por exposición (ἔκθεσις), que consiste en una regla del siguiente tenor: De "Algún B es A" se sigue que existe un C (término expuesto) tal que todo C es B y todo C es A; y si existe un C tal que Todo C es B y todo C es A se sigue "algún A es B"".

Estas reglas han quedado resumidas en los versos siguientes:

S vult simpliciter verti, P vero per accidens
M vult mutari, C per impossible duci.

Silogismos de la primera figura

Aristóteles caracteriza de esta forma la primera figura:

> "Cuando tres términos se hallan unos respecto de otros en tal relación, que el menor está contenido en la totalidad del medio, y que el medio esté o no esté contenido en la totalidad del mayor, precisa necesariamente haya silogismo perfecto de los extremos"[105].

Como aquí se indica, la 1ª figura, es la que establece silogismos perfectos. Y es en esta figura donde la deducción silogística reposa explícitamente sobre las relaciones de extensión entre los términos. De modo que Aristóteles, al menos en el establecimiento de los silogismos perfectos (los de la 1ª figura), propugna una consideración extensional de la lógica (silogística): según esto, los términos del silogismo son géneros o especies que engloban unos a otros, según su mayor extensión. Y como la διαίρεσις platónica, de donde procede el silogismo, el razonamiento silogístico discurre a través de una clasificación *porfiriana* de los seres. Las reglas especiales de la 1ª figura son:

a.- La mayor ha de ser siempre universal

b.- La menor siempre afirmativa
(sit minor affirmans, nec maior particularis).

A partir del principio del *dictum* Aristóteles procede empíricamente al examen de los silogismos de la 1ª figura para establecer los modos concluyentes[106].

1er modo (BARBARA)

"Si A se predica de todo B y B de todo C, entonces necesariamente A se predica de todo C". Esquema canónico:

Si todo B es A
y todo C es B,
entonces necesariamente todo C es A.

2º modo (CELARENT)

"Si A no se predica de ningún B, y B se predica de todo C, entonces necesariamente A no se predica de ningún C".

Si ningún B es A
y todo C es B,
entonces necesariamente ningún C es A.

3er modo (DARII)

"Si A se predica de todo B y B se predica de algún C, entonces necesariamente A se predica de Algún C".

Esto es:
Si todo B es A
y algún C es B,
entonces necesariamente algún C es A.

4º modo (FERIO)

"Si A no se predica de ningún B, y B se predica de algún C, entonces necesariamente A no se predica de Algún C".

Si ningún B es A
y algún C es B,
entonces necesariamente algún C no es A.

Todos estos silogismos, dice Aristóteles[107], son completos, porque todos ellos establecen la conclusión con los datos establecidos (en las premisas), y porque todos los tipos de conclusiones pueden probarse por esta figura.

---

105 *Primeros Analíticos* I, 4, 25 b,31-33.

106 *Primeros Analíticos*, I, cap. IV. Para los términos de la primera figura utiliza Aristóteles las letras A -para el término mayor-, B -termino medio-, C -término menor.

107 *Ibidem*, final.

Silogismos de la 1ª figura indirectos

Aristóteles, situado en la perspectiva extensional, no reconoce, con total coherencia, más que tres figuras, ya que desde esta perspectiva los modos de la pretendida 4ª figura no constituyen, sino modos indirectos de la 1ª.

De manera explícita estableció dos modos de esta 1ª figura indirecta:

Si un silogismo está compuesto de una premisa afirmativa y una universal negativa, resultará una conclusión (indirecta) sobre la base de la relación del término menor respecto del medio, p. ej.: "Si A conviene a Todo B o a algún B, y B no conviene a ningún C; en efecto, las premisas pueden convertirse, y entonces necesariamente C no conviene a algún A"[108].

De aquí, obtenemos los 2 modos indirectos siguientes:

I FAPESMO

Sean las premisas:

Todo B es A
Ningún C es B,

y realizando las transformaciones *p*, *s* y *m* tenemos:

Ningún B es C
Algún A es B.

De donde cabe concluir: Algún A no es C,
Esto es, queda reducido a *Ferio*.

II FRISESOMORUM

Sean las otras dos premisas indicadas:

Algún B es A,
Ningún C es B,

y realizando sobre ellas las transformaciones *s*, *s*, y *m*, se obtiene:

Ningún B es C
Algún A es B,

de donde cabe concluir: Algún A no es C, también en *Ferio*.

De los otros tres modos indirectos habla así Aristóteles[109]:

"Si se ha demostrado que A conviene a todo, o a algún B, será necesario que B convenga a algún A, y si A no conviene a ningún B, B no convendrá a ningún A, siendo esta última conclusión diferente de la precedente".

Aquí se alude a los tres modos indirectos siguientes:

III BARALIPON

En efecto, si tenemos un silogismo en *Barbara:*

Todo C es A,
Todo B es C;

luego Todo B es A;

y si aplicamos la transformación *p* a la conclusión tendremos:,

Todo C es A
Todo B es C;

luego Algún A es B.

De este silogismo habla también Aristóteles en *Primeros Analíticos*. I, 28, 44 a 12-35.

IV DABITIS

Que es un silogismo en *Darii* cuya conclusión se convierte *simpliciter*. En efecto:

si todo C es A
y algún B es C,
entonc. Algún B es A *(Darii);*

y aplicando la transformación *s* a la conclusión:

Todo C es A,
Algún B es C;

luego Algún A es B.

De este silogismo habla también Aristóteles en *Primeros Analíticos*. I, 6, 28 b 7.

V CELANTES

Es un silogismo en *Celarent* cuya conclusión se convierte *simpliciter:* Si tenemos:

Ningún C es A,
Todo B es C;

luego Ningún B es A *(Celarent);*

y si aplicamos la transformación *s* a la conclusión, obtenemos:

Ningún C es A,
Todo B es C;

luego Ningún A es B *(Celantes).*

Estos cinco silogismos indirectos serán puestos aparte formando la 4ª figura y representados respectivamente por las palabras:

I) Fesapo: Ningún C es B,
Todo B es A;
luego Algún A no es C.

II) Fresison: Ningún C es B,
Algún B es A;
luego Algún A no es C.

---

[108] *Primeros Analíticos* I, cap., VII, 29 a,24.
[109] *Primeros Analíticos* II, cap., I,52 b, 10.

III) Bramantip: Todo B es C,
Todo C es A;
luego Algún A es B.

IV) Dimaris: Algún B es C,
Todo C es A;
luego Algún A es B.

V) Camenes: Todo B es C,
Ningún C es A;
luego Ningún A es B.

Silogismos de la 2ª figura

"Cuando el mismo término conviene a todos los casos de un sujeto y a ninguno de los del otro, o bien a todos los de ambos o a ninguno de los de ambos, a esta clase de figura la llamo la segunda. En ella llamo término medio al que se predica de ambos sujetos; y extremos a aquellos de los que éste es dicho: el extremo mayor, aquél que está colocado más próximo del término medio; el extremo menor, aquél que está más alejado. El término medio está colocado fuera de los términos extremos, y es el primero por su posición. El silogismo en esta figura no será en modo alguno perfecto. Será, sin embargo, válido, tanto si los términos son universales como si no lo son"[110].

En esta definición distingue Aristóteles tres situaciones:

1ª) Que las premisas sean una universal afirmativa y otra universal negativa.

2ª) Que las premisas sean ambas universales afirmativas.

3ª) Que las premisas sean ambas universales negativas.

Sólo en la 1ª situación cabe establecer silogismos concluyentes ya que sólo entonces cabe establecer silogismos que pueden ser reducidos a la 1ª figura a excepción[111] de *Baroco* que sólo puede ser demostrado *per impossible*.

Reglas de la 2ª fig:

a) Una de las premisas ha de ser negativa;

b) La mayor ha de ser universal *(una negans precat, nec maior sit specialis)*.

Para los términos de la 2ª figura usa Aristóteles las letras M (término medio), N (término mayor) y X (término menor), y establece los siguientes cuatro modos válidos:

1er modo (CESARE)

"Si M no se predica de ningún N, y se predica de todo X, puesto que la proposición negativa es convertible, N no convendrá a ningún M. Pero M convenía por hipótesis a todo X; luego N no convendrá a ningún X; esto es lo que hemos demostrado". En forma canónica:

Si ningún N es M
y todo X es M,
entonces ningún X es N.

Y aplicando la transformación *s* de *Cesare* a la premisa mayor obtenemos un silogismo en *Celarent*:

Si ningún M es N
y todo X es M,
entonces ningún X es N.

2º modo (CAMESTRES)

"Si M conviene a todo N, y no conviene a ningún X, entonces X no convendrá tampoco a ningún N, porque si M no conviene a ningún X, X tampoco convendrá a ningún M; pero como, por hipótesis, M conviene a todo N, X no convendrá, por lo tanto, a ningún N; de este modo volvemos a la 1ª figura. Pero, como la (conclusión) negativa es convertible, N no convendrá tampoco a ningún X, de modo que el silogismo será el mismo. También se puede demostrar esto por reducción *ad impossible*".

En esquema:

Si todo N es M
y ningún X es M,
entonces ningún X es N.

Y aplicando las transformaciones *m*, *s*, *s*, de *Camestres*, tenemos:

Si ningún M es X
y todo N es M,
entonces ningún N es X *(Celarent)*.

3er modo (FESTINO)

"Si M no conviene a Ningún N y sí a algún X, entonces necesariamente N no conviene a algún X. Porque al ser convertible la (premisa) negativa, N no convendrá a ningún M. Pero, como, por hipótesis, M conviene a algún X, N no convendrá a algún X; porque el silogismo entonces será de la 1ª figura". En efecto:

Si ningún N es M
y algún X es M,
entonces algún X no es N.

Ya que aplicando la transformación *s* de *Festino* a la premisa mayor, tendremos:

Si ningún M es N
y algún X es M,
entonces algún X no es N *(Ferio)*.

4º modo (BAROCO):

"Luego, si M conviene a todo N y no conviene a ningún X, entonces es necesario que N no convenga a algún X. Porque, si conviene a todo X, puesto

---

[110] *Primer. Anal.* I, 5, 26 b,34-27 a,3.

[111] *Primer. Anal.* I, cap. 5.

que M se predica de todo N, M ha de convenir a todo X; pero por hipótesis no convenía a alguno". En esquema:

Si todo N es M
y algún X no es M
entonces algún X no es N,

ya que aplicando la transformación *c* de *Baroco* tenemos:

Premisa mayor: Si todo N es M
Contradicción de la conclusión: y todo X es N
Silogismo en *Barbara:* entonces todo X es M;
con la conclusión que contradice la premisa menor que había supuesto.

Por lo tanto queda establecida, aunque indirectamente, la conclusión: "Algún X no es N" porque de no ser así (si se supone su negación) se llega a una contradicción, lo cual no es admisible en lógica.

Silogismos de la 3ª figura

"Cuando a un mismo término le conviene (de los otros dos) uno universalmente y no le conviene universalmente el otro, o ambos le convienen universalmente, o no le convienen universalmente, llamo a esto tercera figura"[112].

También aquí distingue Aristóteles tres situaciones, y también sólo en la primera (cuando las premisas son una universal afirmativa, y la otra universal negativa) cabe establecer silogismos concluyentes, que, como en la 2ª figura, Aristóteles demuestra por medio de reducción a modos de la 1ª figura, a excepción de *Bocardo* que demuestra por reducción *ad impossibile*.

Para los términos de la 3ª figura utiliza Aristóteles las letras P (término mayor), R (término menor) S (término medio). Y aquí es preciso tener en cuenta dichas letras, porque su colocación (θέσις) sirve para determinar cuál es la premisa mayor y cuál la menor, ya que Aristóteles no siempre pone en 1er lugar la premisa mayor (en los modos *Felapton, Disamis, Datisi* y *Bocardo* viene en 1er lugar la premisa menor).

Reglas especiales de 3ª figura:
a) La premisa menor debe ser afirmativa
b) La conclusión particular.
(sit minor affirmans, conclusio particularis)

1er modo (DARAPTI)

"Si los términos universales, p.e., P y R convienen a todo S (tendremos) que P conviene necesariamente a algún R; porque, al ser convertible la (premisa) afirmativa, S convendrá a algún R, pero, puesto que P conviene a todo S, y S a algún R, P ha de convenir a algún R, y entonces surge una conclusión por la 1ª figura". La misma demostración se puede hacer también por reducción *ad impossibile* y por ἔκθεσις (exposición)[113]. En forma canónica:

Si todo S es P
y todo S es R
entonces algún R es P;

ya que aplicando la transformación *p* de *Darapti*, obtenemos:

Si todo S es P
y algún R es S,
entonces algún R es P.

Prueba de *Darapti* por ἔκθεσις

(1) Supuestas las premisas:
Todo S es P
Todo S es R. Tenemos:

(2) Si $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix}$, entonces "Algún R es P"

Tesis evidente, igual que su conversa, también evidente.

(3) Si todo S es P
y todo S es R,

ent. $(\exists C)$ tal que $\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix}$

Prueba:

(4) $\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix}$

Ident. Tautol.

(5) $\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix} \rightarrow (\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix}$

Introd. ∃. Teorema.

(6) $\begin{pmatrix}\text{Todo S es P}\\ \text{Todo S es R}\end{pmatrix} \rightarrow (\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix}$

Sust. variable libre C por S.

(7) $(\exists C)\begin{pmatrix}\text{Todo C es P}\\ \text{Todo C es R}\end{pmatrix}$

M.P. 6, 1.

---

[112] *Primr. Anal.* I, 6, 28 a, 10-12.
[113] *Primer. Anal.* I, 6, 28 a, 18-29.

(8) Algún R es P
M.P. 2, 7.

2º modo (FELAPTON)

"Si R conviene a todo S y P no conviene a ningún S, la conclusión será que P no conviene necesariamente a algún R. Podemos emplear el mismo modo de demostración convirtiendo la proposición R, S, y se podrá demostrar también por lo imposible, como en lo que precede". Así (Habida cuenta de que aquí la premisa mayor es la que viene en 2º lugar):

Si ningún S es P
y todo S es R,
entonces algún R no es P;

ya que aplicando la transformación *p* de *Felapton* a la premisa universal afirmativa obtenemos:

Si ningún S es P
y algún R es S,
entonces algún R no es P *(Ferio)*.

3er modo (DISAMIS)

"Si R conviene a todo S, y P a algún S, necesariamente P convendrá a algún R, ya que al ser la premisa afirmativa convertible, S convendrá a algún P; y, puesto que R conviene a todo S, y S a algún P, R convendrá también a algún P, por lo que P convendrá también a algún R".

Si algún S es P
y todo S es R,
entonces algún R es P;

ya que mediante las transformaciones *s*, *m*, y *s* de *Disamis* obtenemos:

Si todo S es R
y algún P es S,
entonces algún P es R *(Darii)*.

4º modo (DATISI)

"Si R conviene a algún S y P a todo S, P convendrá necesariamente también a algún R. El modo de demostración es, en este caso, el mismo".

Si todo S es P
y Algún S es R,
entonces algún R es P;

ya que, aplicando la transformación *s* de *Datisi*, obtenemos:

Si todo S es P
y algún R es S,
entonces algún R es P *(Darii)*.

5º modo (BOCARDO)

"Si R conviene a todo S, y P no conviene a algún S, P necesariamente no convendrá a algún R; porque, si conviene a todo R y R a todo S, P convendrá también a todo S; mas no le convenía. También se demuestra sin reducción a lo imposible, si se supone un S al que no conviene P". Así:

Si algún S no es P
y Todo S es R,
entonces algún R no es P.

Por reducción *ad impossible* tenemos el siguiente esquema en lógica de proposiciones, siendo α premisa mayor; β premisa menor; γ conclusión.

(1) $(\alpha \,\&\, \beta) \rightarrow \gamma$
(2) $(\beta \,\&\, \alpha) \rightarrow \gamma$.....conmutativ. en 1
(3) $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$..... ley de export.
(4) $\beta \rightarrow (-\gamma \rightarrow -\alpha)$..... ley de contrap. en 3
(5) $(\beta \,\&\, -\gamma) \rightarrow -\alpha$.....ley de imp. en 4
(6) $(-\gamma \,\&\, \beta) \rightarrow -\alpha$.....conmutativ. en 5.

La marcha de la prueba es la siguiente: de las dos premisas α y β se sigue la conclusión γ, porque si no, esto es, si se siguiese la negación de γ, entonces se sigue la negación de α, lo que entra en contradicción con el supuesto de que se daba α, y la contradicción no es admisible, por tanto hay que rechazar el supuesto de que se sigue la negación de γ. En consecuencia cabe concluir que se sigue γ.

Esto es:

Si todo R es P
y todo S es R,
entonces todo S es P *(Barbara)*.

6º modo (FERISON)

"Si P no conviene a ningún S y R a alguno, P necesariamente no convendrá a algún R; y tendremos de nuevo 1ª figura, convirtiendo la premisa R S". Así:

Si ningún S es P
y algún S es R,
entonces algún R no es P.

ya que aplicando la transformación *s* de *Ferison* a la premisa menor, obtenemos:

Si ningún S es P
y algún R es S,
entonces algún R no es P *(Ferio)*.

Otros modos silogísticos

Además de las 19 modos válidos repartidos en tres figuras (luego en 4) parece que Aristóteles, indicó, aunque indirectamente, los otros cinco modos "subalternos" que completan todos los 24 modos posibles válidos: 6 para cada figura. Estos modos "subalternos" salen de la aplicación de la subalternación a las conclusiones universales de los silogismos válidos. Así:

En la 1ª figura

(1) De *Barbara* cabe concluir también en *Barbari*
(2) De *Celarent* " *Celaront*.

En la 2ª figura

(1) De *Cesare* cabe concluir también en *Cesaro*

(2) De *Camestres* " *Camestrop*

En la 4ª figura

(1) De *Camenes* " *Calemop*

De manera que los 24 modos silogísticos válidos de las 4 figuras (6 en cada una) vienen representados como sigue:

1ª figura: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari, Celaront.*

2ª figura: *Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro, Camestrop.*

3ª figura: *Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Fresison.*

4ª figura: *Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison, Calemop.*

4.3. Axiomatización de la silogística de Lukasiewicz

En su valioso libro sobre la silogística aristotélica (*op. cit.*) somete Lukasiewicz toda la silogística aristotélica al tratamiento formalista de la lógica moderna, utilizando una simbología formal, y estructurando la tradicional teoría de la inferencia, tanto la inmediata (conversión y obversión de las proposiciones incluyendo también la subalternación) como la mediata (modos silogísticos), en un sistema axiomático.

En este sistema formal axiomático encontramos:

Simbología

Los símbolos constantes utilizados por Lukasiewicz [y que siempre van colocados delante de las variables o fórmulas sobre las que recaen; p.e., CpCNpq equivale en nuestra simbología a: $p \rightarrow (- p \rightarrow q)$] son éstos:

a) *Constantes de la lógica proposicional*:

N Negación
C Implicación
K Conjunción
A Alternativa (vel)
E Equivalencia

b) *Constantes silogísticas*:

A proposición universal afirmativa
E proposición universal negativa
I proposición particular afirmativa
O proposición particular negativa

c)*Variables silogísticas*: Son variables-término que tienen por valores términos universales: "animal", "hombre", "mortal", y que Lukasiewicz representa por *a, b, c, ...*

Así, p.e., Aab: "Todo *a* es *b*"; Ibc: "algún *b* es *c*"

d) Para la axiomatización parte de dos términos primitivos, definiendo los otros en función de ellos.

Términos primitivos: A y I

Definiciones:

1) E ≡ - I
2) O ≡ - A

Axiomas

(1) Aaa : Todo A es A
(2) Iaa : Algún A es A
(3) CKAbcAabAac:

Si Todo B es C
y Todo A es B,
entonces Todo A es C

BARBARA: Abc, Aab / Aac

(4) CKAbcIbalac:

Si todo B es C
y Algún B es A,
entonces Algún A es C

DATISI: Abc, Iba / Iac

Reglas de inferencia

1) Sustitución.
2) Separación. (M. P.)

Ejemplos de Deducción

- *Subalternación*

- (1) Aab ∴ Iab

Prueba

- (1) Aab
(2) Iaa..... Ax. 2
(3) Iab.....Ax. 4

- *Conversión Accidental*

- (1) Aab ∴ Iba

Prueba

- (1) Aab
(2) Iaa..... Ax. 2
(3) Iab.....Datisi
(4) Aaa.....Ax. 1
(5) Iab.....(3)
(6) Iba.....Datisi (4, 5)

- *Conversión simple de I*

- (1) Iab.....∴ Iba

Prueba

- (1) Iab
(2) Iba.....Ax. 4, Ax. 1 y (1):
Ax. 1. Aaa
(1) Iab
(2) Iba... Datisi.

• *Darapti*

- (1) Aab ∴ Icb
- (2) Aac

Prueba

- (1) Aab
- (2) Aac
- (3) Iac..... Subaltern. (2)
- (4) Icb..... Datisi (1, 3)

• *Cesare*

- (1) Eab ∴ Eca
- (2) Aab

Prueba

- (1) Eab
- (2) Acb
- (3) Ica..... S.
- (4) Iab..... Datisi (2, 3)
- (5) Ica → Iab..... I.I. (3, 4)
- (6) - Iab → - Ica..... Ley contrap. (5)
- (7) Eab → Eca..... Def. (6)
- (8) Eca.....M.P. (7,1)

• *Fesapo*

- (1) Eab ∴ Oca
- (2) Abc

Prueba

- (1) Eab
- (2) Abc
- (3) Aca..... S.
- (4) Icb..... conv. acc. de (2) (ya probado)
- (5) Iba..... Tesis 4 entre (3) y (4): Datisi
- (6) Iab..... conv. simple de (5)
- (7) Aca → Iab..... I.I. (3, 6)
- (8) - Iab → - Aca..... Ley contrap. en (7)
- (9) Eab → Oca..... Def. (8)
- (10) Oca ..... M.P. (9,1)

también:

- (1) Eab
- (2) Abc
- (3) Aca..... S
- (4) Icb..... conv. acc. de (2)
- (5) Iba..... Tesis 4 entre (3) y (4)
- (6) Iab..... conv. simple (5)
- (7) Iab & Eab..... I.C. (6)
- (8) - Aca..... I.N. (3-7)
- (9) Oca..... Def. (8)

• *Baroco*

- (1) Aab ∴ Oca
- (2) Ocb

Prueba

- (1) Aab
- (2) Ocb
- (3) Aca..... S.
- (4) Acb..... Ax. 3 entre (1, 3)
- (5) Aca → Acb..... I.I. (3, 4)
- (6) - Acb → - Aca.. Ley contrap. en (5)
- (7) Ocb → Oca..... Def. (6)
- (8) Oca..... M.P. (7, 2)

también:

- (1) Aab
- (2) Ocb
- (3) Aca..... S.
- (4) Acb..... Ax. 3 entre (1, 3)
- (5) Acb & Ocb .....I.C. (4,2)
- (6) - Aca ..... I.N. (3-5)
- (7) Oca..... Def. (6)

5. Teoría de la Ciencia (Segundos Analíticos)

5.1. El silogismo científico

Para que un silogismo sea científico no basta con que sea correcto, con que cumpla los requisitos formales expresados en los *Primeros Analíticos*. Aristóteles establece una clara diferencia entre silogismo sin más (lógica formal) y demostración o silogismo científico (teoría de la ciencia). A esta última materia dedica los *Segundos Analíticos*.

Entre los varios modos de saber[114] está, dice Aristóteles, el saber científico o por demostración:

> "Creemos poseer la ciencia de algo en sentido pleno, en oposición al saber accidental, al modo sofístico, cuando creemos conocer la causa por la que la cosa existe, porque es realmente causa de ella y no puede ser de otro modo"[115].

114 "Que haya otro modo de saber, es cosa que diremos más adelante (*Segundos Analíticos*, I, 2, 71 b, 16).
115 *Segundos Analíticos*, I, 2, 71 b, 9-12.

"La demostración es un tipo de silogismo, pero no todo silogismo es una demostración"[116].

"Llamo demostración al silogismo científico, y llamo silogismo científico a aquel que por la sola razón de poseerlo nos falculta para poseer ciencia de algo. Y si la ciencia consiste, efectivamente, en lo que hemos dicho, resulta también necesario que la ciencia demostrativa parta de principios verdaderos, primeros, inmediatos, y a la vez más conocidos, más primitivos y causa de la conclusión. Pues sólo así serán los principios (ἀρχαὶ) adecuados para lo que se trata de probar. Porque, sin estas condiciones, podrá haber silogismo, pero no demostración, pues entonces el silogismo no producirá ciencia"[117].

En esta exposición programática de la naturaleza del conocimiento científico cabe distinguir dos tipos de condiciones impuestas a la ciencia:

1.- Condiciones objetivas referentes a la naturaleza de los principios: la demostración ha de partir de principios verdaderos (ἐξ ἀληθῶν).
2.- Condiciones metodológicas, independientes del valor objetivo de los principios: la demostración ha de hacerse por la causa (δι'αἰτίαν).

Estos dos tipos de condiciones son independientes, según reconoce implícitamente Aristóteles cuando dice que los no sabios, los sabios que se equivocan, creen conocer, como auténticos sabios, por la causa[118]. Por consiguiente, puede haber silogismos científicos que son falsos aunque se atengan a las reglas metodológicas.

Naturaleza de los principios científicos

Por la naturaleza de los principios se distingue la ciencia de la dialéctica: los razonamientos científicos parten ἐξ ἀληθῶν en tanto que los razonamientos dialécticos parten ἐξ ἐνδόξων. A la explicación de los principios científicos dedica Aristóteles el capítulo 19 del libro II de los *Segundos Analíticos*, aunque también hay apuntes al principio del libro primero; y parte para ello de la problemática tratada por Platón en el Menón[119].

Los principios (ἀρχαὶ), otras veces llamados κοιναὶ ἀρχαὶ o simplemente τὰ κοινά[120], son las verdades originarias de donde toma el resto su valor científico.

"Llamo principios en cada género a los elementos cuya existencia no puede ser probada"[121].

Estos principios son identificados, por una parte, con las *hipótesis* (ὑποθέσεις)[122], y, por otra, con las premisas del silogismo (προτάσεις)[123], que conllevan afirmación de existencia, aunque a veces también con las *tesis* (θέσεις) del silogismo[124], que no conllevan afirmación de existencia[125].

La distinción entre el conocimiento de la significación (τί ἐστιν) y el conocimiento de las proposiciones de las que se aprehende su existencia (ὅτι ἔστιν) o su verdad, tratada con más detalle en los capítulos 1 y 2 del libro II de los *Segundos Analíticos*, no está muy clara incluso para Aristóteles mismo. En todo caso, la existencia que aquí tiene *in mente* Aristóteles no es la existencia actual, individual, en el tiempo y en el espacio, sino que se trata de una existencia eterna, necesaria. Y así[126], si bien resulta imposible decir del hircocervo lo que es, no obstante se debe decir de la unidad y del triángulo que existen: "el geómetra acepta previamente la definición de triángulo, probando seguidamente su existencia"[127].

En lo concerniente a los principios de la ciencia (de la demostración), el conocimiento de su significación y la afirmación de su existencia, aunque distinguibles entre sí, pueden ir inseparables, porque hay principios que al aprehender su significación (su esencia), simultáneamente se establece su existencia. Como ejemplo pone Aristóteles el conocimiento de la unidad: con respecto a ella "es preciso sepamos, al mismo tiempo, qué significa (τί σημαίνει) y que existe (ὅτι ἔστιν)"[128]. En cambio, el principio *de tertio excluso* es aducido[129] como ejemplo de principio científico en el que lo que se precisa conocer es su existencia misma: una existencia pura. Este es un principio formal, pero sin contenido de donde quepa deducir unos conocimientos particulares.

---

[116] *Primeros Analíticos* I, 4, 25 b, 30.
[117] *Segundos Analíticos*, I, 2, 71 b, 18-25.
[118] *Segundos Analíticos*, I, 2, 71 b, 9-13.
[119] *Ibidem* I, 32, 88 a, 36.
[120] *Ibidem* I, 11, 77 a, 27.
[121] *Ibidem* I, 10, 76 a, 31.
[122] "Es evidente, que éstos son los principios (αρχαι) y las llamadas hipótesis (υποθεσεις). *Ibidem* I, 19, 81 b, 15.
[123] *Ibidem* I,23, 84 b, 37.
[124] *Ibidem* I, 2, 72 a, 15.
[125] *Ibidem* I, 2, 72 a, 20-25.
[126] *Segundos Analíticos*, II, 7.
[127] *Ibidem* II, 7, 92 b, 16 y II, 9, 93 b, 24.
[128] *Ibidem* I, 1, 71 a, 15.
[129] *Ibidem* I, 1, 71 a, 14.

Estos dos ejemplos conducen a otra distinción que Aristóteles introduce entre los principios mismos. Tal distinción recae exclusivamente sobre las existencias, sobre las verdades:

> "Los principios son de dos clases: aquellos de los que parte la demostración (ἀρχαὶ ἐξ ὧν), y el objeto a que la aplicamos (ἀρχαὶ περὶ ὅ). Los principios ἐξ ὧν son los comunes (κοιναί); los περὶ ὅ son los propios (ἴδιαι), como el número y la magnitud"[130].

Los principios ἐξ ὧν son llamados ἀξιώματα, κοινὰ ἀξιώματα o κοιναὶ ἀρχαὶ, y entendidos como los *últimos principios* que usamos como fundamentos en toda demostración:

> "los principios comunes a partir de los cuales todo es demostrado"[131].

Por axiomas, pues, parece entender Aristóteles los grandes principios -el principio del *tertio excluso*, o el de que las cantidades iguales continúan siendo iguales siempre-[132] que rigen el razonamiento y que resultan absolutamente necesarios para toda clase de silogismo. Según esto, los axiomas no son propiamente los principios del conocimiento científico; aquéllos quedan más allá y fuera de la ciencia, hasta el punto de que incluso "la dialéctica usa todos estos principios"[133].

Los auténticos principios de la ciencia son los principios περὶ ὅ, cuya existencia indemostrable es conocida al mismo tiempo que su significación (su esencia) es comprendida; constituyen las hipótesis últimas de la ciencia y en cuanto tales forman juicios de existencia[134]: puntos de partida en las demostraciones, premisas en los silogismos. Son además aprehendidos inmediatamente como verdaderos y se imponen a nuestra afirmación. Se distinguen de las definiciones en que éstas no conllevan afirmación de existencia y sólo necesitan ser comprendidas, pero coinciden con ellas en que nos proporcionan el conocimiento y la expresión de una esencia real, y el conocimiento de la esencia (τί ἐστιν) no se concibe separado de la afirmación de la existencia (ὅτι ἔστιν)[135].

Estos principios proporcionan su indemostrable contenido originario, siendo, pues, propios de cada ciencia, y a partir de ellos el resto de la ciencia aparece como un despliegue:

> "De los principios primitivos y de todo aquello que en ellos se encuentra, ya sea parte, ya modificación esencial de los mismos se forma una sola ciencia, ciencia de género único"[136].

Como ejemplos de principios περὶ ὅ suele citar Aristóteles a lo largo del libro I de los *Segundos Analíticos*, ejemplos matemáticos, los cuales inducen a considerar que dichos principios constituyen un pequeño número de esencias simples de las que procede toda la ciencia. Así dice Aristóteles:

> "*Línea* pertenece [esencialmente] a *triángulo*, y *punto* a *línea*. Efectivamente, la esencia del triángulo y de la línea se compone de esos elementos, y esos elementos entran en la proposición que expresa lo que son el triángulo y la línea. Llamo también esenciales a todas aquellas cosas cuya definición esencial puede darse únicamente por mediación de las cosas mismas cuyos atributos son esencialmente. Por ejemplo, *recta* y *curva* pretenecen a la *línea; par* e *impar, primo* y *múltiple, cuadrado* y *rectángulo* pertenecen al *número;* y la proposición que expresa la esencia de cada uno de estos elementos incluye la línea o el número respectivamente"[137].

Y también:

> "Atribución esencial (καθ'αὑτό) es lo mismo que atribución a un sujeto *qua tale* (ᾗ αὐτό). Por ejemplo, *punto* y *recta* pertenecen esencialmente a *línea*, puesto que también pertenecen a ella *qua* línea; y 'tener la suma de sus ángulos igual a dos rectos' pertenece al triángulo *qua* triángulo, porque esencialmente un triángulo tiene la suma de sus ángulos igual a dos rectos"[138].

Los principios propios de cada ciencia, serían, según esta perspectiva, muy pocos, pero que contendrían en potencia las restantes proposiciones de su género. Así, por ejemplo[139], cuando sabemos el principio superior "todo triángulo tiene sus ángulos iguales a dos rectos", sabemos también en potencia -aun cuando no sepamos que el isósceles es un triángulo- que el isósceles tiene sus ángulos iguales a dos rectos.

---

130 *Segundos Analíticos* I, 33, 88 b, 27-29 y I, 7, 75 a, 39-75 b, 5.
131 *Ibidem* I, 11, 77 a, 31.
132 *Ibidem* I, 32, 88 a, 36.
133 *Ibidem* I, 11, 77 a, 29.
134 *Ibidem* I, 2, 72 a, 20; I, 10, 76 b, 35.
135 *Ibidem* II, 1, 89 b, 34 y II, 7, 92 b, 5.
136 *Segundos Analíticos* I, 28, 87 a, 38-40.
137 *Ibidem* I, 4, 73 a, 36-73 b, 3.
138 *Ibidem* I, 4, 73 b, 29-33.
139 *Ibidem* I, 24, 86 a, 22.

Pero frente a esta consideración del reducido número de principios, cabe aducir otros textos de Aristóteles -especialmente el capítulo 32 del libro I de los *Segundos Analíticos*- en los que el número de principios parece acrecentarse considerablemente. Bástenos éste:

> "Los principios son aproximadamente tan numerosos como las conclusiones, porque las premisas son principios y las premisas se forman añadiendo un término o intercalando un medio"[140].

Estas consideraciones sobre el número de principios reflejan dos concepciones diferentes de la ciencia: la ciencia como consistente en largas cadenas de deducciones a partir de principios poco numerosos y muy generales, o bien la ciencia como esfuerzo constante de experiencia en los campos (géneros) particulares huyendo de lo general. No parece que Aristóteles optase decididamente por una de dichas concepciones; la misma indecisión muestra Aristóteles en la explicación de cómo se adquieren los principios (gnoseología). Su teoría del conocimiento de los principios oscila entre el punto de vista sensualista -cuando des-cribe (capítulo 19 del libro II de los *Segundos Analíticos)* la formación del universal y el conocimiento de los principios por inducción: la inducción a partir de la sensación, mediante la permanencia y la repetición de imágenes sensibles, nos permite la formación del universal; la sensación basta por sí misma, pues, para dar cuenta del conocimiento de los principios[141]- y el punto de vista metodológico: lo que debe ser la adquisición de los principios para que éstos puedan ser fundamento de la ciencia; ello requiere que la aprehensión de los principios nos proporcione no sólo conocimiento de la clase, sino del universal esencial καθ'αὑτό y de lo necesario, a lo cual no cabe acceder por la sensación, sino por la intuición intelectual, por el νοῦς activo e impasible. Sólo mediante dos facultades alcanzamos la verdad: la ciencia (ἐπιστήμη) y la intuición (νοῦς); como, por otra parte, nada hay más claro que la ciencia, si no es la intuición, y como toda ciencia es una cadena de demostraciones a partir de principios y los principios de las demostraciones son siempre más claros que las conclusiones, no hay ciencia de los principios; y finalmente, como no poseemos otra facultad para alcanzar la verdad, sólo cabe concluir como concluye Aristóteles en los *Segundos Analíticos:* νοῦς ἄν εἴη ἐπιστήμης ἀρχή.

5. 2. Método científico

Al lado de las condiciones objetivas que exige a la demostración (a la ciencia) -verdad de las premisas- Aristóteles señala otro tipo de condiciones con independencia del valor objetivo de las premisas y que conciernen al mecanismo de la demostración, al método de la ciencia: la demostración (la ciencia) debe ser hecha por la causa δι'αιτίας. Esta condición metodológica coincide, o al menos converge, con estas otras: "la ciencia es conocimiento de lo universal" y "la ciencia es conocimiento de lo necesario".

Lo universal

> "No cabe adquirir ciencia mediante la sensación, porque la sensación lo es necesariamente de algo en algún lugar y en un momento determinados... La sensación atañe, pues, necesariamente a los particulares (καθ 'ἕκαστον), en tanto que la ciencia atañe a lo universal (τὸ καθόλου)"[142].

La tesis de que la ciencia tiene por objeto lo universal aparece formulada repetidamente en los *Segundos Analíticos:*

1.- No hay ciencia de las cosas perecederas; la ciencia tiene por objeto lo eterno y ello en virtud de que recae siempre sobre lo universal (Libro I, capítulo 8).

2.- La demostración necesita universales (atribuir con verdad un predicado a una pluralidad de sujetos), no ideas en sentido platónico (Libro I, capítulo 11).

3.- "El que conoce lo universal conoce más que aquel que únicamente conoce lo particular" (Libro I, capítulo 24, 85 b, 14).

4.- "Siendo la demostración un silogismo que prueba la causa y el porqué de la cosa, lo universal es más causa (porque la cosa a la que se atribuye algo esencialmente es por sí misma causa de ese atributo, y, siendo lo universal lo primitivo, será la causa). Por lo tanto la demostración universal es superior, porque es más de la causa y del porqué" (Libro I, capítulo 24, 85 b,23-27).

Que la ciencia tiene por objeto lo universal es tesis claramente defendida por Aristóteles. Lo que no resulta

---

[140] *Segundos Analíticos* I, 32, 88 b, 4-6.

[141] "Por lo tanto -concluye Aristóteles en este capítulo (100 b, 4)- es evidente que necesariamente conocemos los primeros principios por inducción, porque éste es también el modo en que la sensación produce en nosotros lo universal".

[142] *Segundos Analíticos* I, 31, 87 b, 29-39.

ya tan claro es qué entiende Aristóteles por universal o, al menos, cómo interpretar sin lugar a contradicción la definición que ofrece:

> "Llamo universal (καθόλου) a lo que pertenece a todos y cada uno (κατὰ παντός) y esencialmente (καθ'αὑτό) y en cuanto tal (ᾗ αὐτό)"[143].

Según esta definición, el universal comporta, a la vez, la consideración de una clase, la suma de las partes (o individuos) que componen el todo (καθόλου κατὰ παντός), y la consideración de una esencia, independientemente de su comunicación a los que la poseen (καθόλου καθ'αὑτό). Si se concede la prioridad al universal κατὰ παντός, la ciencia aparecerá como constatación y enumeración de *hechos* y de seres concretos; si por el contrario es el aspecto καθ'αὑτό el fundamental, entonces la ciencia habrá de ser considerada como esencialmente abstracta: versa sobre *esencias* y leyes.

En el primer supuesto, la repetición y la regularidad pasa a primer plano en el conocimiento, y a la ciencia compete conocer las clases y unificar las multiplicidades en el universal κατὰ παντός. Desde la segunda perspectiva, el único medio de afirmar la universalidad entre una suma de hechos individuales, que son por definición innumerables (ἄπειρα) es buscar el lazo necesario que los une, y es propio de la ciencia conocer la esencia, si se trata de un ser, o establecer una ley, si se trata de hechos.

La complejidad en la interpretación del καθόλου se acrecienta cuando se toma en consideración los términos que a él opone Aristóteles para designar lo particular: καθ'ἕκαστον y κατὰ μέρος. Tanto en los *Analíticos* como en los *Tópicos* ambas expresiones suelen ser empleadas en el mismo sentido para significar, frecuentemente, lo individual en sentido estricto, lo que es objeto de la sensación[144]; mas también se aplican en otros pasajes, no a los individuos propiamente dichos, sino a las especies, en tanto que opuestas a los géneros, y a los géneros inferiores con respecto a los superiores[145]. Y la relación del καθόλου con el καθ'ἕκαστον difiere según la significación de este último: en el primer caso, se da una relación de oposición entre lo inteligible como tal (lo que es objeto de ciencia) y lo ininteligible como tal (que no puede ser objeto de ciencia). En el segundo caso, se trata de una relación, dentro del dominio de la ciencia, entre un inteligible y otro inteligible.

Respecto de la oscilación de Aristóteles entre el universal καθ'αὑτό y el universal κατὰ παντός, Aristóteles parece inclinarse por el primero como fundamento de la demostración (y de la ciencia).

La razón es que si lo universal es fundamento de la demostración (de la ciencia), es precisamente porque la universalidad es una vía hacia la aprehensión de la necesidad, y la manera de afirmar la universalidad de una conexión entre fenómenos particulares es buscar el lazo necesario que los une, poseer su ley. Sólo una vez percibida la ley cabe afirmar que "si alguien es estrangulado, muere", porque la *estrangulación* es causa esencial de la *muerte*, y no un accidente como lo es el *camino* respecto del *relámpago*, cuando ha relampagueado mientras caminaba[146]. Cuando se trata de hechos, el universal se alcanza poseyendo la ley: es preciso percatarse de que la estrangulación entraña necesariamente la muerte, que se da entre ambos hechos una conexión necesaria, y no accidental como entre el caminar y el relámpago. Cuando no se trata de hechos o fenómenos puramente individuales (estrangulación, relampagueos, etc.) sino de un grupo de *especies* que forman un *género* (como por ejemplo las especies de triángulo: equilátero, isósceles y escaleno), también entonces es el universal καθ'αὑτό el que posibilita y fundamenta el universal κατὰ παντός. En estos casos hay que concocer una esencia, una propiedad o característica genérica común a las distintas especies. De lo contrario, se podrá conocer todos los miembros que componen el todo, pero no se conoce universalmente. Se podrá, ciertamente, llegar a conocer la clase materialmente (πᾶν κατ'ἀριθμόν), pero no formalmente (πᾶν κατ'εἶδος)[147]. Así, por ejemplo, se puede saber que los ángulos del triángulo isósceles valen dos rectos e igualmente los del escaleno y los del equilátero, pero este conocimiento respecto de cada especie de triángulo no nos proporciona el conocimiento del universal:

> "No conocemos universalmente el triángulo, aunque no haya otro triángulo sino aquéllos, porque no sabemos que el triángulo posee dicha propiedad en cuanto triángulo"[148].

Se obtiene el conocimiento universal cuando se sabe que el valor de dos rectos es una propiedad, no del

---

143 *Segundos Analíticos* I, 4, 73 b, 25.
144 *Confert*, por ej., *Primeros Analíticos* I, 27, 43 a, 27; *Segundos Analíticos* I, 31, 87 b, 28-32.
145 *Confert*, por ej., *Segundos Analíticos* I, 5, 74 a, 10; *Ibidem* I, 24, 85 a, 13.
146 *Ibidem* I, 4, 73b, 10-13.
147 *Segundos Analíticos* I, 5, 74 a, 31.
148 *Ibidem* I, 5, 74 a, 29-30.

isósceles o del escaleno en cuanto tal, sino del triángulo en cuanto triángulo. Los ángulos de un triángulo isósceles de bronce valen dos rectos, pero ello no se debe a que es de bronce o a que es isósceles ("ese será todavía su valor eliminado el bronce y el isósceles")[149]. Para conocer universalmente la causa de la igualdad de sus ángulos con dos rectos, hay que ver en ese triángulo isósceles de bronce únicamente el triángulo, pues es en virtud de la triangularidad por lo que la propiedad de valer dos rectos pertenece a ese triángulo y a todos los demás, y por este tipo de universal es por lo que hay demostración[150]. En consecuencia: en tanto no se pase a la consideración del triángulo en cuanto triángulo καθ'αὑτό y ᾗ αὐτό, no se obtiene el universal en el sentido pleno y de fundamento de la ciencia.

Entre el universal esencial o lo constante, que garantizan la necesidad y que son, por tanto, objeto de la ciencia, y lo puramente accidental o lo fortuito, que es en cuanto tal ininteligible y, por tanto, no es objeto de la ciencia, coloca Aristóteles otra categoría de fenómenos, los cuales, si bien no permiten alcanzar la necesidad, pueden, no obstante, ser objeto de demostración (y de la ciencia). En dicha categoría entra lo que "sucede la mayoría de las veces", lo habitual (ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ). Lo habitual se opone a lo necesario y a lo fortuito y es objeto de demostración:

> "No hay ciencia por demostración de lo fortuito (τὸ ἀπὸ τύχης), porque lo fortuito no es ni como lo necesario (ἀναγκαῖον) ni como lo habitual (ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ); es lo que sucede de forma diferente a ambos. La demostración, empero, se aplica sólo a uno o a otro de estos dos. Todo silogismo, en efecto, procede a través de premisas necesarias o habituales. Si las premisas son necesarias, la conclusión es también necesaria; si las premisas son habituales, así es también la conclusión. De aquí que si lo fortuito no es habitual ni necesario, no puede haber de ello demostración"[151].

Lo habitual no designa el fruto de una inducción incompleta, de una observación imperfecta, frente al verdadero καθόλου y lo necesario, que resultaría de una observación acabada. La falta de exactitud no proviene de la observación, sino de la cosa o fenómeno observado, que no alcanza la regularidad y exactitud de los fenómenos celestes[152]. Alejandro de Afrodisia *(In Analytica Priora*, edic. Wallies Acad. Berlín tomo II, pag. 300) da como ejemplos la conexión entre el hecho de ser gorrón y el de procurarse buen trato, y el hecho de ser ladrón y el de salir de noche. Lo habitual es el producto del mundo sublunar, donde reina, no la necesidad absoluta que rige las esferas celestes, sino la necesidad de naturaleza que, ciertamente, admite "faltas" y la producción de "monstruos" por el efecto caprichoso de la materia. Pero lo habitual, la frecuencia, es el signo de la naturaleza, y la excepción no es más que una falta debida a la fortuna o al azar:

> "La experiencia muestra hechos que se producen siempre de la misma manera y hechos que se producen frecuentemente. Además, es evidente que la fortuna no puede ser llamada causa ni de los unos ni de los otros y que los efectos de la fortuna no están ni entre los hechos necesarios y constantes ni entre los hechos que suceden habitualmente"[153].

En el mundo sublunar los fenómenos o bien siguen el orden natural establecido de forma regular, o bien acaecen contra o más allá de la naturaleza. Los fenómenos *contra naturam* quedan en el campo de lo indeterminado e incognoscible; los fenómenos que están más allá de la naturaleza, cuales son las acciones voluntarias de los seres racionales, entran en el campo de lo habitual, del ὡς ἐπὶ τὸ πολύ, y por entrar dentro de lo regular, de lo frecuente, ocupan un lugar seguro en la investigación científica, porque "a base de percibir frecuentemente el fenómeno, dando caza al universal, tendríamos una auténtica demostración[154]".

Todo aquello que se repite regularmente, que resulta ser general, es considerado por Aristóteles digno de interés y propio de la investigación científica; y, en esta perspectiva, la ciencia no consiste sólo en penetrar las razones necesarias, sino en unificar las multiplicidades en el universal κατὰ παντός.

Y es que, en realidad, Aristóteles no pone lo universal como un corolario de lo necesario, sino que, más bien, lo universal es una vía hacia lo necesario y hacia el descubrimiento de la causa. Por eso añade Aristóteles: "la ciencia es de lo necesario" y "de la causa".

---

149 *Ibidem* I, 5, 74 a, 39.

150 *Segundos Analíticos* I, 5, 74 b, 4.

151 *Ibidem* I, 30 87 b, 19-27.

152 Por ejemplo, el hecho, para un hombre, de tener barba. *(Segundos Analíticos* II, 12, 96 a, 9.

153 *Física*, II, 5, 196 b, 10-13. y *De la Generación de los Animales* IV 4, 770 a, 6: "el monstruo pertenece a la clase de cosas *contra naturam:* no contra toda suerte de naturaleza, sino contra lo habitual; pues nada puede suceder contra la naturaleza que es universal y necesaria... Cuando algo sucede así contra lo habitual es que la naturaleza formal no ha podido dominar la naturaleza material".

154 *Segundos Analíticos* I, 31, 88 a, 3-4.

Lo necesario

Según Aristóteles la ciencia se distingue de la dialéctica precisamente por el carácter de necesidad que posee la primera y no la segunda[155].

El conocimiento científico, seguro, a diferencia del sofístico, puramente accidental, exige que el objeto sea conocido como "no pudiendo ser de otro modo" (οὐκ ἐνδεχόμενον ἀλλῶς ἔχειν)[156] o como necesario (ἐξ ἀνάγκης)[157]. Términos, éstos, que Aristóteles emplea como equivalentes en significación a lo largo de los *Segundos Analíticos*[158]. Pero también, como en el caso del καθόλου, la noción de lo necesario resulta bastante compleja, especialmente en los *Analíticos*, por lo que los exégetas suelen acudir a otras obras para elucidar dicha noción. La explicación más detallada de las diversas significaciones de lo necesario aparece en el libro Δ, cap. 5 de la *Metafísica*. Allí distingue Aristóteles hasta cinco especies de lo necesario: 1) Aquello de lo que se tiene necesidad, aquello sin lo cual no es posible vivir. 2) Aquello sin lo cual el Bien no puede ser ni devenir. 3) Lo constriñente y lo forzado. 4) La imposibilidad para una cosa de ser de otra manera de como es: necesidad absoluta y primera; "de esta necesidad deriva, en cierta manera, toda otra necesidad". 5) La necesidad de las demostraciones. Estas diversas significaciones de lo necesario pueden reducirse -como hace Ross[159] basándose en otro texto[160] de Aristóteles también sobre lo necesario- a tres:

a) Hay una necesidad que proviene de la materia: aquella que Aristóteles en la Física llama propiamente necesidad: "la necesidad en las cosas naturales es lo que se denomina su materia"[161]. De ahí que, en Biología sobre todo, la explicación por la necesidad es identificada con la explicación por la materia, y opuesta a la explicación por el bien[162]. Cuando la necesidad material se presenta aislada, libre de la dominación del fin, explica la producción de "monstruos" y las "faltas" de la naturaleza[163]. Sin embargo, la necesidad material no es absoluta; Aristóteles la define, precisamente, como una necesidad *hipotética*[164]: la necesidad propia del instrumento y de su adaptación al trabajo que se quiere realizar ("Supuesto como verdad que hay una cosa, es necesario que tales condiciones se realicen")[165]. Mas la adaptación del instrumento al fin es independiente de la volutad del artesano, quien, para su objetivo, debe someterse a las condiciones de la materia. Así es como procede la naturaleza en general: sus obras pueden considerarse como una victoria sobre esa especie de resistencia que constituye la necesidad material.

b) A la necesidad material opone Aristóteles la necesidad final: "necesidad siguiendo el fin" o "necesidad siguiendo la naturaleza"[166], porque la ley suprema que rige la actividad de la naturaleza es buscar en todo el bien y lo "mejor". La naturaleza, es cual artesano cuidadoso "que no hace nada irracional ni vano", "que no rechaza nada que puede aún ser utilizado", "que obtiene siempre lo mejor dentro de lo posible"[167]. La finalidad natural es la razón soberana de los movimientos que constituyen el mundo, y, en este sentido, la necesidad se confunde con el Bien: frente a la necesidad mecánica que es el azar, la necesidad racional sólo se encuentra en el fin o en aquello que procede del fin.

c) Hay un tercer tipo de necesidad, la necesidad absoluta: la imposibilidad física o lógica de lo contrario. Esta necesidad es propia y sin restricción de los seres eternos, inmutables. Su necesidad es la necesidad de lo inmóvil y, originalmente, de lo simple, que, en cuanto simple, es incorruptible y, por consiguiente, perpetuamente idéntico a sí mismo[168]. Pero esta necesidad

---

155 *Confert Segundos Analíticos* I, 33, 89 a, 2.
156 *Segundos Analíticos* I, 2, 71 b, 12; I, 4, 73 a, 21; I, 6, 74 b, 6.
157 *Ibidem*, I, 4, 73 b, 19; I, 6, 74 b, 5.
158 *Confert*, por ej., *Segundos Analíticos* I, 33, 88 b, 32: "τὸ ἀναγκαῖον οὐκ ἐνδέχεται ἀλῶς ἔχειν".
159 W. D. Ross, *Metaphysics* I, 229.
160 *Metafísica*, 6, 1072 b, 12.
161 *Física*, II, 9, 200 a, 30; *Ibidem*, II, 8, 198 b, 11.
162 *Confert, Las Partes de los Animales* I, 1, 642 a, 17; *De la Generación de los Animales* I, 4, 716 b, 31, etc.
163 *De la Generación de los Animales*, IV, 3, 767 b, 14: "El monstruo no es en absoluto necesario desde el punto de vista del fin y de la intención, sino que es necesario por accidente".
164 *Confert*, por ej., *Física*, II, 9, 200 a, 15.
165 *Física*, II, 9, 200 a, 24.
166 *De la Generación de los Animales*, IV, 3, 767 b, 14.
167 *Del Cielo*, II, 288 a, 30; 290 a, 30; 291 b, 13. *De la Generación de los Animales*, II, 6, 744 b, 16.
168 *Metafísica*, D 5, 1015 b, 12.

puede pertenecer a los seres cambiantes y perecederos, en cuanto "actuales", y existentes en el momento presente[169]. Así, por ejemplo, Sócrates, que está sentado, puede levantarse, pero, cuando está sentado, es necesariamente verdad que está sentado.

De estos tres tipos de necesidad, el primero -la necesidad material, en cuanto que ella explica el azar, los monstruos, y en cuanto que es lo que rige los acontecimientos concretos y las secuencias individuales- no tiene interés para la ciencia, que busca siempre la necesidad de lo general. El segundo, la necesidad final, no queda excluida por Aristóteles para la teoría de la ciencia, ya que, efectivamente, cabe construir silogismos por la causa final. Pero la consideración del bien está prácticamente ausente en los *Analíticos*, en donde la teoría de la ciencia aparece más bien presidida por un ideal matemático, y para Aristóteles en las Matemáticas, a diferencia de lo que sucede en la Biología, no ha lugar para la consideración del bien y del fin: "Las matemáticas no demuestran nada por este tipo de causa; no demuestran nada por lo mejor y lo peor; ningún matemático alude a algo similar"[170]. En consecuencia, es el tercer tipo de necesidad, la necesidad de lo eterno, de lo simple, de lo actual, lo que caracteriza el conocimiento científico. En los *Analíticos* lo necesario va unido al *universale directum*, a la esencia en cuanto tal: "lo necesario en las cosas es lo que les conviene esencialmente"[171]. Saber -para seguir el ejemplo de Aristóteles- que necesariamente un triángulo tiene sus ángulos iguales a dos rectos, es simplemente conocer la esencia de triángulo, conocer el triángulo καθ'αὐτό y ᾗ αὐτό. La necesidad se alcanza cuando se alcanza la esenca. Y decir que la ciencia recae sobre lo necesario equivale a decir que recae sobre la esencia, sobre el universal esencial.

La causa

La ciencia es, además, y ante todo, conocimiento de la causa[172]: la noción de "causa" es, junto con la de "universal" y "necesario", una noción central en los *Segundos Analíticos*, y Aristóteles apela a ella como la característica más fundamental del conocimiento científico. Mas, también como aquellas que acabamos de examinar, resulta compleja[173].

Conocer la causa es conocer el porqué, el διότι de las cosas (el silogismo del διότι es definido[174] como el silogismo de la causa), y "conocer el porqué de las cosas constituye el grado superior del saber"[175].

En *Segundos Analíticos* I, 13 expone Aristóteles la diferencia entre el silogismo del ὅτι y el silogismo del διότι: sólo el último es plenamente científico; hay ciertamente ciencias -la Física: la astronomía náutica, la armonía musical- que recaen sobre el ὅτι, sobre los hechos sensibles; mas tales ciencias son inferiores a las ciencias del διότι -las Matemáticas: la astronomía matemática, la armonía matemática. Las primeras por ser ciencias sólo de hechos no alcanzan el conocimiento de lo necesario ni del universal esencial. Incluso dentro de una misma ciencia caben los dos tipos de razonamiento: hay razonamiento del ὅτι cuando las premisas no son inmediatas, porque "la ciencia del διότι lo es de la causa primera"[176]. Mas, como señala Philopon, ésta característica por sí misma no determina el silogismo διότι: "todos los silogismos del διότι se hacen únicamente a partir del premisas inmediatas; pero no es cierto que todos los silogismos que parten de verdades inmediatas sean silogismos del διότι"[177]. La característica específica del silogismo según el διότι reside en que va de la causa al efecto; es conocimiento *por* la causa; aprehende la causa en cuanto causante, siguiendo, así, el orden real de la inteligibilidad, "inteligibilidad absoluta" (γνωριμώτερον ἁπλῶς): en él la necesidad del razonamiento coincide con la necesidad de la realiadad objetiva. Paralelamente, pero en sentido inverso, el silogismo del ὅτι sigue el orden de la inteligibilidad *quoad nos*, establece el hecho y, si conduce a la causa, no es, sin embargo, conocimiento *por* la causa, porque no lo conoce precisamente en cuanto causante, puesto que no la aprehende en cuanto causa.

Ejemplo: supongamos que la causa del no centellear de los planetas es su proximidad a la tierra. Cabe construir sobre estos términos correlativos los dos silogismos siguientes:

---

169 *De Interpretatione*, 13, 23 a, 21. *Metafísica*, 9, 8, 1050 b, 18.
170 *Metafísica* B, 2, 996 a, 28.
171 *Segundos Analíticos* I, 4, 74 b, 31.
172 *Ibidem*, I, 2, 71 b, 10; I 2, 71 b, 31.
173 Véase L. Robin: "Sur la conception aritotélicienne de la causalité", en *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 1909-10, p. 3 y ss.
174 *Segundos Analíticos* I, 13.
175 *Segundos Analíticos* I, 14.
176 *Segundos Analíticos* I, 13, 78 a, 25.
177 J. Philopon, *In Analytica Posteriora*, edic. Wallies, en la col. Acad. Berlín, XIII, 1909, p. 168.

(1) - Los planetas no centellean
- Lo que no centellea está próximo
∴ Luego los planetas están próximos

(2) - Lo que está próximo no centellea
- Los planetas están próximos
∴ Luego los planetas no centellean

El primero de estos silogismos es del ὅτι; va del efecto a al causa; del no centellear a la proximidad. El segundo va de la proximidad al no centellear; es un silogismo del διότι porque es conocimiento por la causa y, por lo tanto, el único real y plenamente científico.

La búsqueda del διότι se hace a través de las cuatro causas[178] siguientes: la esencia, las condiciones necesarias, la causa eficiente y la causa final. Tres de estas causas pertenecen a la doctrina común aristotélica de las cuatro causas[179]; mas aquí la causa material resulta inapropiada para las ciencias que Aristóteles toma como paradigmáticas -las Matemáticas- y de las que, precisamente, es propiedad el conocimiento de la causa [180]; por ello la causa material es sustituida por la "condición necesaria" o "fundamento"[181].

No todas estas causas desempeñan el mismo papel en el silogismo demostrativo (científico). En el silogismo demostrativo "la causa es siempre exhibida a través del término medio"[182], y en los ejemplos que ofrece Aristóteles[183] de silogismos demostrativos por el empleo de las cuatro causas, el término medio lo que realmente expresa es la causa formal, la esencia. Así:

(1) Silogismo en el que el término medio representa la causa material:
- La mitad de dos rectos es un recto.
- El ángulo inscrito en un semicírculo es mitad de dos rectos.
∴ Luego el ángulo inscrito en un semicírculo equivale a un recto.

Aquí el término medio constituye la definición del término mayor; mas "la definición expresa la esencia y la esencia es la causa que hace de término medio"[184].

(2) Silogismo en el que el término medio representa la causa eficiente, en el tema de la guerra médica en contra de los atenienses:
- Los primeros agresores atraen sobre ellos la guerra.
- Los atenienses han sido los primeros agresores (atacando la ciudad de Jardes de acuerdo con los eritrianos).
∴ Luego fueron los atenienses quienes atrajeron sobre ellos la guerra.

También aquí el término medio, que expresa la causa eficiente, es considerado como una definición del término mayor: "la guerra se hace contra los injustos agresores"[185].

(3) Silogismo por la causa final:
- Es saludable hacer una digestión normal.
- Pasear después de comer es saludable
∴ Luego quien pasea después de comer hace una digestión normal.

Como en los casos anteriores, el término medio es también una definición, y expresa una *quididad*, y representa la razón intrínseca, no una causa externa. Por eso reconoce[186] Aristóteles que el punto de partida de todo silogismo científico es una definición, y precisa[187] que el término medio de tales silogismos está constituido por la definición formal. Por consiguiente, es la causa formal el eje sobre el que gira el silogismo científico, porque también para Aristóteles, por influjo de Platón, la esencia, la idea es el principio real de toda causación y de todo devenir: "toda producción tiene, como los silogismos, por principio la sustancia formal, porque no hay silogismo sino de la esencia y, asimismo aquí, el punto de partida de toda producción es la esencia"[188].

La anterior interpretación concuerda con la afirmación repetida[189] por Aristóteles de que el verdadero conocimiento de un objeto (la ciencia del διότι) solo se alcanza a través del conocimiento de su "causa primera"

---

[178] *Segundos Analíticos* II, 11.
[179] *Confert Física* II, 3.
[180] *Segundos Analíticos* I, 13.
[181] La formulación de esta causa: τὸ τίνων ὄντων ἀνάγκη τοῦτ'εἶναι *(Segundos Analíticos* II, 11, 94 a, 22) está estrechamente emparentada con la definición de silogismo: λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερον τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι *(Primeros Analíticos* I, 1, 24b, 18).
[182] *Segundos Analíticos* II, 11, 94 a, 24 y II, 12, 95 a, 12.
[183] *Ibidem*, II, 2, 94 a, 29 y ss.
[184] *Segundos Analíticos* II, 11, 94 a, 36.
[185] *Ibidem*, 94 b, 5.
[186] *Ibidem* I, 2, 72 a, 15 y 21.
[187] *Ibidem* II, 10, 94 a, 11.
[188] *Metafísica* Z, 9, 1034 a, 31.
[189] *Segundos Analíticos* I, 13, 78 a, 25; 78 b, 4; 78 b, 24; 85 b, 25.

(πρῶτον αἴτιον). Por causa primera entiende aquí Aristóteles, no la causa más elevada o primer motor, ni tampoco la causa más próxima en el espacio y en el tiempo, sino el "universal proporcionado" (καθόλου σύμμετρον), que es la causa verdadera, por cuanto explica la cosa por lo que ella es en cuanto tal, proporcionándonos un conocimiento exacto. Así, no resulta adecuado al método científico pasar de un solo salto a las causas más generales. Por ejemplo[190], no se razona científicamente al concluir que la causa del hecho de que una pared no respira es que no es un animal, "porque si eso fuese la causa primera de la falta de respiración, sería preciso que la animalidad fuese la causa primera de la respiración"; pero no es así, porque hay animales que no respiran. Otro ejemplo[191]: tampoco razonaba científicamente Anacharsis cuando afirmaba que no había flautistas entre los escitas debido a que en Escitia no había viñas. Razonar así es pasar de un salto a la causa más remota; la causa próxima es que los escitas no se embriagan, lo cual proviene a su vez de que no tienen viñas. Y, finalmente, en el ejemplo, tantas veces aducido, del triángulo[192] muestra Aristóteles que el conocimiento de la causa viene a reducirse al conocimiento del universal específico. Por el hecho de conocer que el triángulo isósceles de bronce tiene sus ángulos iguales a dos rectos no conocemos la causa de la igualdad de sus ángulos con dos rectos; sólo tenemos un conocimiento causal y universal, y por tanto, científico, cuando llegamos a saber que dicha propiedad pertenece, no al triángulo isósceles por ser tal ni por ser de bronce, sino al triángulo en cuanto triángulo y esencialmente. En definitiva, para Aristóteles, el conocimiento de la causa del διὰ τί ἔστιν, se reduce al conocimiento de la esencia, del τὸ τί ἐστιν[193].

5. 3. La inducción

Aristóteles trata la inducción desde diversas perspectivas:

a) En el libro II, cap. 23 de los *Primeros Analíticos* estudia Aristóteles la inducción en comparación con el silogismo, buscando hacerla entrar en el esquema silogístico. Esta perspectiva será la pertinente para la lógica formal: se presenta aquí la formulación lógica de la inducción, que supone la recensión de todos los casos. Afirma Aristóteles que sólo se puede legitimar lógicamente la inducción y presentarla con un silogismo correcto si se la supone completa. La inducción es presentada aquí bajo la forma de un silogismo de la tercera figura:

(1) El hombre, el caballo, el mulo, son longevos.

(2) El hombre, el caballo, el mulo, son todos animales sin hiel.

(3) Luego todos los animales sin hiel son longevos.

Lo que, en primer lugar, caracteriza al silogismo inductivo, como expresamente señala Aristóteles, es que no se realiza a través del término medio *natural*, es decir, el medio que representa la causa, sino que "consiste en concluir, apoyándose en el segundo de los extremos, que el otro extremo es atributo del medio"[194]. El *medio* al que aquí se hace referencia no es el medio de *hecho*, el que en el silogismo presentado actúa formalmente como tal, sino el medio de *derecho*, el que resultaría tal en una demostración ordenada según el orden de inteligibilidad en sí, y formulado, por lo tanto, en la primera figura. El silogismo inductivo sigue, pues, el orden de inteligibilidad *quoad nos*, y por lo tanto la inducción es una operación inversa a la demostración del διότι, en la que el término medio es la auténtica causa. Para disponerlo en el orden de inteligibilidad en sí, habría que formular el silogismo en cuestión de la siguiente manera:

(1) Todos los animales sin hiel son longevos

(2) El hombre, el caballo, el mulo, son animales sin hiel.

(3) Luego el hombre, el caballo, el mulo, son longevos.

Sin embargo, esta característica -orden inverso al de la inteligibilidad en sí- no es específica del silogismo inductivo; es también propia del silogismo del ὅτι en general, como hemos visto. La característica esencial del silogismo inductivo, como se desprende de la exposición en este capítulo 23 y en el 22 (que trata de los silogismos con términos convertibles ἀντιστρέφοντα), es

---

190 *Ibidem* I, 13, 78 b, 15 y ss.
191 *Ibidem*, 78b, 30.
192 *Ibidem* I, 5.
193 *Segundos Analíticos* II, 2, 90 a, 31: το τι εστιν ειδεναι ταυτο εστι και δια τι εστιν.
194 *Segundos Analíticos* II, 23, 68b, 16.

la igualdad de extensión de sus tres términos. El silogismo aducido concluye -dice Aristóteles- precisamente en virtud de esa posibilidad de sustitución de los términos, por ser iguales en extensión: "Si C *(individuos longevos, tales como el hombre, el caballo, el mulo)* es convertible con B *(sin hiel)*, i.e., si el término medio[195] no es mayor en extensión que C, entonces es necesario que A *(longevo)* convenga a B, porque ya hemos probado anteriormente que si dos predicados convienen a un mismo sujeto, y el extremo es convertible con uno de ellos, entonces el otro predicado conviene asimismo al otro predicado que por conversión pasó a sujeto"[196]. La inducción, pues, desde el punto de vista silogístico es una especie de silogismo: aquél en que los términos son convertibles. Lo que Aristóteles, en definitiva, parece significar en este capítulo a propósito de la inducción es que para someterla a forma lógica, para meterla en su forma silogística, es necesario establecer la igualdad de extensión entre los términos. Pero de ahí no cabe inferir que sea esta característica la esencial de la inducción en cuanto tal, y menos aún de la inducción entendida como proceso gnoseológico, como la vía para acceder a los principios de la demostración.

b) Aristóteles también trata la inducción desde otra perspectiva en el Libro II, cap. 19 de los *Segundos Analíticos*. Aquí la inducción es presentada como un procedimiento gnoseológico: perspectiva desde la teoría del conocimiento (Gnoseología)[197]. La inducción es una facultad para acceder, antes del razonamiento, al conocimiento de los principios. Facultad que, en algunos momentos del capítulo, es explicada en el sentido sensualista más puro: a la pregunta "¿cómo conocemos algo antes del razonamiento?", responde Aristóteles: "es evidente que una tal facultad pertenece a todos los animales, porque todos ellos gozan de esa facultad innata de discernimiento que llamamos sensación"[198]. Según esto, todo conocimiento viene de la sensación, y no podemos conocer nada sino por la sensación; basta por sí misma para dar cuenta del conocimiento de los principios. El universal específico se forma en nosotros por acumulación y condensación de sensaciones semejantes: son las imágenes sensibles, las αἰσθήματα, las que se detienen, las que se depositan, las que se asocian las que, de este modo, fabrican el universal[199]. Pero, en el mismo capítulo, luego de esta exposición de la inducción, como procedimiento gnoseológico, en el sentido empirista más puro, como mecanismo psicológico, para llegar al conocimiento de los principios, Aristóteles da un salto brusco afirmando que no es la inducción, sino la intuición intelectual, el νοῦς, la que nos proporciona los principios, bases de la demostración:

> "Sólo la ciencia y la intuición nos aseguran el conocimiento verdadero; como, por otra parte, nada hay más claro que la ciencia, sino la intuición, y como toda ciencia consta de razonamientos y los principios del razonamiento son siempre más claros que las conclusiones, no hay ciencia de los principios. Pero nada es más verdadero que la ciencia, sino el νοῦς; por tanto los principios son el objeto del νοῦς"[200].

c) En los *Tópicos*, en fin, libre de las preocupaciones sistemáticas que presidían los tratamientos hasta aquí mencionados, Aristóteles ofrece también una descripción del razonamiento inductivo. La inducción (ἐπαγωγή) es definida[201] como la "la marcha que va de los particulares (τῶν καθ'ἕκαντον) a lo universal (καθόλου)", considerando a lo particular como más próximo a la sensación y más inteligible *quoad nos*, y a lo universal como más intelectual y más inteligible en sí.
Los términos καθ'ἕκαστον y ἄτομα que Aristóteles emplea para designar el punto de partida de la inducción tiene en ciertos pasajes de los *Topicos* el sentido de lo individual[202]. En este sentido la inducción sería conocimiento de lo individual confundiéndose, así, con la sensación misma. No sin razón afirma[203] Alejandro de Afrodisia que la inducción parte de la sensación.

---

195 Se trata, como hemos dicho antes, del término medio de derecho, no el que de hecho aparece como tal en el silogismo inductivo.
196 *Primeros Analíticos* II, 23, 68 b, 24.
197 Véase a este respecto J. Lachelier, *Fondement de l'induction*. Alcan, París, 1896.
198 *Segundos Analíticos* II, 19, 99 b, 34.
199 *Ibidem*, II 19, 100 b, 5.
200 *Segundos Analíticos* II, 19, 100 b, 9-13.
201 *Tópicos* I, 12, 105 a, 13; VIII, 1, 56 b, 15.
202 *Confert*, p. ej., *Tópicos* I, 18, 108 b, 10; IV, 4, 121 a, 37.
203 *In Topica*. Edic. Wallies, 1888. Col. Acad. Berlín. T. II, p 86.

En otros pasajes[204], en cambio, los términos ἄτομον y καθ'ἕκαστον designan, no los individuos, sino "las especies últimas". Aristóteles recomienda fijarse (σκοπεῖν) en las especies (εἴδη) y no en los indefinidos (ἄπειρα). A ello hay que añadir que en la mayoría de los ejemplos sobre la inducción que aparecen en los *Tópicos* se reseñan, no individuos, sino especies o géneros inferiores, pero universales en definitiva.

La doble posibilidad de entender el término "particular" -punto de partida de la inducción- en uno u otro de los sentidos apuntados, depende a su vez de si la inducción es, o no, completa. Si la inducción parte de los particulares entendidos como individuos, no puede ser completa, pues el mismo Aristóteles reconoce[205] que resulta imposible una enumeración completa de los ἄπειρα (término utilizado para designarlos). En cambio, si la inducción se entiende como partiendo de especies o de géneros inferiores, que son siempre limitados en número, entonces puede ser completa. A este tipo de inducción parece referirse Aristóteles cuando establece que para saber si un determinado género lo es realmente, es preciso examinar todos los συγγενῆ uno a uno para verificar si el género les conviene y les conviene como género[206]. Y aquí se señala expresamente que el examen (la inducción) ha de ser completo. La enumeración exhaustiva constituye para Aristóteles un método de prueba y de verificación[207], y por lo tanto no es, en modo alguno, inútil. Así, por ejemplo[208], en el caso de la definición, basta aducir uno en el que no se aplica para destruirla; para construirla, en cambio, hay que establecer que todos los casos la verifican. La inducción ha de ser, pues, en este sentido completa.

Sin embargo, Aristóteles mismo declara, en apoyo del otro sentido -el de la inducción como enumeración no exhaustiva- que, en presencia de un gran número de casos hay que considerar el universal como adquirido; de lo contrario sólo conseguiremos "enrevesar la cuestión"[209]. Según esto, se puede adquirir el universal sin necesidad de una enumeración completa.

6. Teofrasto

De los fragmentos conservados parece desprenderse la conclusión de que las obras de Teofrasto estaban encaminadas a comentar, aclarar o ampliar cuestiones tratadas por Aristóteles, de manera que, en lo concerniente a la lógica, se mantiene dentro de la temática del *Organon* aristotélico. Sólo las *Categorías* quedaron fuera del examen y comentario de Teofrasto. Al *De Interpretatione* aristotélico corresponde el *Sobre la Afirmación* (περὶ καταφάσεως) de Teofrasto. A los restantes libros del *Organon* corresponden las obras de Teofrasto con el mismo nombre: *Primeros Analíticos, Segundos Analíticos, Tópicos...*

Aun cuando Teofrasto es un comentarista más bien que un autor de lógica original, no obstante, explicita algunas tesis sólo sugeridas por Aristóteles. Incluso toma partido, a veces, por una sola de las varias tesis posibles admitidas por su maestro (en la interpretación de la modalidad, por ejemplo). Todo lo cual le permite elaborar un sistema de lógica más simple, más sistemático y más desarrollado en la dirección formalista, que el de Aristóteles, pero sin salirse de él. En este sentido, las aportaciones principales de Teofrasto a la lógica son las siguientes:

Sobre las proposiciones

El tratado *Sobre la afirmación* constituye un comentario y un complemento del *De Interpretatione*, y en él expone Teofrasto algunas tesis dignas de interés.

Las proposiciones κατὰ πρόσληψιν[210].

Llamaba así Teofrasto a las premisas del siguiente tipo: "De lo que [se predica] todo B, de ello también [se predica] todo A". En tales proposiciones, además de los dos términos "determinados" A y B, se toma en consideración un tercer término "medio" -aquel del que se predica B- no determinado y claro como aquéllos (y de ahí el nombre: κατὰ πρόσληψιν, por "tomar además" un tercer término). Y añade Alejandro que en *Sobre la Afirmación* Teofrasto sostiene que tales premisas sólo verbalmente (τῇ λέξει μόνον) difieren de las categóricas, pues la premisa del tipo anteriormente expuesto "significa: de las cosas de las que se dice B, de todas ellas se dirá también A". Y un

---

[204] *Confert*, p. ej., *Tópicos* II, 2, 109 b, 14.
[205] *Tópicos* II, 2, 109 b, 14.
[206] *Ibidem*, IV, 1, 120b, 16; IV, 2 122 a, 19.
[207] *Ibidem*, II, 8, 113 b, 15; IV, 1 121 a, 28; IV, 2, 122 a, 17; V, 3, 131 a, 27.
[208] *Ibidem*, VIII, 5, 154 a, 23.
[209] *Ibidem*, VIII, 8, 160 b, 3.
[210] Alejandro, *In Aristo. Analyt. Priorum...*, 378, 12-20.

escoliasta anónimo[211] también nos asegura que Teofrasto consideraba a la premisa κατὰ πρόσληψιν como potencialmente equivalente a la categórica "pues en nada difiere decir 'A [se predica] de ningún B' de decir 'de lo que [se predica] todo B, de nada de ello [se predica] A', o también decir 'todo A [se predica] de B' en nada difiere de decir 'de lo que [se predica] todo B, de nada de ello (se predica) A', o también decir 'todo A (se predica) de B' en nada difiere de decir 'de lo que(se predica) todo B', de ello también [se predica] todo A' ". A partir de estas premisas -dice el escoliasta- Teofrasto construía silogismos pertenecientes a tres figuras; pero sólo nos ofrece la forma de la premisa κατὰ πρόσληψιν en cada una de esas figuras:

fig. 1. De aquello, que [se predica] de C, [se predica] A.

fig. 2. Lo que [se predica] de A, eso también [se predica] de B.

fig. 3. De lo que [se predica] A, de eso también [se predica] B[212].

Con premisas de este tipo, construía Teofrasto silogismos κατὰ πρόσληψιν. Pero sólo nos ha llegado un ejemplo de tales silogismos.

(1) De aquello que [se predica] universalmente de hombre, [se predica] también universalmente sustancia.

(2) Pero animal [se predica] universalmente de hombre.

(3) Luego sustancia [se predica] universalmente de animal.

Este silogismo no encaja directamente en ninguno de los modos silogísticos ordinarios, hay que "identificar" o "determinar" el tercer término indeterminado de la premisa proléptica [(la premisa (1)] con el término determinado "animal", con lo que obtendríamos el siguiente razonamiento:

Las dos premisas:

(1) Todo H es X → Todo X es S.

(2) Todo H es A.

Haciendo el término indeterminado X igual a A:

(3) X = A

De donde:

(4) Todo H es X..... sust. A/X en (2)

(5) Todo X es S..... M. P. 1,4

(6) Todo A es S..... sust. X/A en (5)

Conversión *simpliciter* de E

Según hemos visto, Aristóteles "demuestra" la conversión *simplex* de E mediante el procedimiento de la "exposición" (ἔκθεσις). Teofrasto y Eudemo, según Alejandro[213], admitían la conversión como evidente pues hacían el siguiente razonamiento: "Dado que A [no se predica] de ningún B, si [no se predica] de ninguno, A está separado y apartado de B; mas lo separado está separado de lo separado. Luego también todo B está separado de A; mas si esto es así, entonces [B no se predica] de ningún (A)".

Esta prueba está basada en las relaciones espaciales, "está separado" o "está apartado", que son simétricas, de manera que, si A mantiene tal relación con B, entonces también B mantiene esa misma relación con A.

Las pruebas en silogística mediante la representación gráfica de relaciones espaciales cobrarán auge en la época moderna a partir de Leibniz. Debe, pues, ser recordado Teofrasto como precursor de tales procedimientos.

La cuantificación múltiple

En otro punto más importante aún es Teofrasto precursor de la lógica moderna. Según un escoliasta anónimo[214], Teofrasto sostenía que "en ciertos casos, si no hay determinación (cuantificación) del predicado, dos proposiciones contradictorias pueden resultar simultáneamente verdaderas, como, por ejemplo, "Fanias posee ciencia", "Fanias no posee ciencia".

Varias son las cuestiones a dilucidar en este pasaje. En primer lugar, Teofrasto parece mantenerse dentro de la teoría aristotélica en la que el único esquema de proposiciones es el de sujeto-predicado. Confirma esto la aparición explícita del término "predicado" (κατηγορούμενον). El predicado sería, en el ejemplo, "cien-

---

211 *Scholia in Aristotelem*, edic. Chr. A Brandis, tomo IV de la edic. *Aristotelis Opera* de la Academia de Berlín, 1836, p. 189 b, 43.

212 De los ejemplos aducidos, no cabe inferir, según nuestra opinión, la interpretación y retraducción a la lógica cuantificacional que hace Bochenski: *La Logique de Teophraste*, ed. cit., pág. 48) de la proposición κατὰ πρόσληψιν. Sólo la instancia "De las cosas de las que se dice B, de todas ellas se dirá también A" podría ser traducida como (x) Bx → (x)Ax. Pero esta fórmula de Bochenski no es traducción correcta de la instancia "Todo A (se predica) de B", fórmula a la que equivale, según el escoliasta anónimo citado, la premisa κατὰ πρόσληψιν. Y ello porque en esta instancia la cuantificación, como es usual en la lógica aristotélica, recae sobre el predicado, no sobre los individuos como en la cuantificación moderna.

213 *In Aristo. Analyt. Prior.*, edit. cit., pág. 31.

214 Recogido por Waitz, *Arist. Organon Graece*, edic. cit., vol. I, pág. 40.

cia" (puesto que para evitar que las proposiciones contradictorias resultantes sean ambas verdaderas habría que cuantificar el "predicado" y decir "toda ciencia").

Si esto fuese así, Teofrasto creería estar sosteniendo una tesis contraria a su maestro, quien explícitamente rechaza[215] la cuantificación del predicado. Y en tal caso, a primera vista, podría figurar Teofrasto como precursor de la teoría de la cuantificación del predicado. Pero no hay tal cosa, porque lo que Teofrasto piensa estar haciendo es bien distinto de lo que en realidad propugna. Volviendo al examen del ejemplo presentado: la cuantificación de "ciencia" ("toda ciencia") no es la cuantificación del predicado, al menos en el sentido en que Aristóteles lo entendió, porque la proposición en cuestión no es del tipo sujeto-predicado, sino que es una proposición relacional: hay una relación binaria "posee" y dos argumentos, uno individual "Fanias" y otro predicativo "ciencia". Y, en su forma activa, el sujeto (gramatical: "Fanias"), por ser individual, no precisa de cuantificación, en tanto que "ciencia" sí, de lo que Teofrasto perspicazmente se ha percatado. Pero de la necesidad de cuantificar "ciencia" no cabe inferir (como erróneamente parece que hizo Teofrasto) la necesidad de cuantificar el predicado, porque "ciencia" no es el predicado, porque la proposición en cuestión no es predicativa, del tipo de las que comúnmente aparecen en la silogística aristotélica.

Pese a todo, Teofrasto, aunque inconscientemente, estaba abriendo una nueva vía en el desarrollo de la lógica; vía que dará acceso, en la lógica moderna, a útiles resultados: la cuantificación múltiple.

Sobre el ejemplo presentado, Teofrasto sostiene, y con toda razón, que "ciencia" precisa de cuantificación. Ello significa sostener la tesis de que, a veces, se precisa otra cuantificación además de la del sujeto, única aceptada por Aristóteles en las proposiciones generales. Y, si bien es cierto que en el ejemplo citado sólo aparece un cuantificador, con sólo cambiar el sujeto (gramatical) singular "Fanias" por un término general como "griego", la tesis de Teofrasto exigiría la aparición de dos cuantificadores, para la exacta determinación de la proposición resultante. Por ejemplo, *Algún* griego posee *toda* ciencia. Y son proposiciones de este tipo (con cuantificador múltiple) las que no aparecen en la lógica aristotélica, las que aparecen frecuentemente en ciencia y en filosofía, las que sabe tratar adecuadamente la lógica cuantificacional moderna y las que Teofrasto tuvo la perspicacia de recoger por no tener cabida en el sistema de su maestro.

Sobre los silogismos

Varias son las innovaciones de Teofrasto en la silogística aristotélica.

Los modos "indirectos" o de la 4ª figura

Según Alejandro[216], Teofrasto añadió a los cuatro modos válidos de la primera figura aristotélica otros cinco nuevos, igualmente válidos, aunque, en efecto, no resultan ya "perfectos" e "indemostrables" como los primeros. Son aquellos modos en los que el término medio aparece como sujeto en una premisa y como predicado en otra, y en cuya conclusión aparece el término mayor como sujeto y el menor como predicado. En correspondencia con esta "figura" enumeran Alejandro y Boecio[217], y en este orden, los siguientes:

(1) Si todo M es A y todo B es M, entonces algún A es B (BARALIPTON).

(2) Si ningún M es A y todo B es M, entonces ningún A es B (CELANTES).

(3) Si todo M es A y algún B es M, entonces algún A es B (DABITIS).

(4) Si todo M es A y ningún B es M, entonces algún A no es B (FAPESMO).

(5) Si algún M es A y ningún B es M, entonces algún A no es B (FRISESOMORUM).

En realidad, Teofrasto no añade ningún modo a la silogística aristotélica, pues, como ya hemos visto, el mismo Aristóteles había ya ofrecido ejemplos, aunque de manera desperdigada, de todos los anteriores modos. La tarea de Teofrasto consiste en sistematizar los descubrimientos que habían quedado desperdigados por los *Primeros Analíticos* de su maestro y hacer avanzar la lógica aristotélica en la dirección del formalismo.

Los 5 modos *indirectos* mencionados fueron con posterioridad asignados a una 4ª figura y, debido a la gran difusión que tuvieron entre los escolásticos los escritos de Boecio, quien los describe detalladamente, los modos indirectos o de la 4ª figura pasan, así sistematizados, al acervo de la lógica clásica.

---

215 En *De Interpretatione*, 7, 17 b, 12; y *Primeros Analíticos* I, 27, 43 b, 17.

216 *In Arist. Analyt. Prior*, edic. cit., pág. 69.

217 *De Syllogismo Categorico*, edic. cit., pág. 815, quien añade que estos modos son llamados κατὰ ἀνάκλασιν, "id est, per refractionem quandam conversionemque propositionis".

Los silogismos hipotéticos

También, a partir de varias indicaciones de Aristóteles, desarrolla Teofrasto la teoría de las proposiciones y de los silogismos hipotéticos (ἐξ ὑποθέσεως). Este tipo de silogismos debieron de ser estudiados,sin duda, en la escuela aristotélica; de ahí que Alejandro afirme[218] que Teofrasto (y también lo hacen Eudemo y otros condiscípulos) menciona en sus propios Analíticos los siguientes tipos de silogismos ἐξ ὑποθέσεως:

(1) A partir de condicionales (διὰ συνεχοῦς), el cual se llama también (silogismo) condicional (συνημμένον).
(2) A partir de hipótesis proslépticas (τῆς προσλήψεως ὑποθετικοὺς).
(3) A partir de lo dividido y lo separado (διὰ τοῦ διαιρετικοῦ καὶ διεζευγμένου).
(4) A partir de una conjunción negada (διὰ ἀποφατικῆς συμπλοκῆς).
(5) Por analogía (ἐξ ἀναλογίας).
(6) Según la cualidad, por grados (κατὰ ποιότητα, ἀπὸ τοῦ μᾶλλον καὶ ἧττον καὶ ὁμοίως).

Que Teofrasto mencione estos tipos de silogismos hipotéticos no significa que sean obra de él; más bien parece -por la terminología y por la descripción de algunos de ellos- que son esquemas argumentales bien debatidos en la escuela estoica. Apoya esta interpretación Boecio quien afirma[219] que Teofrasto, si bien dice algo más sobre el asunto que Aristóteles (quien "no escribió nada al respecto"), sólo ofrece un resumen (*res tantum summas exsequitur)* y Eudemo, aunque es más explícito, sólo lanzó algunas ideas seminales pero sin llegar a recoger fruto alguno.

No obstante, Alejandro atribuye expresamente a Teofrasto uno de los tipos de silogismos hipotéticos antes mencionados: los silogimos κατὰ ἀναλογίαν, y que en otros pasajes llama "totalmente hipotéticos"[220]. Según Alejandro, Teofrasto ofrece modelos de estos silogismos, ordenándolos en tres figuras[221]:

En la primera figura:

(1) Si A, entonces B; si B, entonces C; luego si A, entonces C.
(2) Si A, entonces B; si B, entonces C; luego si no C, entonces no A.

En la segunda figura:

(3) Si A entonces B; si no A, entonces C; luego si no B, entonces C.
(4) Si A entonces B; si no A, entonces C; luego si no C, entonces B.

En la tercera figura:

(5) Si A, entonces C; si B, enconces no C; luego si A, entonces no B.

Ejemplifica el modelo (1) así: εἰ ἄνθρωπός ἐστι, ζῷόν ἐστιν; εἰ ζῷόν ἐστιν, οὐσία ἐστίν; εἰ ἄρα ἄνθρωπός ἐστιν, οὐσία ἐστιν.

No hemos querido traducir el ejemplo porque ello nos obligaría a tomar partido interpretando ἄνθρωπός ἐστι, por ej., bien como proposición existencial: "un hombre existe": *p*, bien como esquema de proposición atributiva: "es hombre": *Px*. En el primer caso estaríamos ante el primer indemostrable de los estoicos (lógica de proposiciones), pero en la tradición aristotélica es la lógica de términos la cultivada. Nos hallamos, pues, en presencia de modelos argumentales, de reglas válidas, tanto para la lógica de proposiciones (estoica) como para la lógica de términos (aristotélica).

La modalidad

El tratamiento que Teofrasto hace de la modalidad difiere en algunos aspectos del de Aristóteles.

Definición de lo posible

En primer lugar, trata de dotar de un sentido unívoco al término "posible" (τὸ δυνατόν) que, como hemos visto, aparece en las obras de Aristóteles con dos sentidos distintos:

a) En *De Interpretatione* (cap. 13, 22 a, 15 y ss.): lo posible viene definido mediante la siguiente equivalencia (representando ◊ p = "es posible que p";□p = "es necesario que p"ıy p = "es el caso que p"):

$$\Diamond p \equiv_{def.} \sim\Box \sim p$$

Esto es, "es posible que p" significa (equivale a) "no es necesario que no p".

b) Pero en *Primeros Analíticos* (I, 13, 32 a, 18 y ss.) p. ej., lo posible es considerado como equivalente a contingente ἐνδεχόμενον y corresponde a la conjunción de la no necesidad de *p* y la no necesidad de *no-p*.

$$\Diamond p \equiv_{def.} \sim\Box p \;\&\; \sim\Box \sim p$$

---

[218] *In Arist. Analyt. Prior.*, ed. cit., pág. 389.
[219] *De Syll. Hypot.*, edic. cit., pág. 831c.
[220] *In Arist. Analyt. Prior.*, edic. cit., pág. 326.
[221] *Ibidem.*

De modo que la negación de lo posible equivale a lo necesario o imposible. De la definición de "posible" en el sentido (b) se sigue en lógica de proposiciones que:

(I) $\Diamond p \equiv \Diamond \sim p$

Prueba:

(1) $\sim \Diamond \sim p$ ..... supuesto
(2) $\Box \sim p \vee \Box p$ ..... por def. (b) de $\Diamond$ en (1)
(3) $\Box p \vee \Box \sim p$ ..... conmutat. en (2)
(4) $\sim (\sim \Box p \,\&\, \sim \Box \sim p)$ ..... De Morgan en (3)
(5) $\sim \Diamond p$ ..... M. T. def. (b) y (4)
(6) $\sim \Diamond \sim p \rightarrow \Diamond \sim p$ ..... Introd. Impl. 1-5
(7) $\Diamond p \rightarrow \Diamond \sim p$ ..... Ley contrap. en 6
(8) $\Diamond \sim p$ ..... supuesto
(9) $\sim \Box \sim p \,\&\, \sim \Box \sim \sim p$ ..... def. (b) de 8
(10) $p \equiv \sim \sim p$ ..... Ley de la doble negac.
(11) $\sim \Box \sim p \,\&\, \sim \Box p$ ..... Sust p/- -p en 9
(12) $\sim \Box p \,\&\, \sim \Box \sim p$ ..... conmut. en 11
(13) $\Diamond p$ ..... M. P. entre def. (b) y 12
(14) $\Diamond \sim p \rightarrow \Diamond p$ ..... Intr. impl. 8,13
(15) $(\Diamond p \rightarrow \Diamond \sim p) \,\&\, (\Diamond \sim p \rightarrow \Diamond p)$ ..... Intr. conj. 7,14
(16) $\Diamond p \Leftrightarrow \Diamond \sim p$ ..... Def. 15

Y en lógica de predicados que:

(II) $\Diamond$ todo B es A $\equiv \Diamond$ ningún B es A.

(III) $\Diamond$ algún B es A $\equiv \Diamond$ algún B no es A[222].

Teofrasto no reconoce como legítimas las consecuencias (I), (II) y (III) derivables de la definición (b); sostiene en cambio la siguiente tesis, que no es admitida por Aristóteles[223]:

(IV) $\Diamond$ ningún B es A $\equiv \Diamond$ ningún A es B.

De ambos hechos cabe colegir que Teofrasto sólo admite un sentido de lo posible: el que corresponde a la definición (a), y rechaza la definición (b).

En efecto, amén de la prueba que Teofrasto[224] ofrece de la tesis (IV) basada en relaciones espaciales (como la prueba que hemos visto en Ib), los discípulos de Aristóteles, y entre ellos Teofrasto, empleaban un razonamiento apagógico que discurre así:

(1) $\Diamond$ ningún B es A .... supuesto
(2) $\sim \Diamond$ ningún A es B. se supone la negación de la conclusión
(3) $\Box$ algún A es B ..... definición (a) de posible en (2)
(4) $\Box$ algún B es A ..... convers. de (3)
(5) (1) & (4) ..... conj. de (1) y (4), que son contradic.
(6) $\Diamond$ ningún A es B .... por llegar a una contradic. a partir de (2), se niega aquello de lo que se había partido.
(7) (1) $\rightarrow$ (6) ..... intr. impl. (1), (6)

De manera similar cabe obtener (6) $\rightarrow$ (1).

En esta prueba, el paso de (2) a (3) exige necesariamente la consideración de lo posible en el sentido de la definición (a), ya que si se define (2) mediante la definición (b) de posible obtendríamos:

(3') $\Box$ ningún A es B $\vee \Box$ algún A es B

pero de aquí no podemos pasar a

$\Box$ algún A es B

ni a

$\Box$ algún B es A

En consecuencia, para que la prueba sea correcta, lo posible ha de ser entendido en el sentido (a) y no en el (b). De donde cabe colegir que Aristóteles no reconoce la tesis (IV), porque admitía el sentido (b) de posible. Teofrasto concibe lo posible en el sentido (a); y, puesto que rechaza las tesis (II) y (III), en cuanto que éstas se basan en la definición (b) de posible, Teofrasto no admite el sentido (b) de posible.

La regla de *peiorem sequitur conclusio partem*

Esta regla que Aristóteles aplica en la silogística asertórica es trasladada por Teofrasto a la silogística modal. Teofrasto establece una jerarquía de las modalidades que va, en orden descendente, de "es necesario que p", pasa por "es el caso que p", terminando en el inferior (o "peor"): "es posible que p". Con simbología moderna":

$$\Box p \rightarrow +p \rightarrow \Diamond p$$

Aplicando la regla citada, los modos silogísticos que contienen una premisa $\Diamond p$ deben tener conclusión $\Diamond p$; los que contienen + p dan, a lo sumo, una conclusión + p, pero nunca pueden llegar a una conclu-

---

[222] *Confert Primeros Analíticos* I, 13, 32 a, 39-40.
[223] Aristóteles, *Primeros Analíticos*, I, 13, 32 b, 27.
[224] *Confert* Alejandro, *In Aristo. Analyt. Prior*, edic. cit., pág. 220: "Si es posible que A [no convenga] a ningún B, entonces también es posible que B [no convenga] a ningún A. En efecto, puesto que es posible que A [no convenga] a ningún B, al ser posible que [no convenga] a ninguno, es posible que A esté separado de todos los B. Mas si esto es así, entonces también B estará separado de A; y, en ese caso, también es posible que B [no convenga] a ningún A".

sión □p. Según Alejandro[225], Teofrasto ofrecía el siguiente razonamiento para justificar su regla (en el caso de que las premisas son del tipo + p y □p, en el que la regla prohíbe que la conclusión sea de tipo □p):

> "Pues si B [conviene] necesariamente a C, pero A [conviene] a B no necesariamente, entonces esto (A) no necesariamente [convendrá a C] y estará separado; es evidente, pues, que A, al estar separado de B, también lo estará de C, de modo que de las premisas puestas no cabe concluir necesariamente".

Como en los casos de la conversión de E asertórica y problemática, también aquí apela Teofrasto a la idea de un esquema espacial: los tres términos del silogismo son considerados en extensión, entre ellos media la relación "está separado de", y tal relación puede ser: necesaria, el caso o posible.

Con la regla *peiorem sequitur conclusio partem* y la tesis (IV) desarrolla Teofrasto un sistema de lógica modal diferente de, y más simple que, el de Aristóteles:

I) Diferente, porque Aristóteles admite como válidos modos silogísticos con una conclusión "mejor" (de rango superior según el ordenamiento efectuado por Teofrasto) que una de las premisas. Por ej.[226].

□ todo B es A
+ todo C es B

□ todo C es A

en tanto que Teofrasto, ateniéndose a su regla, sólo reconoce como válido el modo en cuestión si concluye de manera asertórica[227], esto es:

□ todo B es A
+ todo C es B

+ todo C es A

II) Más simple, porque, en tanto que Aristóteles admite dos definiciones de "lo posible", Teofrasto se restringe a una sola, por lo que su sistema, basado en principios más simples provenientes del único sentido en el que entiende la modalidad, resulta más homogéneo y más simple que el de Aristóteles.
Bochenski[228] señala cómo, partiendo de modos admitidos por el propio Teofrasto y utilizando las reglas del "cuadrado lógico" y la reducción indirecta -procedimientos de los que también echaba mano Teofrasto-, se deducen modos que violan la regla de *peiorem sequitur conclusio partem*. Por ejemplo: Dado el modo (admitido por Teofrasto)[229]:

α ◊ todo B es A
β + todo C es B

γ ◊ todo C es A

cuya estructura como tesis lógica es (α & β) → γ; si aplicamos la reducción indirecta, tendremos (- γ & β) → - α. Esto es:

- γ □ algún C no es A
β + todo C es B

- α □ algún B no es A

Modo, éste, que se atiene a la definición (a) de lo posible, que se construye por procedimientos admitidos por Teofrasto, pero que, sin embargo, viola la regla *peiorem sequitur conclusio partem*.

---

225 *In Arist. Analyt. Prior.*, edic. cit., pág. 132.
226 Aristóteles, *Primeros Analíticos*, I, 9, 30 a, 15 y ss.
227 *Confert.* Alejandro, *In Arist. Analyt. Prior.*, edic. cit., pág. 248.
228 *La logique de Théophraste*, edic. cit., pág. 101.
229 Alejandro, *In Arist. Analyt. Prior.*, edic. cit., pág. 248.

BIBLIOGRAFIA

Fuentes:

Alejandro de Afrodisia, *In Aristotelis Analyticorum Priorum librum I commentarium*, edic. M. Vallies, en la colección de la Academia de Berlín, tomo II, 1883.

Alejandro de Afrodisia, *In Aristotelis Topicorum libros octo comentaria*, edic. M. Vallies, Academia de Berlín, tomo II, 1888.

Ammonio, *In Aristotelis Analyticorum Priorum librum I commentarium*, edic. M. Vallies, Academia de Berlín, tomo II, 1889.

Ammonio, *In Aristotelis De Interpretatione commentarium*, ed. A. Busse. Academia de Berlín, tomo II, 1897.

Boecio, A. M. S., *De Syllogismo categorico libri duo*, edic. J. P. Migne, *Patrologiae, cursus completus*, vol. 64, París, 1891.

Diogenes Laercio, *Vidas de Filósofos Ilustres*, libro V.

Galeno, *Institutio Logica*, edic. C. Kalbfleisch, Lipsiae, 1896.

Simplicio, *In Aristotelis Categorias commentarium*, edic. C. Kalbfleisch, Academia de Berlín, tomo II, 1900.

Usener, H., *Analecta theophrastea*, Lipsiae, 1850.

Wimmer, F., *Theophrasti Eresii Opera quae supersunt omnia*, Lipsiae, 1854-1862.

Estudios:

Bochenski, I. M., *La Logique de Théophraste*, Publications de l'Université, Fribourg -en-Suisse, 1947.

Recipi, L., *La logica di Teofrasto*, Il Mulino, Bolonia, 1977.

Vieru, S., "Theophrastus'syllogistic and predicative logic" en *Revue Roumaine des Sciences Sociales. Série de Philosophie et Logique* (Bucarest), XV (1971), pp. 205-211.

III. Megárico-estoicos

1. Los megáricos

Los megáricos fueron influidos por los eléatas, pero parecen haber retenido la dialéctica de Zenón más que la ontología de Parménides.

Se les llamaba "dialécticos" o "erísticos", señalando así en lo que eran maestros: en el arte de discutir o, más en concreto, en embrollar al contrario, al adversario.

El fundador de la escuela de Megara fue Euclides, de quien dice Diógenes que apoyaba sus demostraciones, no sobre las premisas, sino sobre la conclusión[1]; lo que significaba sin duda que se dedicaba especialmente a refutar a sus adversarios.

Uno de sus discípulos, Eubúlides, enemigo declarado de Aristóteles, debe su celebridad a la invención de muchos argumentos capciosos. Junto con Diodoro Cronos (muerto hacia el 307 a. C.) y su discípulo Filón de Megara constituye el grupo de lógicos más importantes de esta escuela.

Temas de la lógica megárica

Las paradojas

Tales como la del mentiroso, el hombre encapuchado, el hombre calvo, el hombre cornudo, etc. Se le suelen atribuir a Eubúlides[2]. No constituyen sino meras variantes unas de otras. La paradoja no se resuelve más que por la distinción entre los niveles del lenguaje, prohibiendo decir a una frase algo sobre sí misma.

La implicación

Tema que opondrá a Diodoro Cronos y a su discípulo Filón. La polémica en torno a la naturaleza de la implicación acarreará vehementes controversias. La implicación (ακολουθία) es el conector que une el antecedente con el consecuente en un condicional (συνημμένον) de la forma "si p, entonces q". Filón, según Sexto Empírico[3], decía que el condicional es verdadero cuando no comienza con lo verdadero y acaba con lo falso. Porque es verdadero cuando V - V; F - F; F - V. Sólo es falso cuando V - F. Es éste exactamente el concepto de "implicación material" de Russell.

Diodoro se opone a la tesis filoniana porque resultaría, según ella, que el mismo condicional sería unas veces verdadero y otras falso, según el momento en el que es enunciado. Por ejemplo: "si es de día estoy discutiendo", que es falso si siendo de día me callo, o verdadero el "si es de noche, estoy discutiendo" cuando es de día y discuto. Para evitar estas consecuencias paradójicas propone sustituir la definición de Filón por

---

[1] Diógenes Laercio, *Vidas de los filósofos...*, II, 107: "En las demostraciones (Euclides) no atacaba las premisas, sino la conclusiones".

[2] *Op. cit.*, II, 109: "De la escuela de Euclides desciende también Eubúlides de Mileto, que pone en forma de pregunta muchos discursos dialécticos: el mentiroso, el escondido, el Electra, el encapuchado, el sorites, el cornudo y el calvo".

[3] Sexto Empírico, *Adversus Mathematicos*, VIII, 247; y *Hypotiposes Pirrhonicae*, II, 110 y ss.: "Pues Filón dice que el condicional verdadero es el que no tiene antecedente verdadero y consecuente falso; por ejemplo, cuando es de día y estoy conversando, "Si es de día, entonces estoy conversando". Pero Diodoro lo define como el que ni es ni jamás fue capaz de tener antecedente verdadero y consecuente falso. Según él, el condicional recién citado parece ser falso, ya que, cuando es de día y me he quedado callado, tendrá antecedente verdadero y consecuente falso; pero parece verdadero el siguiente condicional: "Si no existen elementos atómicos de las cosas, entonces existen elementos atómicos de las cosas", puesto que tendrá siempre el antecedente falso "No existen elementos atómicos de las cosas" y el consecuente verdadero "Existen elementos atómicos de las cosas". Y los que introducen 'conexión' o 'coherencia' dicen que un condicional es verdadero cuando la negación del consecuente es incompatible con el antecedente; así, según ellos, los condicionales mencionados arriba no son verdaderos, pero sí es verdadero el siguiente: "Si es de día, entonces es de día". Y los que juzgan por 'sugerencia' declaran que un condicional es verdadero si el consecuente está efectivamente incluido en el antecedente. Según estos, "Si es de día, entonces es de día" y todo condicional repetido será probablemente falso, pues es imposible que la misma cosa esté incluida en sí misma".

otra más compleja y restrictiva. En lugar de decir que un condicional es verdadero cuando no comienza por lo verdadero y acaba con lo falso, hay que decir que es verdadero cuando no ha podido ni puede comenzar por lo verdadero y acabar con lo falso.

Esta nueva definición acarrea dos innovaciones:

a) la apelación a un concepto modal: el de *posible* o *imposible*.
b) la intervención de un nexo temporal con la distinción del pasado y del presente.

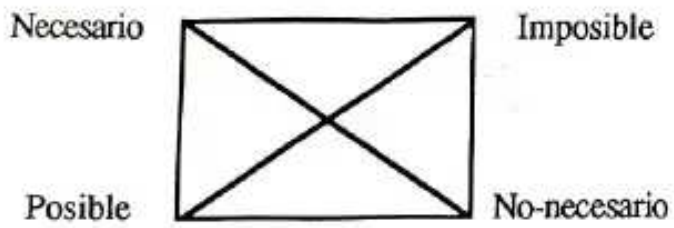
Se ha comparado frecuentemente la noción de Diodoro de implicación con la de "implicación estricta" de Lewis. Y lo mismo que la primera se opone a la de Filón, la segunda se opone a Russell. En cambio, esta comparación peca de un doble defecto: primero, no tener en cuenta las indicaciones temporales que Diodoro combina con su recurso a una noción modal; segundo, conviene examinar las nociones modales de Diodoro para ver si coinciden con las de Lewis.

La modalidad[4]

Para Diodoro las definiciones modales son:

— Necesario: lo que es verdadero y no será falso
— Imposible: lo que es falso y no será verdadero
— Posible: lo que es verdadero o será verdadero
— No-necesario: lo que es falso o será falso

Estas definiciones en su conjunto forman un sistema perfectamente estructurado y lógicamente irreprochable. Como señala Bochenski[5], estas definiciones pueden ser dispuestas según el cuadrado lógico con sus relaciones características. Siendo las dos apodícticas subalternas



En Diodoro estas definiciones temporales de los conceptos modales, lejos de ser superficiales, eran aquellos nexos a los que trataba de reducir los nexos modales[6]. La potencia, como algo intermedio entre el ser y el no ser, no puede ser aceptada por los megáricos (de tradición eléata), los cuales identificaban lo posible con lo que es y, por lo tanto, con aquello que, según Aristóteles, está ya en *acto*. Bastaría añadir éstos a la definición filoniana para obtener los equivalentes de lo posible y de lo necesario.

Con esto pretendemos, como hace Blanché, revisar la interpretación rígida de la definición diodoriana de implicación en términos modales. Es cuando menos dudoso que Diodoro pretendiera sustituir una lógica asertórica por otra modal. Es, más bien, a la inversa: retrotraer las nociones modales, consideradas como inevitables, al plano de la aserción simple. De modo que una noción extensiva, el *siempre*, puede y debe sustituir a la de *necesario*. Así, es una especie de cuantificador universal el que desempeña el papel de funtor modal. Por eso si se quiere encontrar un análogo de la implicación diodoriana en la lógica moderna, no es en la implicación estricta de Lewis donde hay que buscarla, sino en la "implicación formal" de Russell:

$$(x)\,(Px \rightarrow Qx) \quad \text{ó} \quad (x)\,-\,(Px\ \&\ -\,Qx)$$

La 3ª teoría de Diodoro de que tenemos noticia[7] es su famoso κυριεύων λόγος, basado en su teoría sobre las modalidades. Consiste en lo siguiente: Diodoro enunciaba estas tres fórmulas:

(1) Todo lo que ha pasado es necesariamente verdadero
(2) De lo posible no se sigue lo imposible
(3) Es posible aquello que no es verdadero ni lo será

A continuación mostraba que estos tres enunciados eran incompatibles. De suerte que si se admitían como verdaderos dos cualesquiera de ellos, era preciso rechazar el tercero como falso.

En último término parece que la intención de Diodoro era admitir como verdaderas las 2 primeras y concluir, en razón de su incompatibilidad, la falsedad de la tercera, sacando como conclusión la negación de 3:

(4) No es posible aquello que ni es verdadero ni lo será.

Esta tesis produjo grandes controversias. Para atacarla, Cleantes negaba la 1ª premisa, Crisipo la 2ª.

El fin de Diodoro, como hemos señalado, más que

---

[4] *Confert*, Alejandro de Afrodisia, *In Aristotelis Analytica Priora* I, 183, 34 - 184, 10.

[5] *Ancient formal logic*, p. 86.

[6] Diodoro, con la definición de las nociones *modales* en términos *temporales*, ataca la teoría aristotélica de la potencia, como así lo reconoce el mismo Aristóteles (*Metafísica*, θ, 3, 1046 b).

[7] Alejandro de Afrodisia, *In Aristotelis Analytica Priora* I, 184; y Epicteto, *Dissertationes ab Arriano digestae*. Edic. Budé, II, 19, 1-5. Sobre este argumento véase P. M. Schuhl, *Le dominateur et les possibles*. P. U. F., París, 1960. Y también H. Barreau, "Cléanthe et Chrysippe face au Maître Argument de Diodore", en J. Brunschwig (ed.), *Les Stoïciens et leur logique*, ed. cit., pp. 21-40.

establecer una tesis metafísica, en este caso sobre lo posible (así dice Schuhl, que pone en controversia esta concepción de Diodoro con la doctrina aristotélica de los futuros contingentes), lo que pretende es la fijación lógica y la significación de las nociones modales integrándolas en una lógica asertórica bivalente de verdadero y falso. Y así, la conclusión que Diodoro obtiene de su κυριεύων λόγος es ésta: "es imposible lo que no es verdadero ni lo será", y coincide con su propia definición de imposible: "aquello que es falso y no será verdadero".

2. Los estoicos

Los orígenes de la escuela estoica están en los megáricos: especialmente en Diodoro Cronos y su discípulo Filón de Megara. Los estoicos heredan de los megáricos la habilidad dialéctica, pero también el interés por los problemas de la inferencia y de la modalidad. Zenón de Citio, discípulo de Estilpón (y, probablemente, también de Diodoro Cronos), fue el fundador de la estoa hacia el año 300 a. C. El sucesor de Zenón al frente de la escuela estoica fue Cleantes, y a éste le sucedió Crisipo.

La lógica megárico-estoica se desarrolla en una dirección distinta y autónoma respecto de la aristotélica. Mas resulta difícil su completa reconstrucción debido a la fragmentación de los textos: las fuentes de que disponemos son tardías: Apuleyo y Galeno del siglo II d. C.; Sexto Empírico y Diógenes Laercio del siglo III d. C. Y estas fuentes, además, son parciales. Así, por ejemplo, Sexto Empírico, como escéptico que era, va aduciendo parcialmente tesis sueltas defendidas por los estoicos para luego refutarlas, por lo que se pierde la visión de conjunto, la estructura interna de la doctrina. Esta, en lo referente a la lógica, la hemos organizado en los siguientes apartados:

2. 1. Teoría semántica

La teoría semántica de los estoicos se basa en su teoría sobre la naturaleza y origen del lenguaje, y sobre el sistematismo del mismo[8].

Respecto del primer tema, los estoicos eran "naturalistas" (frente a los "convencionalistas": Aristóteles, epicúreos); y, respecto del segundo, eran "anomalistas" (frente a los "analogistas": Platón, Aristóteles). Los estoicos, defensores del anomalismo, propugnaban, asimismo, el carácter "natural" del lenguaje, si bien en sentido distinto de aquel en que lo hacían los epicúreos. Si el sonido es una imitación consciente de las propiedades de las cosas, si como dirá el estoico Pseudo-Agustín "res ipsae afficiunt ut verba sentiuntur", ello se debe a que los estoicos fundían en el logos la palabra y la razón. El logos inmanente (ἐνδιαθετός) es el mismo que aparece en la palabra (προφορικός). Y, por ello, opina Zenón que si el pensamiento residiera en el cerebro, también la voz debía proceder del cerebro; y, puesto que ésta no procede de ahí, por eso tampoco el pensamiento tiene como sede el cerebro. El logos *endiazetós* y el *profo-ricós* sólo difieren en la forma de aparecer. El lenguaje posee, pues, una estructura lógica, posee un sistematismo que no tiene por qué ser de tipo analógico. Anómalo no se opone a lógico o racional, sino a análogo. Anómalo es lo "rugoso", lo "no-llano" y, al menos en los primeros estoicos, no indica falta de sistematismo, sino un sistematismo peculiar. La simplificación de la polémica entre analogistas y anomalistas se debe, en buena medida, a la escasez de textos y a la exposición, un tanto simplista, que Varrón[9] ofrece de la misma.

Y, si la analogía significa que a una palabra simple corresponde un concepto simple y a una compuesta uno compuesto, entonces cabría esperar que los estoicos admitiesen la analogía. Dice Barth (o. c., p. 137): "es sorprendente que los estoicos a pesar de los esfuerzos antes mencionados para derivar del objeto el sonido de las palabras, admitiesen, no obstante, una desigualdad entre el contenido del concepto u objeto y el de la palabra". Pero tal sorpresa se esfuma en cuanto se tiene en cuenta el carácter dinámico y creador del logos estoico. El logos σπερματικός lo penetra y lo modela todo en formas infinitamente variadas; es inmanente al mundo y encierra en sí mismo todas las potencias creadoras (λόγοι σπερματικοί). Estas semillas ("código genético")[10], llenan toda la materia en cantidades y proporciones diversas, formando lo que podríamos llamar una "articulación matricial" (σύστασις), una sintaxis, equivalente a la συμπλοκή platónica. De donde se deduce la "simpatía de todas las cosas" (συμπάθεια τῶν ὅλων). El hombre se encuentra uni-

[8] *Confert*, P. Barth: *Los estoicos*. Trad. L. Recasens Siches. Rev. de Occidente. Madrid, 1930, cap. III.

[9] *De lingua latina*, VIII, edic. de G. Goetz y F. Schoell. Teubner, Stuttgart, 1964, p. 131.

[10] *Confert*, el texto de Orígenes: "dado que el generante tiene los logos de los progenitores, a veces domina el logos suyo...". *Apud* E[illegible] *estoicismo*, I, Gredos, Madrid, 1972, p. 73.

do, por medio del logos, que en él actúa, al logos del universo. Los estoicos crean, así, el concepto de "humanidad": todos los hombres forman una comunidad; no hay diferencias entre griegos y bárbaros, ni entre señores y esclavos, ya que todos están unidos por el logos universal. Esta razón universal -esta competencia innata universal, que diría Chomsky- hace que, a nivel de individuos, las diferencias no sean más que convencionales (o "superficiales"), ya que en el fondo actúa el espíritu humano unificador. El hombre es un animal social (ζῷον κοινωνικόν), cuya patria es el mundo entero. De ahí la idea estoica[11] de formar una única sociedad con un único lenguaje (una gramática universal), puesto que todo es producto del mismo logos.

La importancia del origen racial y lingüístico de Zenón y Crisipo para la comprensión de su doctrina ha sido resaltada por Pohlenz[12]. Zenón era bilingüe y desde su idioma materno, el fenicio, trata de establecer las bases de la gramática griega. Pero ahora el griego no es considerado como un corpus -el corpus homérico, por ejemplo- ni como *el* lenguaje. Los estoicos tienen una concepción más amplia que los analogistas de lo que es el buen griego, el ἑλληνισμός[13]. El lenguaje no es un corpus, sino una manifestación del logos común a griegos y bárbaros: "La voz del hombre es articulada y enviada por la inteligencia, como dice Diógenes de Babilonia"[14]. Esto hace que los estoicos no se hallen sujetos al sistematismo analógico y queden en libertad para modificar el griego mediante la introducción de palabras antiguas u orientales, llegando, así, a "violentar" el griego y tratando de explicar a los parlantes griegos las propiedades del logos dadas en la lengua semita, como es la división de los verbos en *perfectos* ("tengo visto", por ejemplo) e *infectos* ("veo" o "vi", por ejemplo).

El lenguaje es expresión del logos y, por consiguiente, verdadero. Por ello los estoicos conceden tanta importancia a la etimología, por cuanto que constituye un desenvolvimiento de las palabras a través del cual se pone de manifiesto la verdad, llegando a derivar φωνή (el habla) en φῶς νοῦ (luz del espíritu).

Aristóteles rechaza el naturalismo del lenguaje porque el criterio último de verdad residía, no en el lenguaje (logos), sino en las cosas mismas[15]. Los estoicos, por el contrario, eran naturalistas, porque la norma última de verdad estaba en el logos. No es la οὐσία pasiva aristotélica la causa de las propiedades de los objetos, sino el logos, en cuanto principio creador de toda forma y toda cognoscibilidad[16].

Los estoicos, como Chomsky, consideran el lenguaje como una capacidad connatural al hombre, como una facultad del pensamiento que sirve para dominar las cosas. El logos es la potencia decisiva del hombre; el Hegemonikón es el que presta asentimiento (συγκατάθεσις) a las representaciones, de las cuales la representación comprensiva (καταληπτική) es exclusiva del ser racional y constituye un criterio seguro de verdad[17].

El aspecto activo y creador del logos estoico se manifiesta, asimismo, en la teoría de la anticipación (πρόληψις). La prólepsis estoica es un criterio de verdad tan infalible como la representación cataléptica debido a que es fruto del logos que gobierna todas las cosas y, por eso, cuando esta razón examina o analiza en el lenguaje las relaciones entre los diversos elementos de un concepto general o afirma en un caso particular la necesidad del lazo que une el antecedente al consecuente, nos presenta la realidad misma, porque habla en nombre de, o mejor, es manifestación de, el logos universal. Lejos, pues, de los estoicos cualquier tipo de empirismo que propugne la observación constante y repetida.

El lenguaje es verdadero y la palabra representa a la cosa; los ὀνόματα son ἔτυμα; analizar el lenguaje es analizar la realidad; transformar el lenguaje es transformar la realidad. Tales son las tesis estoicas diametralmente opuestas a las de Aristóteles. El lenguaje es para Aristóteles finito por naturaleza; para los estoicos perfectible de acuerdo con las matizaciones que le da el logos. La palabra es para Aristóteles un εἶδος inmutable; para los estoicos, relativa (πώς ἔχοντα),cuyo perfeccionamiento es la sintaxis, arte de colocar las palabras, y que se domina cuando se sabe hablar *(loqui)*.Varrón deriva "loqui" de "locus", por cuanto que quien va a hablar "dice los vocablos y las restantes palabras antes de poderlos decir en su lugar"[18].

Pero es la etimología de "sermo", mejor que la de "loqui", la que resalta el aspecto dialógico del lenguaje (la presencia del sujeto operatorio). Varrón enlaza "sermo"

---

[11] J. Amim: *Stoicorum veterum fragmenta*, III, 516, 10-12; III, 4.
[12] *Die Stoa*, I. Vandenhoeck, Göttingen, 1964, p. 31.
[13] Diógenes Laercio,*Vidas de los filósolos más ilustres*, VII, 59.
[14] *Ibid.*, VII, 55.
[15] *Categorías*, 12, 14 b, 18.
[16] Elorduy, E.: *El estoicismo* I, ed. cit., p. 262.
[17] Sexto Empírico, *Adversus mathematicos*, VII, 151; Cicerón, *De finibus*, III, 17.
[18] *De lingua latina*, VI, 56.

con el "sartum" en los vestidos (=*prendido* con alfileres, por ejemplo), con "ensartar", etc., y subraya que "sermo enim non potest in uno homine esse solo, sed ubi oratio cum altero coniuncta[19].

Elorduy[20] presenta como dos tesis distintas la sostenida por Varrón, por una parte, según la cual, para que haya sermo hacen falta dos hablantes, y, por otra, la sostenida por Ernout-Meillet, según la cual, sermo designa etimológicamente "l'enfilade des mots"; esta última coincidente con la de Suárez, quien distingue entre "Verbum", palabra simple, y "sermo", oración compuesta. Y coincidimos con Elorduy en la apreciación de que ambas teorías "no son incompatibles". Se exigen mutamente, añadiríamos nosotros, desde la compresión del lenguaje a partir de una metodología. El lenguaje, en cuanto "sermo", exige como unidades lingüísticas las oraciones (palabras hilvanadas), porque, como ya hemos indicado, para los estoicos los significados de las palabras no se dan aislados, sino que adquieren su valor a través de la acción del sujeto operatorio (el hablante), según que las coloque en un lugar u otro, según opere sintácticamente. El lenguaje es, ante todo, sintaxis, operaciones posibles de los individuos para componer y ensartar, "capacidad de generar oraciones", en palabras de Chomsky. Y es en la construcción de oraciones en donde el hablante se comporta como sujeto operatorio y no puede ser eliminado del campo lingüístico. La acción del sujeto gnoseológico impide considerar al lenguaje como un conjunto finito y cerrado de elementos -las palabras- y establecer una relación biunívoca entre éstos y los pensamientos o las cosas. Por el contrario, el lenguaje, en esta metodología, es una acción, una facultad que hay que coordinar con la acción del logos que informa al individuo. El logos desarrolla su acción en un proceso complejo, no según la analogía, pero sí según la razón. No es extraño que frente al esquema aristotélico (y griego en general) de relación σημαίνον (significante) - σημαινόμενον (significado) en el que las palabras adquieren valor en sí mismas, independientemente de su posición sintáctica, el esquema estoico, que introduce un tercer elemento, el λεκτόν, resulte chocante para un griego y difícil de explicar, máxime cuando los estoicos, corporeístas por excelencia, declaran que el λεκτόν es incorpóreo.

El concepto de λεκτόν rechina si se pretende encajarlo en el esquema aristotélico o saussureano, pese a la "asombrosa coincidencia terminológica con la teoría saussureana"[21]. El λεκτόν estoico exhibe ese mundo o conjunto de materialidades o relaciones suprapsicológicas o supraindividuales, "creadas" o "generadas" por el lenguaje, cuando éste es entendido como producto de las operaciones (o transformaciones) de los individuos en cuanto dotados de logos (o de una competencia innata), logos común a todos y sólo los seres racionales. El λεκτόν es una de las cuatro categorías estoicas de lo incorpóreo y un elemento, junto con el vacío, activo; comprende bajo sí los objetos de la fantasía racional y es, por consiguiente, logos activo, no οὐσία[22].

Los estoicos, según nos dice Diógenes Laercio[23], dividían la filosofía en tres partes: Natural o Física, Moral y Racional o Lógica. Y la Lógica se divide en: Retórica (arte de decir bien en discurso dilatado) y Dialéctica (arte de disputar rectamente por preguntas y respuestas; y también: ciencia de lo verdadero, de lo falso y de lo dudoso).

La dialéctica se divide en dos lugares:

1) lugar de los significantes (τὰ σημαίνοντα) (la Gramática)
2) lugar de los significados (τὰ σημαινόμενα). Sobre éstos trata lo que hoy entendemos por Lógica.

Los significantes son corpóreos, accesibles a aquellos que ignoran la lengua. Los significados son incorpóreos, no son accesibles a aquellos que ignoran la lengua; los estoicos le llaman λεκτόν (el *Sinn* de Frege), distinto de la cosa (πρᾶγμα) y del suceso (τυγχάνον) al que se refieren (el *Bedeutung* de Frege). La traducción latina del λεκτόν es el *dictum*, y viene definido como "aquello que subsiste en conformidad con una representación racional"[24].

División de los *lektá*

1) *Lektá* incompletos (ἐλλιπῆ): "aquellos cuya enunciación es incompleta; por ejemplo, 'escribe'; pues queremos saber '¿quién?'"[25]. Se subdividen, según las partes de la proposición, en *sujetos* y *predicados*.

---

[19] *Ibidem*.
[20] *El estoicismo*, 1, ed. cit., p. 64.
[21] H. Arens, *La lingüística*, I. Trad. J. M. Díaz-Regañon, Gredos, Madrid, 1975, p. 34.
[22] J. Arnim, *Stoicorum veterum fragmenta*, II, 182 y 187.
[23] *Vidas de los filósofos...*, VII, 39.
[24] Sexto Empírico, *Adversus Mathematicos*, VIII, 70.
[25] *Ibidem*.

2) *Lektá* completos (αὐτοτελῆ): son aquellos que constituyen una enunciación completa; por ejemplo, "Dión pasea". Se subdividen en:
   a) Proposiciones (ἀξιώματα): un ἀξίωμα es un *lektón* completo asertórico.
   b) Otros: preguntas, imperativos, deseos, etc.

El ἀξίωμα, que corresponde al concepto moderno de *proposición* en cuanto opuesta a *oración* o *enunciado*, es lo que es verdadero o falso[26].

División de los axiomas[27]

1) *Simples:* Sus partes no pueden formar un axioma. Estos pueden ser:
   a) *Enunciativo* o aseverativo. Por ejemplo, "Dión pasea".
   b) *Denegativo*: compuesto por una partícula negativa y un predicado. Por ejemplo, "Ninguno pasea".
   c) *Negativo*: Se forma anteponiendo la partícula "no". Por ejemplo, "No es cierto que sea de día".
   d) *Sobrenegativos:* negativos de los negativos. Por ejemplo, "No es cierto que no sea de día".
   e) *Privativo:* Se le antepone la partícula a- al predicado. Por ejemplo, "Este hombre es a-político".
   f) *Definido:* El pronunciado con indicación de un individuo en particular. Por ejemplo, "Este pasea".
   g) *Indefinido:* Aquel en el que predomina una parte indefinida. Por ejemplo, "Alguien pasea".
   h) *Intermedios* (entre los definidos y los indefinidos): Por ejemplo, "Sócrates pasea" resulta intermedio, porque no es ni indefinido, porque determina el objeto en cuanto a la especie, ni definido, porque no es pronunciado con indicación.
2) *No simples*: Clasificados según la conectiva que en ellos aparece:
   a) *Condicional:* "*Si* es de día, *entonces* hay luz".
   b) *Inferencial:* "*Puesto que* es de día, hay luz".
   c) *Conjunción:* "Es de día *y* hay luz".
   d) *Causal:* "*Porque* es de día hay luz".
   f) El que manifiesta lo más y lo menos: "Más es de día que es de noche".

Esta lista, según criterios no mutuamente excluyentes, constituye un ejemplo de la contaminación, en la teoría estoica, entre el punto de vista de la lógica formal y el del análisis del lenguaje.

2. 2. Sistema de la lógica estoica

Funtores

Los estoicos conocían los principales funtores de nuestro cálculo moderno de proposiciones:

- El *negador*. Hay que señalar que los estoicos consideraban proposiciones simples (atómicas) aquellas que contenían la partícula "no", tales como "no es de día". Ahora bien, siempre insistieron en que la negación contradictoria de una proposición es aquella que lleva la partícula negativa al comienzo de la frase, afectando a toda ella.
- La *disyunción*, en los sentidos: inclusivo y exclusivo.
- La *incompatibilidad:* negación de la conjunción, como aparece en la primera premisa del tercer indemostrado: "No al mismo tiempo lo primero y lo segundo".
- La *conjunción*
- La *implicación*, con los sentidos antes señalados.

Estos funtores pueden ser definidos unos en términos de otros. Así[28], el condicional: "Si las venas de x se alteran de esta manera, entonces x tiene fiebre" equivale a la negación de la conjunción: "No es cierto que las venas de x se alteren de esta manera y x no tenga fiebre". Y también[29] la disyunción (que ha de entenderse aquí en sentido no exclusivo): "Es de día o es de noche" significa lo mismo que el condicional: "Si no es de día, es de noche".

Los argumentos

Un argumento (λόγος) es "un sistema compuesto de premisas (λήμματα) y conclusión (ἐπιφορᾶς)". Los argumentos se dividen en:

1) *Válidos*. Un argumento válido es aquel en que la negación de la conclusión es incompatible con la conjunción de las premisas[30]. Pueden ser:
   a) *Verdaderos:* los que tienen premisas verdaderas.

---

[26] *Ibidem*, VIII, 12; Diógenes Laercio, *Vidas...*, VII, 65.
[27] Diógenes Laercio, *Vidas...*, VII, 69; Sexto Empírico, *Adversus Mathematicos*, VIII, 96.
[28] *Confert* Cicerón, *De fato*, 15, 16.
[29] *Confert* Galeno, *Institutiones logicae*, edic. cit., p. 9.
[30] Diógenes Laercio, *Vidas...*, VII, 77.

b) *Falsos:* aquellos que o bien no son válidos, o bien tienen alguna premisa falsa.

Los argumentos verdaderos se subdividen, a su vez en:

- *Demostrativos* (ἀποδεικτικοί): en ellos la conclusión se aprehende por la fuerza del argumento.
- *No-demostrativos:* la conclusión se aprehende, no por la fuerza del argumento, sino por otras razones: por la fe, por ej.

2) *Inválidos:* no cumplen la condición señalada para los válidos.

Según otra clasificación, dentro de los argumentos válidos están los indemostrados (ἀναπόδεικτοι). Por indemostrados cabe entender tanto:

1) argumentos que no han sido demostrados.
2) argumentos que no necesitan ser demostrados, porque resulta evidente que son válidos. Estos se dividen en:

a) *Simples*: sus conclusiones se siguen inmediatamente de sus premisas. No necesitan demostración, "puesto que su validez es inmediatamente clara. De este tipo son los cinco "silogismos" o "indemostrados" fundamentales.
b) *No-simples* (derivados): Están compuestos de simples. Y se subdividen en:

- *Homogéneos*: están compuestos de varias instancias de un mismo tipo de argumento simple.
- *Heterogéneos*: compuestos de instancias de diferentes tipos de argumento simples.

Los silogismos

Son los argumentos "indemostrados" (en el sentido de que no necesitan demostración) presentados bajo ciertas formas canónicas, ya que hay argumentos concluyentes sin tomar la forma silogística. Por ej. si en vez de decir "Si lo 1º, entonces lo 2º" se dice "De lo 1º se sigue lo 2º", el argumento no será menos concluyente, pero no será un silogismo, como tampoco lo es: "Lo 1º es mayor que lo 2º y lo 2º es mayor que lo 3º; por tanto, lo 1º es mayor que lo 3º".

Hay cinco formas canónicas fundamentales del silogismo, cuya formulación se atribuye a Crisipo. Sólo serán silogismos los argumentos que, o bien se expresan bajo una de esas formas, o bien se reducen a ellas según reglas bien definidas.

Los cinco indemostrados, simbolizados con números ordinales, que representan proposiciones, son:

(1) Si lo primero, entonces lo segundo.
Es así que lo primero.
Luego lo segundo.

(2) Si lo primero, entonces lo segundo.
No lo segundo.
Luego no lo primero.

(3) No a la vez lo primero y lo segundo.
Lo primero.
Luego no lo segundo.

(4) O lo primero o lo segundo.
Lo primero.
Luego no lo segundo.

(5) O lo primero o lo segundo.
No lo segundo.
Luego lo primero.

El (4) exige la interpretación de la disyunción en sentido exclusivo; el (5) es válido tanto para disyunción en sentido exclusivo como para la disyunción en sentido inclusivo.

Estos cinco silogismos juegan el papel de axiomas en un sistema axiomático una vez convertidos en proposiciones implicativas, si bien constituyen esquemas de inferencia, en términos de la lógica formal de proposiciones.

Las reglas de inferencia

Los estoicos utilizaban cuatro reglas de inferencia y un principio o regla más general, que podríamos llamar "principio de condicionalización" o "teorema de deducción": "si una conclusión β es válidamente derivable de las premisas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$, entonces la proposición condicional $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n) \rightarrow \beta$ es lógicamente verdadera".

Parece que los estoicos utilizaron dicho principio; pero hay que hacer las precisiones siguientes[31]:

1) Los estoicos siempre establecen el principio como una equivalencia en vez de como un condicional.
2) Los contextos en los que aparece el principio son siempre aquellos en los que Sexto Empírico interpreta a los estoicos como intentando ofrecer un criterio para la validez de argumentos.
3) No hay ejemplo aducido del uso del principio por los estoicos como una regla de inferencia.
4) "Lógicamente verdadera" es reemplazable por "diodóricamente verdadera".

31 *Confert* B. Mates, *Lógica de los estoicos*, edic. cit., p. 128-129.

Pero estas reservas no obstan para establecer la semejanza entre el principio estoico y la regla moderna. Así, dado el esquema siguiente:

Si es de noche, está oscuro.
Es de noche.
Luego está oscuro.

El correspondiente condicional es:

Si (es de noche y si es de noche, está oscuro), entonces está oscuro.

Este condicional es entendido en sentido diodórico: es verdadero puesto que *nunca* posee un antecedente verdadero y un consiguiente falso; porque, cuando es de día, el antecedente, es decir, "es de noche y si es de noche, está oscuro", es falso, y su consiguiente, "está oscuro", es falso, y el condicional es, así, verdadero y, por lo tanto, será verdadero.

Y este otro argumento queda como ejemplo de argumento inválido; y prueba Sexto Empírico que es inválido porque su correspondiente condicionalización tiene un antecedente verdadero y un consiguiente falso, cuando es de noche. Por lo tanto, el condicional resultante no es diodóricamente verdadero:

Si es de día, hay luz.
Hay luz.
Luego es de día.

Cuya condicionalización es:

Si (hay luz y si es de día, hay luz), entonces es de día.

A partir de los cinco indemostrados canónicos se obtienen, mediante reglas definidas, innumerables conclusiones -como dice Cicerón-[32], reduciendo éstas a alguno de los indemostrados. Estas reglas llamadas θέματα se reducían a cuatro, de las que sólo nos ha llegado noticia de dos: la primera y la tercera.

La primera es una regla de reducción a lo imposible[33]: Si de dos premisas se deduce una conclusión, entonces una cualquiera de las premisas con la negación de la conclusión da lugar a la negación de la otra premisa.

La otra viene a decir que cuando de dos proposiciones resulta una tercera proposición, y una de las dos primeras puede derivarse de otro par de premisas, entonces se puede concluir la tercera proposición a partir del segundo par de premisas y de la premisa que queda del primer par:

$$\text{Si } \frac{A \,\&\, B}{C} \text{ y } \frac{X \,\&\, Y}{B}, \text{ entonces } \frac{X \,\&\, Y \,\&\, A}{C}$$

Benson Mates[34] ofrece varias citas que apoyan la compleción del sistema de lógica de proposiciones de los estoicos. Al no conocer las otras dos reglas no podemos decir si el sistema era completo. Tampoco sabemos mucho de las "innumerables conclusiones" derivadas a partir de los cinco indemostrados.

Argumentos no-simples (compuestos)

Son aquellos que pueden ser analizados en sus componentes, argumentos simples. Ejemplos:

(1) Si es de día, entonces si es de día, hay luz.
Es de día.
Luego hay luz.
(Homogéneo: compuesto de dos argumentos del tipo del primer indemostrado).

(2) Si a la vez lo primero y lo segundo, entonces lo tercero.
No lo tercero.
Lo primero.
Luego no lo segundo.
(Heterogéneo: compuesto de un argumento del tipo del segundo indemostrado y de otro del tipo del tercer indemostrado).

(3) O lo primero o lo segundo o lo tercero.
No lo primero.
No lo segundo.
Luego lo tercero.
Este viene sin prueba. Puede ser analizado como dos argumentos tipo del quinto indemostrado. Crisipo sugirió que la estructura de este argumento la tienen presente los perros, cuando rastrean y llegan a una trifurcación del sendero.

(4) Otro famoso ejemplo de argumento "de dos condicionales" debido a los estoicos y transmitido por Orígenes[35], es éste:
Si sabes que estás muerto, estás muerto.
Si sabes que estás muerto, no estás muerto.
Luego no sabes que estás muerto.

Y éste otro:
Si un signo existe, un signo existe.
Si un signo no existe, un signo existe.
O un signo existe o un signo no existe.
Luego un signo existe.

---

[32] *Topica*, 14, 57.
[33] Apuyelo, *In de Interpretatione...*, edic. Oud., pp. 277-78.
[34] *Lógica de los estoicos*, edic. cit., pp. 139-40.
[35] Orígenes, *Contra Celsum*, VII, 15.

Estos ejemplos muestran que las demostraciones lógicas de los estoicos estaban, aunque menos desarrolladas, muy próximas a las demostraciones modernas de la lógica de proposiciones.

Los argumentos inválidos. Las paradojas

Distinguían cuatro clases de argumentos inválidos no mutuamente excluyentes:

1) Argumentos *incoherentes:*
   Si es de día, hay luz.
   Se está vendiendo trigo en el mercado.
   Luego Dión está paseando.

2) Argumentos *redundantes:*
   Si es de día, hay luz.
   Es de día.
   Dión está paseando.
   Luego hay luz.

3) Argumentos presentados según un *esquema inválido:*
   Si es de día, hay luz.
   No es de día.
   Luego no hay luz.

4) Argumentos *deficientes:*
   O la riqueza es buena o la riqueza es mala.
   No es mala.
   Luego es buena.

Se dice que es inválido por deficiencia, puesto que la 1ª premisa sería:
   La riqueza es o buena o mala o nada.

También sabían del círculo vicioso, que llamaban ὁ διάλληλος τρόπος, pero no tenemos discusión alguna del mismo.

Con mayor desprecio se ha mirado a los estoicos por su interés por las *paradojas*. La más famosa paradoja, considerada por los estoicos y probablemente la única que posee todavía algún interés para los lógicos, es la del mentiroso (ὁ ψευδόμενος). De ella hay varias versiones. Crisipo escribió 6 libros sobre ella, y también muchas críticas a quienes consideraban que podrán resolverla. Las otras paradojas:

- La del cornudo:
  Lo que no has perdido, todavía lo tienes.
  No has perdido los cuernos.
  Luego todavía tienes cuernos.
- La del carro:
  Todo lo que dices pasa por tu boca.
  Tú dices "carro".
  Luego un carro pasa por tu boca.
- La de Nadie:
  Si alguien está aquí, ent. él no está en Rodas.
  Alguien está aquí.
  Luego no es el caso que alguien esté en Rodas.

2. 3. Diferencias entre la lógica estoica y la aristotélica

Nominalismo estoico frente al *conceptualismo* aristotélico. Los estoicos son abiertamente nominalistas. Como ya lo había dicho Antístenes: sólo los individuos existen. No hay lugar en su filosofía para el concepto, para los géneros y las especies. Aristóteles funda su lógica completamente en la consideración de géneros y especies.

Podríamos decir que de las proposiciones esenciales y difíciles de conciliar de la filosofía aristotélica:

"No hay ciencia más que de lo general",
"Sólo el individuo existe realmente",

los estoicos han suprimido la primera y han conservado la segunda. Por tanto, si no hay en la realidad más que individuos, la ciencia y, en particular, la lógica, no ha de tratar más que con individuos.

Esta oposición a la filosofía aristotélica la vemos en los tres aspectos siguientes:

En la teoría de la definición

La definición no es hecha a base de géneros, especies o esencias, como en Aristóteles, sino que es la enumeración de los caracteres propios de cada ser. No indica la diferencia específica, sino que enumera las diferencias.

El τὸ τί ἦν εἶναι de Aristóteles es sustituido por el τὸ τί ἦν de Antístenes. La definición para los estoicos no es más que la indicación de los caracteres propios (ἰδίου ἀπόδοσις). Lo mismo cabe decir de la *teoría de la división:* para los estoicos no hay más división que la fundada en la clasificación de los seres. Por eso los estoicos admiten tantas clases de divisiones.

En la teoría de la proposición

Las proposiciones de los estoicos son siempre compuestas (condicionales y disyuntivas). La proposición por excelencia estoica es el condicional ("si es de día, hace sol"). Posee la característica de decir que si tal hecho se da, se da tal otro.

Las proposiciones simples y categóricas (típicas de la lógica aristotélica) poseen su utilidad práctica, pero no poseen, por así decir, ningún papel en la lógica propiamente dicha. Las proposiciones condicionales constituyen la forma más natural y simple de inferencia. De aquí se derivan varias consecuencias:

a) En esta lógica no es preciso tener en cuenta la cantidad de proposiciones.
b) Por la misma razón, en la lógica estoica el silogismo condicional reemplaza ordinariamente al silogismo categórico aristotélico.
   Con ello escapan a la necesidad de resolver una cuestión tan debatida y que ha dividido a los inves-

tigadores de todas las épocas, como es la de saber si el silogismo ha de ser interpretado desde el punto de vista:

- **intensional**: el atributo está comprendido en el sujeto (explicar la relación de implicación entre conceptos)
- **extensional**: el sujeto está incluido en el atributo (relación de inclusión entre clases)

Ni lo uno ni lo otro, responden Zenón y Crisipo. No se trata de géneros que contienen especies o de conceptos definidos por diferencias específicas, sino que las proposiciones y el razonamiento recaen únicamente sobre los individuos y sobre grupos de cualidades enlazadas según ciertas leyes.

En la lógica estoica la palabra que expresa la relación entre las variables no es ὑπάρχει o ἔνεστι, sino ἀκολυθεῖ o ἕπεται.

Teoría del razonamiento y de la demostración

En el razonamiento estoico no se trata de establecer relaciones de inclusión o exclusión entre los conceptos, sino de establecer relaciones de concomitancia o de sucesión entre los acontecimientos. No se trata de afirmar una semejanza, sino de pasar de un hecho a otro que le sigue en el tiempo. De aquí que las variables estoicas sean ordinales (indicaciones de orden temporal) frente a las variables literales de Aristóteles que representan conceptos.

Aristóteles dirá ὑπάρχειν; este esquema no sirve para la lógica estoica; no se puede decir

τὸ δεύτερον ὑπάρχει τὸ πρῶτον

Puesto que no tratan de conceptos, géneros y especies, no han de ocuparse de los modos y figuras silogísticas.

Lo único posible y legítimo es reducir todos los silogismos posibles a un pequeño número de tipos elementales de forma condicional o disyuntiva. Esto fue lo que hicieron al distinguir 5 silogismos irreductibles. En ellos se trata, no de relaciones entre conceptos, sino de un orden de sucesión entre acontecimientos.

Siendo esto así, podría parecer a primera vista que tanto la definición como la demostración reposan en último término sobre la experiencia, porque sólo la experiencia nos muestra qué hechos se siguen en el tiempo. Tal sería la dirección seguida por Stuart Mill, quien hace reposar su teoría de la definición y, consiguientemente, toda su lógica sobre los datos sensibles.

Del *nominalismo* (los estoicos) al *empirismo* la transición es fácil, pero no necesaria. Del nominalismo al empirismo pasaron, antes que Mill, los epicúreos.

Entre el antecedente y el consecuente existe una relación no sólo de sucesión, sino *necesaria*. Pero ¿qué tipo de necesidad y cómo se establece? Al lado de la necesidad lógica se puede concebir otra que Leibniz denomina *hipotética*, aquella que puesto el antecedente el consecuente tiene lugar infaliblemente.

Y no es menos inteligible o menos racional si se admite que la ligazón entre el antecedente y el consecuente ha sido establecida con vistas a un gran bien, sea por una voluntad trascendente como la de Dios, sea por una inteligencia inmanente. Si nuestra razón tiene necesidad de recurrir a la experiencia para conocerla, una inteligencia más potente la comprende directamente. Y cuando nosotros sobrepasamos los datos incompletos de la experiencia, cuando nos anticipamos a la experiencia futura es en cierto modo porque representamos (exhibimos) la sabiduría que ha dispuesto todas las cosas en vistas de fines.

Tal lógica, según Leibniz, reposa sobre el principio de contradicción y el de razón suficiente. Tal ha sido la concepción estoica de la *necesidad* (desde un punto de vista inmanente al mundo) si se considera la doctrina de Crisipo sobre los posibles.

En su controversia con Diodoro de Megara, según refiere Cicerón en *De fato:*

— según Diodoro, no es posible más que aquello que ha sucedido o sucederá

— según Crisipo hay posibles que podrían haberse realizado y no se realizaron jamás. Entre los últimos y los primeros es necesario que una voluntad o una inteligencia haya hecho una elección; y dicha elección no puede estar fundada más que sobre la consideración del bien.

Esta es la diferencia entre fatalismo y determinismo. Diodoro era un lógico que sólo se servía del principio de contradicción, y no consideraba la necesidad abstracta. Crisipo aplicaba, a su manera, el principio de razón suficiente y su determinismo estaba ligado a su optimismo.

Si queremos buscar semejanzas entre la lógica estoica y las doctrinas de los modernos, no es con Spinoza como Hamelin quiere, sino con Leibniz con quien se encontrarán las analogías más importantes. Spinoza toma partido por la *necesidad absoluta*, aquella que Leibniz llama *metafísica*, por oposición a la necesidad *hipotética* o moral. Spinoza[36] desecha como la más falsa de todas las doctrinas la que coloca el bien en el vértice de las cosas y subordina a él la voluntad misma y la inteli-

[36] En *Etica*, prop. 33, parte I.

gencia de Dios. De tal modo que prefiere antes la teoría cartesiana de la voluntad arbitraria de Dios.

¿Cómo explican, en definitiva, los estoicos la *ligazón necesaria* entre dos cosas concebidas, por lo demás, como distintas entre sí? Los modernos recurrieron a la experiencia y lo denominaron *teoría de la inducción*. Natorp dice: ¿por qué saben los estoicos que hay un lazo necesario entre la humanidad y la mortalidad?; y responde: quizá porque el estoicismo lo exigía así.

La respuesta parece demasiado fácil para que sea verdadera. Cabe una interpretación menos fácil pero más ajustada al problema: a través de su teoría de la πρόληψις o anticipación. Para los estoicos, la πρόληψις es un criterio de verdad. Los estoicos la consideraban tan infalible como la misma sensación o representación comprensiva. La πρόληψις es obra de la naturaleza o, dicho de otro modo, de la razón que gobierna las cosas. Por eso la Lógica, contrariamente a Aristóteles, es parte de la filosofía en cuanto que estudia una de las manifestaciones del Logos universal. Y, puesto que el Logos se expresa a través del lenguaje, la lógica estudia tanto las formas y las leyes del pensamiento como las del lenguaje. Esta razón espontánea nos representa la realidad misma y cuando nuestra razón examina (analiza) los conceptos de la experiencia no hace más que encontrarse a sí misma; y cuando afirma en un caso particular la necesidad del lazo que une el antecedente al consecuente, se coloca en el absoluto, habla en nombre de la Razón universal.

Si la πρόληψις es infalible, es precisamente porque ella es la obra espontánea de la Naturaleza, se forma en nosotros sin nuestra participación. La experiencia no es otra cosa que un primer acto, una primera manifestación de la Razón. Por eso una teoría de la inducción, tal como la conciben los modernos, sería no sólo superflua, sino contraria al espíritu del sistema. Los epicúreos que no tenían la misma confianza que los estoicos en la naturaleza, afirmaban que antes de pasar de lo semejante a lo semejante, había que asegurarse mediante numerosas y pacientes observaciones y experimentos. Estos serán, antes que los nuevos escépticos, los auténticos iniciadores del método experimental y los precursores de Bacon y Mill.

Por eso la lógica de los estoicos difiere de la de Mill. Es en Leibniz, y más en concreto en su *Teodicea*, donde se encuentran las mayores semejanzas.

BIBLIOGRAFIA

Arnin, J., *Stoicorum veterorum fragmenta*. 4 vols. Teubner, Stuttgart, 1964.

Becker, O., *Zwei Untersuchungen zur antiken Logik*. Otto Harrassowitz, Wiesbaden, 1957.

Brochard, V., "Sur la logique des Stoiciens", reimpr. en *Etudes de philosohie moderne*. Nueva edic. en Vrin, París, 1967.

Brunschwig, J., (ed.), *Les stoiciens et leur logique*. Vrin, París, 1978.

Cicerón, M. T., *De fato*. Edic. V. Ax. Teubner, fasc. 46, Stuttgart, 1965.

Elorduy, E., "La lógica de la Stoa", en *Revista de Filosofía*, III (1944), pp. 7-65; 222-265.

Elourdy, E., *El estoicismo*, 2 vols. Gredos, Madrid, 1972.

Frede, M., *Die stoische Logik*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1974.

Galeno, *Institutio logica*. Edic. Karl Kalbfleisch, Teubner, Leipzig, 1896.

Henne, D., *École de Mégare*. París, 1843.

Levi, A., "Le dottrine filosofiche della scuola di Megare", en *Rendiconti della Reale Accademia nazionale dei Lincei*, ser. VI, vol. VIII (1932), pp. 463-499.

Lukasiewicz, J., *Para una historia de la lógica de enunciados*. Trad. J. Sanmartín. Cuadernos Teorema, Valencia, 1974.

Mates, B., "Stoic logic and the text of Sextus Empiricus", en *American Journal of philosophy*, LXX (1949), pp. 290-298.

Mates, B., *Lógica de los estoicos*. Trad. Miguel García. Tecnos, Madrid, 1985.

Mignucci, M., *Il significato della logica stoica*. Riccardo Patron, Bolonia, 1967.

Pohlenz, M., *Die Stoa. Geschichte einer geistigen Bewegung I*. Vandenhoech Ruprecht, Gotinga, 1948.

Preti, G., "Sulla dottrina del 'semeion' nella logica stoica", en *Rivista critica di storia della filosofia*, XI (1956), pp. 5-14.

Schuhl, P. M., *Le dominateur et les possibles*. P. U. F., París, 1960.

Sexto Empírico, *Opera*. 4 vols. Edic. y trad. inglesa de R. G. Bury. William Heinemann, Londres, 1961.

Viano, C. A., "La dialettica stoica", en *Rivista di filosofia*, XLIX (1958), pp. 179-227.

Virieux-Reymond, A., *La logique et l'épistemologie des stoiciens*. Ed. "Liré", Chambéry, 1950.

Diógenes Laercio, *Vidas de los filósofos más ilustres*. Edic. con trad. ingl. de R. D. Hicks. W. Heinemann, Londres, 2 vols., 1950-51.

IV. Epicúreos

Los epicúreos no prestaron tanto interés a la lógica como los estoicos[1]. En principio la filosofía comprendía, según Epicuro, dos partes: la física y la ética. Sólo *a posteriori* "por la necesidad de las cosas, teniendo que distinguir las expresiones ambiguas y desvelar los errores aparecidos bajo la apariencia de verdad"[2], introdujo la *Canónica* que fija las reglas que permiten distinguir lo verdadero de lo falso, estableciendo tres criterios de verdad: las sensaciones (αἰσθήσεις), las anticipaciones (προλήψεις) y las afecciones (πάθη).

Las afecciones nos proporcionan sólo el conocimiento del placer y el dolor que las cosas nos causan, mas no nos dicen nada de lo que las cosas son en sí mismas. Sobre ellas reposa la filosofía práctica; ellas determinan lo agradable, lo útil y lo rehusable, pero no de modo subjetivo (psicologista), sino en cuanto conformándose a la naturaleza en general: lo placentero es algo no individual (subjetivo) sino objetivo; afecta no a un individuo en particular sino a todos aquellos organismos (humanos y animales) conformados por la misma naturaleza, por el mismo mecanismo de átomos. Sólo de este modo pueden resultar criterio de verdad y pueden engendrar también anticipaciones, contribuyendo a la configuración del lenguaje por convención. Quedan, pues, las sensaciones y las anticipaciones como los elementos con los que construir la filosofía especulativa. De ellas la sensación no se discute; es evidente en sí misma.

Las sensaciones resultan evidentes por sí mismas; se imponen de inmediato; son automáticas; en cuanto procedimiento de constatación permiten el establecimiento del lenguaje por convención, en cuanto establecido por todos y referido a las mismas sensaciones. El convencionalismo del lenguaje obedece a la identidad de afecciones y de sensaciones para todos los individuos que lo instauraron. Por lo tanto, este convencionalismo no significa arbitrariedad: la relación convencional entre las palabras y las cosas no es arbitraria, porque la palabra es la respuesta de los átomos del alma a las sensaciones. No es arbitraria[3]: dada una configuración de sensaciones (haces de átomos) iguales para todos los de idéntica conformación atomística, éstas cambian por contacto y estructuran de determinada manera los átomos del alma (ἐπιβολὴ τῆς διανοίας). Las imágenes así formadas brindan la construcción (convencional) del nombre en correspondencia con ellas. Como el mecanismo de la sensación es objetivo y automático, los nombres (y el lenguaje) resultan también objetivos en cuanto responden a configuraciones de sensaciones. El choque de sonidos que conforma el nombre corresponde al choque de los átomos en el alma. Esta correspondencia es lo que constituye la *anticipación:*

> "Luego que el nombre "hombre" es pronunciado, al punto su imagen (ὁ τύπος αὐτοῦ) se presenta al espíritu por anticipación (πρόληψις), en la que los sentidos nos sirven de guía. De manera que cualquier cosa que ha sido clasificada originariamente bajo cada palabra resulta, pues, evidente. Y ciertamente, no inquiriríamos lo que inquirimos si no lo hubiésemos conocido antes, y no podríamos nombrar ninguna cosa si no hubiésemos adquirido antes la imagen por la anticipación (πρόληψις)"[4].

Así, pues, el lenguaje entero y todo el pensamien-

---

[1] Ciceron, *De finibus*, I, 7, 22: "In altera philosophiae parte, quae λογική dicitur, iste vester plane, ut mihi quidem videtur, inermis ac nudus est; tollit definitiones, nihil de dividendo ac partiendo docet, non quomodo efficiatur concludaturque ratio tradit, non qua vi captiosa solvantur, ambigua distinguantur, docet".

[2] Séneca, *Epistola ad Lucilium*, 89, 11.

[3] *Confert* Diógenes Laercio, *Vidas*... X, 75: Dice Epicuro: τὰ ὀνόματα ἐξ ἀρχῆς μὴ θέσει γενέσθαι.

[4] Diógenes Laercio, *Vidas*... X, 33.

to también reposa sobre las *prolépseis*. El concepto (o *prólepsis)* nace por la repetición de las mismas sensaciones: no es más que la imagen general de lo sensible que pervive en la memoria (μνήμην τοῦ πολλάκις ἔξωθεν φανέντος)[5]. Esta imagen es la que fijamos en las palabras y que aplicamos, luego, a los casos particulares semejantes. Los conceptos (o *prolépseis)* constituyen un criterio de verdad de nuestras opiniones, porque -al igual que las sensaciones que resumen- son imágenes de las cosas en el alma.

> "Es, por lo tanto, necesario observar el significado originario correspondiente a cada palabra y no necesitar ya de demostración alguna, si es que realmente vamos a tener a qué referir lo buscado, lo dudado, y lo opinado"[6].

La *prólepsis* en la teoría epicúrea permite:

1) Establecer una relación automática entre el concepto general y las sensaciones: registro automático en la διάνοια de los diferentes cambios de movimientos de los átomos. Relación objetiva (no arbitraria), aunque convencional entre el pensamiento y el lenguaje.
2) Establecer también una correspondencia entre el concepto general y la palabra. El concepto general queda fijado o expresado en la palabra porque su significado está basado (aunque por convención) sobre la sensación inmediata de los objetos.

El lenguaje, pues, correcto es el lenguaje "natural" construido por los individuos que con idéntica conformación atomística tienen las mismas sensaciones (manejan los mismos objetos de experiencia):

> "Cada raza sometida a sus propias afecciones (ἴδια πασχούσας πάθη) y recibiendo sus propias imágenes (ἴδια λαμβανούσας φαντάσματα) emitirá sonidos de manera propia de acuerdo con esas afecciones y esas imágenes[7].

Por eso:

a) Las palabras se refieren primariamente a objetos que son "perceptibles", "manifiestos" (τὰ δῆλα).
b) Las palabras (y el lenguaje en general) configurados según las *prolépseis* nos proporcionan la verdad de las cosas. Y aquí radica su principal diferencia con los estoicos respecto al criterio de verdad: Los estoicos distinguían en su teoría lingüística, tres componentes: lo significante, lo significado y el objeto, y colocaban la verdad en lo significado; los epicúreos, por el contrario, distinguen dos componentes: palabras y objetos y sitúan la verdad en las primeras. Esta diferencia es recogida por Sexto Empírico[8]:

> "Pero había otra controversia, en la que unos colocaban la verdad y la falsedad en lo significado [περὶ τῷ σημαινομένῳ); otros en la palabra (περὶ τῇ φωνῇ); otros en el movimiento de la mente (περὶ τῇ κινήσει τῆς διανοίας). Los defensores de la primera opinión eran los estoicos... Epicuro y Estratón se presentaban sosteniendo la segunda. La última opinión parece ser una invención escoliasta".

c) Sobre los conceptos generales (o *prolepseis)* fijados en palabras podemos razonar y extraer inferencias acerca de objetos que son "imperceptibles" (ἄδηλα). Estas inferencias sobre lo que no es directamente percibido (por ejemplo, sobre los átomos y el vacío) son siempre inferencias "por analogía" entre las imágenes de las sensaciones (o lo perceptible) y lo no perceptible por sentidos (lo no manifiesto).

Inferencia por analogía

Este procedimiento lógico es introducido por Epicuro y luego tiene un gran desarrollo en su escuela. Epicuro usa dicho procedimiento para llegar a afirmaciones sobre la naturaleza de los átomos, sobre la existencia del vacío y de los dioses, lo que le permite establecer juicios acerca de realidades *imperceptibles* basándose en la observación de lo *perceptible*. En este sentido Epicuro sigue una tradición empirista propia de la primera filosofía griega, y seguida sobre todo por los médicos: lo perceptible (el síntoma) constituye un signo capaz de revelar lo imperceptible (la enfermedad). Así sostiene Epicuro[9]:

> "Hay que estar bien atento a las sensaciones y en una palabra a las aplicaciones (ἐπιβολὰς) presentes, bien de la mente o bien de cualquier otro criterio, e igualmente respecto de las afecciones del momento, a fin de que podamos inferir lo que espera confirmación y lo que es imperceptible".

Y luego aplica la inferencia por analogía al conocimiento del átomo[10]:

---

[5] *Ibidem*, X, 33.
[6] Epicuro, *Carta a Herodoto*, en Diógenes Laercio, *opus cit.*, X, 28.
[7] Epicuro, *Carta a Herodoto*, en Diógenes L., *Vidas*... X, 75.
[8] *Adversus Mathematicos*, VIII, 11-14.
[9] *Carta a Herodoto*, en Diógenes Laercio, *Vidas*... X, 38.
[10] *Ibidem*, X, 58-59.

"Es preciso considerar que el minimum perceptible (ἐν τῇ αἰσθήσει) no es tal cual aquello que admite pasos de parte a parte ni en todo y totalmente diverso de ello, sino que posee algo en común con las cosas que admiten pasos de parte a parte, no teniendo, sin embargo, distinción de partes. Pero cuando en virtud de la semejanza que resulta de tal comunidad creemos distinguir algo en el mínimo, una parte por aquí y otra por allá, necesariamente nos las habemos con un minimum igual al primero. En efecto, vemos estos mínimos, empezando por el primero, uno después de otro y no como partes de un mismo mínimo; y no los vemos contiguos como partes con respecto a partes, sino que por su característica (unidad indivisible) determinan la diversa medida de las magnitudes: mayor o menor según su número. Hay que considerar que se encuentra el minimum en el átomo. Pues es evidente que sólo en pequeñez difiere del mínimo percibido por la sensación, pero sigue la misma analogía".

Epicuro utilizó, mas no sistematizó, este procedimiento inferencial, "por analogía". Pero a finales del siglo II a. C. y primera mitad del siglo I a. C., en medio de las controversias entre estoicos, nuevos académicos y epicúreos acerca de problemas gnoseológicos y metodológicos, surgen varios lógicos epicúreos -Zenón de Sidón, Demetrio de Laconia, Bromius- que bajo la influencia de las ciencias empíricas y en oposición al racionalismo estoico formulan con mayor precisión su método empírico y desarrollan ampliamente la inferencia "por analogía". Zenón, Demetrio, Bromius y Filodemo tomaron parte en la controversia con los estoicos sobre la validez de la inferencia empírica. Gracias a Filodemo de Gadara -fundador en la segunda mitad del siglo I a. C. de una floreciente escuela epicúrea en Nápoles y que mantuvo relaciones de amistad e influencia con los más famosos personajes romanos de su época: Virgilio, Cicerón, Torcuato, Pisón (hermano de César) etc.- podemos conocer las objeciones que los estoicos ponían a la inferencia empírica de los epicúreos y la respuesta de éstos.

Una obra de Filodemo, *Sobre los métodos de inferencia*[11], está dedicada a este asunto.

La inferencia por analogía se basa en un principio inductivo. A partir de la observación de un gran número de casos particulares que origina la formación en nuestra memoria de las anticipaciones cabe establecer jucios sobre las características esenciales de lo no perceptible o sobre el futuro en virtud de la semejanza que resulta de la comunidad con lo perceptible.

Los estoicos arguyen que la inducción, por su propia naturaleza, ha de ser completa para que pueda constituir criterio seguro de verdad. Rechazan, pues, el método de inferencia analógica de Epicuro, según las siguientes razones que recoge Filodemo[12].

1) "No es necesario que, porque tales cosas existan en nuestra experiencia, existan también en lugares que son no perceptibles... (No es necesario que) porque tales cosas no existan en nuestra experiencia, no existan en otros lugares. Quien infiere, del hecho de que una cosa no exite en nuestra experiencia, su no existencia en lugares no perceptibles está presentando una inferencia que no urge".

2) Se basa en los signos comunes, no en los signos particulares. En realidad, un signo es común precisamente porque puede existir, exista o no el objeto no percibido. Y:

"nosotros (los estoicos) ponemos en cuestión los signos comunes... decimos que cualquiera que piense que este hombre es bueno porque es rico usa un signo no válido y común, desde el momento en que algunos hombres que son ricos resultan ser malos, y algunos, buenos. Por tanto, para que el signo particular fuerce a conclusión, no puede existir sin el objeto no percibido que, decimos, está necesariamente con él y del que es signo".

3)"Además el método de la analogía no parece ser necesario en el caso de los objetos únicos observados en lugares que están dentro de nuestra experiencia..."

4) "Cuando hacemos el juicio, 'puesto que los hombres de entre nosotros son mortales, todos los hombres son mortales', el método de la analogía es válido si tomamos como premisa que los hombres en lugares no perceptibles son similares a los hombres de entre nosotros en todos los aspectos, y, por lo tanto, que son similares también en ser mortales; sin esta premisa, no será válido".

5) "Por lo tanto, debemos demostrar que los hombres en tanto en cuanto y en la medida que son hombres, son mortales, si es que vamos a establecer la inferencia en cuestión como necesaria. Puesto que nosotros [los estoicos] somos capaces de demostrar esto por contraposición (ἀνασκευή)[13], rechazamos el método de la analogía"

6) "Vemos, pues, que el método de inferencia no urge; y en general para que tenga fuerza debe asumir que los objetos en lugares no perceptibles son semejantes a los que están en nuestra experiencia. Además, uno debería inferir por analogía

---

[11] Edición con trad. inglesa y comentario de P. H. De Lacy y E. A. De Lacy. Bibliopolis, Nápoles, 1978.

[12] *Opus cit.*, caps. 1-16.

[13] "Contraposición" es una noción específica de la lógica estoica. A ella oponen los epicúreos la "inconcebibilidad" (μὴ δύνασθαι νοεῖν).

así: puesto que todos los cuerpos entre nosotros tienen color, y los átomos también son cuerpos, los átomos tienen color; puesto que todos los cuerpos entre nosotros son destruibles, y los átomos también son cuerpos, los átomos deben ser también destruibles. ¿De qué tipo, a qué tipo de semejanza cabría inferir?" (Similar ataque en Cicerón, *De nat. Deorum*, I, 97-98).

A cada uno de estos argumentos responde Filodemo en los caps. 17-24 de su obra:

1') "La inferencia debe ser hecha no a partir de una propiedad común accidental a otra, sino a partir de aquella propiedad que no ofrece resquicio de evidencia a la contraria y que no ejerce influencia alguna en oposición a las cosas claramente percibidas. ¿Por qué es similar pasar del hecho de que todos los hombres de entre nosotros, cuando son decapitados, mueren y no les salen nuevas cabezas, a la inferencia de que los hombres, en cualquier lugar, cuando son decapitados, quedan afectados de la misma manera, y pasar del hecho de que hay granados e higueras entre nosotros al juicio de que ellos existen en cualquier lugar? Los miembros del mismo género difieren en sus naturalezas, colores, formas, tamaños y otras caraterísticas" (cap. 18).

2') "El argumento basado sobre la distinción entre signos comunes y particulares es también inválido. No es necesario que -puesto que el signo común existe, exista o no el objeto no percibido, mientras que el signo particular existe cuando el objeto no percibido existe, y no existe cuando el objeto no percibido no existe-, por esta razón cada signo particular debe ser una instancia del método de contraposición. Si se da el caso que por negación de lo no aparente se niega lo aparente, entonces la inferencia lo es por contraposición; pero si no es ése el caso y hay otra manera en la que resulta imposible para lo uno existir y para lo otro no existir, como, por ejemplo, cuando es inconcebible que lo aparente exista o que sea como es y que el objeto no percibido no exista, entonces tal argumento no es por contraposición, sino por analogía" (cap. 19).

3') "El argumento a partir de los casos únicos resulta también ineficaz. Nadie de nuestra escuela niega tales peculiaridades, y el método de la analogía no pierde su fuerza porque haya un género de piedras que atraen al hierro. Hay un solo sol y una sola luna en el universo; y entre la multitud de piedras cada género posee una característica distintiva que no es poseída por ningún otro. Si todas las piedras fuesen similares o idénticas a las piedras que atraen el hierro y si de éstas algunas lo atrajesen y algunas no, entonces la analogía por similitud se tambalearía. Pero, puesto que esto no sucede, sino que entre la multitud de propiedades distributivas que exhibe gran variedad, hay una propiedad distintiva de este género de piedras y la piedra (de este género) muestra muy de inmediato su peculiar naturaleza, el método (de la analogía) queda inamovible" (cap. 20).

4') "Tampoco el argumento siguiente constituye amenaza alguna. Pues, cuando de la proposición 'Los hombres de entre nosotros son mortales' inferimos 'los hombres en cualquier lugar son también mortales' no presuponemos que los hombres, acerca de los que hacemos inferencia, sean similares a los de entre nosotros respecto de la mortalidad o que aquéllos sean similares a éstos en todo lo demás excepto en lo referente a la mortalidad; sino que, partiendo de lo que es común, inferimos, del hecho de que todos los hombres de entre nosotros son similares incluso en ser mortales, que todos los hombres universalmente están sujetos a la muerte, puesto que nada se opone a la inferencia o nos impele a pensar que los hombres no están sujetos a la muerte" (cap. 23).

5') "Sucede que el argumento siguiente nace también de la ignorancia. Cuando alguien hace la inferencia a partir de los hombres de entre nosotros y concluye sobre los hombres en cualquier lugar que son mortales, por el hecho de que aquellos cuyas vidas son conocidas a través de la historia y aquellos que han caído bajo nuestra observación son mortales, y no hay evidencia en contra, ese tal hace su inferencia por analogía; y el enunciado de que los hombres de entre nosotros, en la medida en que son hombres, son mortales, que es equivalente al enunciado de que los hombres con esta característica son hombres, viene confirmado por este mismo método analógico. Ningún filósofo dará una prueba de esto con el método y el procedimiento de la contraposición" (cap. 24).

6') "El argumento siguiente tampoco es válido: Los cuerpos en nuestra experiencia son destruibles, no en cuanto cuerpos, sino en cuanto que participan de una naturaleza opuesta a la corpórea y no resistente. Analógicamente, los cuerpos en nuestra experiencia tienen color, pero en cuanto cuerpos; puesto que los objetos en cuanto resistentes al tacto son cuerpos, pero en cuanto que son tangibles no muestran ningún color. En efecto, los cuerpos en la obscuridad no tienen color y, sin embargo, son cuerpos. Por lo tanto, a partir de estas cualidades no hacemos inferencias con respecto a todos los cuerpos; pero nada nos impide hacer inferencias a partir de otras semejanzas usando el método de la analogía de manera apropiada" (cap. 25).

Filodemo, además de responder a cada uno de los argumentos presentados por estoicos contra el método de la analogía, plantea la siguiente defensa: aun admitiendo los argumentos de sus oponentes, hay que aceptar el método de la analogía porque sin él el método alternativo -la contraposición- resultaría inservible:

"Si alguien usa el método de la analogía, no errará, y nosotros consideramos que nuestro juicio es verdadero incluso si encontramos la analogía sólo en una mayoría de casos. Pero diremos continuamente en defensa de esta teoría que, si el método de la analogía no urge, tampoco urge el método de la contraposición. Así, la proposición 'si hay movimiento, hay vacío' no la estableceremos de ningún otro

no sea estableciendo a través del método de la analogía que es imposible que el movimiento tenga lugar sin el vacío. De manera que, primero, establecemos empíricamente todas las condiciones relativas a los objetos que se mueven en nuestra experiencia aparte de aquellos que vemos que no se mueven; juzgamos, entonces, por analogía que todos los objetos que se mueven, se mueven en cualquier caso de manera similar; y con este método inferimos que no es posible para el movimiento existir sin el vacío. Por lo tanto, si este método no tiene la fuerza para probar tal inferencia, el método por contraposición, que resulta completamente válido por y a través de la analogía, tampoco tiene fuerza." (cap. 12-13)

Y, finalmente, también sostiene que la contraposición no es el único método válido de inferencia. La inferencia "si hay movimiento, hay vacío" se somete al criterio de la contraposición porque cuando el vacío es negado por hipótesis, el movimiento también es negado, pero en la proposición "si Platón es un hombre, Sócrates es un hombre", el criterio para la inferencia correcta no es el de la contraposición, sino el de lo inconcebible: Si la anterior proposición es verdadera también lo es ésta: "Si Sócrates no es hombre, Platón tampoco lo es", pero en este resultado no por la negación sobre Sócrates tenemos la negación sobre Platón, sino porque no es posible concebir que Platón sea un hombre si Sócrates no lo es. Y la inconcebibilidad es un criterio empírico basado en el método de la analogía (cap. 17).

BIBLIOGRAFIA

Arrighetti, G., "Sul valore di ἐπιλογίζομαι, ἐπιλογισμός, ἐπιλόγισις nel sistema epicureo", en *La Parola del Passato*, 7 (1952), pp. 119-144.

Bignone, E., *L'Aristotele perduto e la formazione filosofica di Epicuro*, 2 vols., Florencia, 1936.

Diógenes Laercio, *Vidas de los filósofos...* Libro X.

Giorgiantonio, M., "Il fondamento della logica di Epicuro", en *Sophia*, XXVI (1958), pp. 111-114.

Hicks, R. A., *Stoic and Epicurean*. Nueva York, 1910.

De Lacy, P. H. - De Lacy, E. A., *On Methods of inference*. Bibliopolis, Nápoles, 1978. *Philodemus: on Methods of Inference. A Study in Ancient Empiricism*. Lancaster Press, Oxford, 1941.

Long, A. A., "Aisthesis, Prolepsis, and Linguistic Theory in Epicurus", en *Bulletin of the Institute of Classical Studies of the University of London*, 18 (1971), pp. 114-133.

Merbach, T., *De Epicuri Canonica*, 1909.

Rist, J. M., *Epicurus. An Introduction*. Cambridge, 1972.

V. El fin de la Antigüedad Clásica

A finales del siglo III a. n. e. habían quedado sistematizadas "las dos formas de lógica" en la antiguedad clásica: la aristotélica y la estoica. Los siglos siguientes hasta el ocaso de la Edad Antigua asistimos en Lógica, a una confrontación, cuando no a una confusión, de ambos sistemas. Sólo encontramos eclécticos, comentaristas y traductores. Entre los más destacados están:

Marco Tulio Cicerón (106 A.C.-43 D.C.)

No hizo aportación específica a la Lógica; pero la gran influencia de sus obras contribuyó a:

1) Preservar informaciones (aunque no siempre exactas) de cuestiones y tesis mantenidas por los lógicos griegos, en especial, las referidas a los estoicos y epicúreos y que aparecen en sus obras: *De Inventione, De Oratore, Orator, Partitiones Oratoriae* y *Topica*[1].

2) Fijar en la lengua latina ciertos términos específicos de la lógica usados por griegos. Así traduce:

ἀξίωμα	=	enuntiatio, pronuntiatum; quod est verum aut falsum
προέκθεσις	=	propositio
ἀποφατικόν	=	negans
ἐναντίον	=	oppositum
ἀντιφατικόν	=	repugnans
λῆμμα	=	sumptio
πρόσληψις	=	assumptio
ἐπαγωγή	=	inductio
ἀντικείμενον	=	contrarium, oppositum
συμπεπλεγμένον	=	coniunctum, copulatum
διεζευγμένον	=	disiunctum
συνημμένον	=	adiunctum, connexum

3) Que la Lógica quedase en alta estima, porque él la considera indisociable de la Retórica. El "perfecto orador" debía dominar su propia arte (la Retórica) y la vecina (la Dialéctica=Lógica)[2]. Su breve tratado *Tópica* -que Cicerón presentó como una reexposición de los *Tópicos* de Aristóteles- es un manual destinado a los jóvenes oradores romanos (como el *De Oratore)*: en él insiste Cicerón en la necesidad que tiene el orador de elaborar argumentos convincentes y válidos; para dilucidar este último carácter de los argumentos apela múltiples veces a la dialéctica de los estoicos e ilustra con ejemplos extraídos del Derecho Romano los esquemas argumentativos de los estoicos. De esta manera, por la gran influencia que Cicerón ejerció en la Retórica, la Lógica fue posteriormente tenida en alta estima.

Claudio Galeno (130-200)

Aunque médico, escribió mucho sobre lógica; y, aunque peripatético, es un ecléctico. De las 115 obras que escribió sobre Filosofía -según el catálogo por él mismo confeccionado- sólo cuatro se salvaron del fuego que destruyó el Templo de la Paz. Por lo que respecta a la Lógica, amén de un pequeño tratado sobre los sofismas, sólo nos ha llegado su εἰσαγωγὴ διαλεκτική, mejor conocida por su título latino: *Institutio logica*[3]. Esta obra, amén de las aportaciones específicas, tiene gran interés para la historia de la Lógica, por cuanto que su autor recoge y sintetiza tan-

---

[1] Una edición crítica de las obras completas de Cicerón la ha comenzado el *Centro di Studi Ciceroniani*. Roma, 1964.

[2] Confer *Orator*, XXXII, 13: "Esse igitur perfecte eloquentis puto non eam tantum facultatem habere quae sit eius propria, fuse lateque dicendi, sed etiam vicinam eius ac finitimam dialecticorum scientiam assumere".

[3] Edic. de C. Kalbfleisch, Teubner, Leipzig, 1896.

to la terminología, como las tesis de las dos grandes escuelas de lógica griega: la peripatética y la estoica.

En primer lugar, emplea el término λογική en el sentido que actualmente concedemos al término lógica. Así, por ejemplo, emplea la expresión λογικαὶ ἀρχαὶ (=principios lógicos) como principios de la demostración[4].

En segundo lugar, por lo que concierne a las partes específicas de la Lógica encontramos en la obra de Galeno la acuñación de términos y la reelaboración de los puntos siguientes:

1) A la definición aristotélica (ὅρος o ὁρισμός), que tiene por objeto alcanzar la esencia, opone Galeno la descripción (ὑπογραφή), que pretende simplemente dar una idea de las cosas. En este caso Galeno se alinea con los estoicos, quienes rechazan la esencia de Aristóteles y, por consiguiente, la posibilidad de alcanzarla por definición. Para ellos, que no admiten la jerarquía aristotélica de las clases y que sólo conocen los individuos y los hechos particulares concretos, la definición no indica ni la esencia ni la diferencia específica; sólo cabe, y es suficiente, hacer una descripción (ὑπογραφή) del objeto (o individuo) mediante la indicación de sus cualidades sensibles. De ahí que ciertos objetos son descriptibles aun cuando no sean definibles.

2) *Conversión de las proposiciones.* La teoría de la equipolencia (ἰσοδυναμία) de las proposiciones. Esta teoría vendría probablemente en el libro del que sólo conocemos su título: Περὶ τῶν ἰσοδυναμουσῶν προτάσεων.
Según Galeno, dos proposiciones son equipolentes cuando hecha la conversión tienen el mismo valor de verdad.
A la conversión simple de una proposición, consistente en permutar sujeto y predicado (pasar, por ej., de "Todo A es B" a "Todo B es A") llama Galeno ἀναστρέφειν y llama ἀντιστρέφειν a la contraposición: pasar, por ej., de "Todo A es B" a "Todo no-B es no-A". Las proposiciones ἀναστρέφοντα, señala Galeno, no siempre son verdaderas a la vez, ni resultan, por tanto, equipolentes. En cambio, las proposiciones ἀντιστρέφοντα siempre son verdaderas a la vez.

3) *La 4ª figura silogística o figura "galénica".*

Se ha atribuido a Galeno el descubrimiento de la 4ª figura silogística, cuyo esquema es:

$$\begin{array}{c} A - B \\ B - C \\ \hline C - A \end{array}$$

En favor de tal atribución Prantl *(op. cit.*, I, p. 571) aduce varios textos: de Averroes, de Juan Italo, de Zabarella, y de dos fragmentos griegos descubiertos en 1844, y publicados por Minas y luego por Kalbfleisch en la edición de la *Institutio Logica* de Galeno. Scholz[5] y Lukasiewicz[6], por otra parte, consideran que no es Galeno a quien hay que atribuir la paternidad de la 4ª figura. Lukasiewicz aduce otros textos[7] que, según él, aclaran el equívoco: Galeno no admite cuatro figuras de silogismos simples (aristotélicos), ya que en su *Institutio Logica*[8] dice expresamente -luego de haber expuesto las tres figuras aristotélicas- que no hay ni puede haber otras figuras, tal como él mismo había demostrado en su obra Περὶ τῆς ἀποδείξεως. Por su parte el escoliasta anónimo al que antes nos hemos referido dice: "Hay tres clases de silogismos: el categórico, el hipotético y el prosléptico. Del categórico hay dos clases: el simple y el compuesto. Y del simple hay tres clases: la primera, la segunda y la tercera figuras. Del compuesto hay cuatro clases: la primera, la segunda, la tercera y la cuarta figuras. Aristóteles dice que hay tres figuras porque sólo considera los silogismos simples, que constan de tres términos. Mas Galeno, en su Ἀποδεικτική, dice que hay cuatro figuras, porque toma en consideración los silogismos compuestos, construidos con cuatro términos, habiendo encontrado muchos de ellos en los diálogos de Platón"[9].
Este escoliasta sigue diciéndonos cómo formaba Galeno los silogismos compuestos combinando dos a dos las tres figuras de los silogismos simples, y obteniendo, así, $3^2 = 9$ modos silogísticos compuestos.

---

[4] *Confert* Prantl, *Geschichte.....*, ed. cit., vol. I, p. 562.
[5] H. Scholz, *Geschichte der Logik*. Ed. cit., p. 36.
[6] J. Lukasiewicz, *La silogística de Aristóteles...*, Ed. cit., pp. 41-43.
[7] De Scoliastas anónimos, recogidos por Wallies en la ed. por la Academia de Berlín de los Comentarios a Aristóteles, 1899.
[8] Ed. de Kalbfleisch, p. 26.
[9] *Ammonii in Aristotelis Analyticorum Priorum librum I Commentarium*. Ed. M. Wallies, Berlín, 1899, p. IX.

(Combinaciones con repetición de dos en dos de las tres figuras):

$$C_3^2 = C_{3+2-1}^2 = \frac{4!}{2!\,(2!)} = 6$$

De éstas descarta las combinaciones: (E) 2ª figura con 2ª figura y (F) 3ª figura con 3ª figura. Según el escoliasta el rechazo se debe a que en esos casos no es posible concluir de dos premisas negativas (combinación E) ni de dos particulares (combinación F). La realidad es que tales combinaciones no dan lugar a silogismo alguno. Según esto los silogismos compuestos -no los silogismos simples- quedan agrupados en cuatro figuras:

Figuras galénicas de silogismos compuestos.	se obtiene	Figuras aristotélicas de silogismos simples.
1ª	combinando	1ª con 1ª. Ej. B - A / C - B / D - C / D - A
2ª	combinando	1ª con 2ª. Ej. A - B / C - B / D - C / D - A
3ª	combinando	1ª con 3ª. Ej. B - A / C - B / C - D / D - A
4ª	combinando	2ª con 3ª. Ej. C - D / C - B / A - B / A - D

Según esta explicación, a Galeno le corresponde el mérito de distribuir los silogismos compuestos en 4 figuras. Es probable que algún comentarista medieval, poco atento a las distinciones lógicas, le atribuyese la paternidad de 4ª figura de silogismos simples, dándola ya por sentada a partir del Renacimiento con Zabarella a la cabeza (en su obra *De Quarta Syllogismorum figura).*

4) Otra aportación de Galeno a la lógica, fruto de su eclecticismo en lógica aristotélica y estoica es la clasificación de los silogismos[10]: yuxtapone, sin entrar a discutir a cuál de ellos corresponde la prioridad, los silogismos categóricos y los hipotéticos, llamando proposiciones "hipotéticas" no sólo a las condicionales sino a todas las que son compuestas: sean condicionales, disyuntivas o conjuntivas, esto es, a aquellas que figuran en los "indemostrables" estoicos. Y tampoco tiene reparo en utilizar terminología estoica y llamar "indemostrables" a los modos silogísticos de la 1ª figura aristotélica.

Finalmente, a las dos clases de silogismos citados -categóricos e hipotéticos-, añade la tercera: los silogismos relacionales (κατὰ τὸ πρός τι), los cuales no se ajustan a los esquemas aristotélicos o estoicos. Por ejemplo, "Sofronisco es el padre de Sócrates; luego Sócrates es hijo de Sofronisco", o también, "Zenón posee dos veces más que Dión, y Filón dos veces más que Zenón; luego Filón posee cuatro veces más que Dión". Esta clase de silogismos podía constituir -dice-[11] el objeto de una teoría análoga a la que versa sobre los categóricos e hipotéticos.

Porfirio (233-304)[12]

Discípulo de la figura más representativa del neoplatonismo: Plotino (de quien escribió su biografía).

Por lo que concierne a la lógica las obras que nos han llegado de Porfirio son: Εἰσαγογὴ εἰς τὰς Ἀριστοτέλους κατηγορίας *(Introducción a las Categorías de Aristóteles)*, que lleva por subtítulo: Περὶ τῶν πέντε φωνῶν (sobre las cinco voces) y Ἐξήγησις εἰς τὰς Ἀριστοτέλους κατηγορίας κατὰ πεῦσιν καὶ ἀπόκρισιν *(Interpretación de las Categorías de Aristóteles mediante preguntas y respuestas)*[13].

Estas obras de Porfirio ejercieron enorme influjo en la Lógica escolástica medieval por varios motivos: en primer lugar, porque contribuyeron, en buena medida, a la transmisión del legado antiguo. En segundo lugar, porque sirvieron para los lógicos medievales de modelo en cuanto a la forma de comentar la lógica de Aristóteles y de dogma o punto de referencia inexcusable en las disputas sobre ciertas cuestiones lógicas.

---

[10] *Institutio logica*, ed. cit., p. 36.

[11] *Ibidem*, p. 38.

[12] Sobre la lógica de Porfirio véase: A. C. Lloyd, "Neoplatonic Logic and Aristotelian Logic", en *Phronesis*, I (1965), pp. 58-72; 146-160.

[13] Edición de estas obras por A. Busse en *Commentaria in Aristotelem graeca*, IV, Berlín 1887.

En la *Isagogé* Porfirio pretende explicar cinco términos (πέντε φωναί) o *quinque voces* que aparecen con frecuencia en el *Organon* de Aristóteles. Y para ello clasifica, compara unos con otros, mostrando analogías y diferencias, y analiza verbalmente y comenta en largos y tediosos escolios. Las *quinque voces* (o clases de términos universales o *predicables)* son, según Porfirio, el género (γένος) la especie (εἶδος), la diferencia (διαφορά), la propiedad (ἴδιος) y el accidente (συμβεβηκός). Aristóteles había discutido, ciertamente, los predicables, pero en otro contexto, y de ahí que la clasificación de Porfirio no coincida con la del estagirita. En efecto, Aristóteles examina en los *Tópicos*[14] los errores en que incurren los razonamientos dialécticos, errores que detecta con respecto a los predicables por ellos admitidos: la definición, el género, la propiedad, el accidente y la diferencia; habiendo llegado a ellos de la siguiente manera: en una proposición de tipo aristotélico (proposición atributiva, con términos generales cuyo esquema es S-P), el atributo es convertible, o no, con el sujeto. En el primer caso, si expresa la esencia del sujeto, es la *definición;* si no, es la *propiedad.* En el segundo caso, si es parte de la definición del sujeto, es un género o una diferencia; si no, es un accidente.

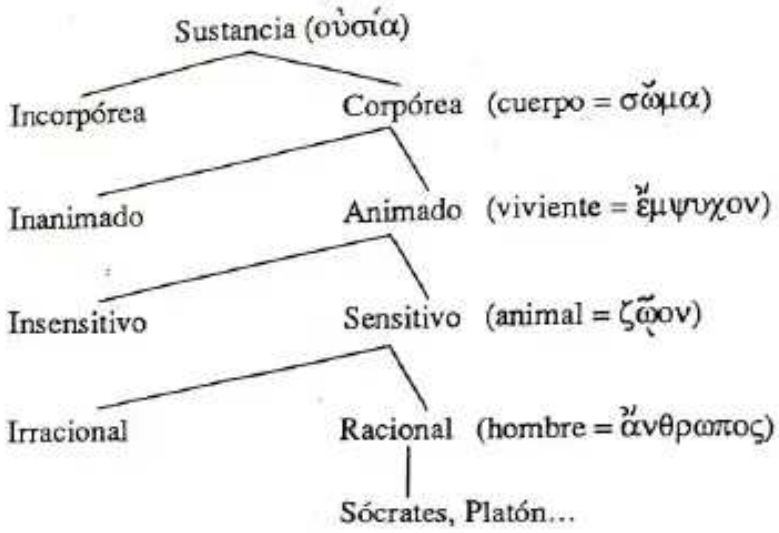
La clasificación aristotélica reposa, pues, sobre las relaciones de los predicables entre ellos, y la especie no puede ser un predicable porque constituye precisamente el sujeto al que se atribuyen los restantes. Porfirio, en cambio, adopta otra perspectiva; no la de la convertibilidad del sujeto-atributo exigida por la silogística aristotélica, sino la del esquema atributivo S-P de una proposición en donde S puede ser un término singular, como, por ejemplo, "Sócrates es justo", y las relaciones entre sujeto-atributo son relaciones de inclusión o de pertenencia. Desde esta perspectiva Porfirio añade la *especie* a los predicables, retrotrayendo la definición al género más la diferencia específica. Esta teoría porifiriana de las *quinque voces* -género, especie, diferencia, propiedad y accidente- constituirá la base de la *Lógica vetus* en la Edad Media.

La concepción extensional de las proposiciones y de los términos le lleva a Porfirio a construir una *tabula lógica* para la clasificación de los géneros y de las especies.

El *género* es lo que en la definición es afirmado de muchas cosas que difieren por la especie. Por ejemplo "animal" puede ser afirmado de "hombre" de "caballo" de "perro", etc.

La *especie* es lo que está comprendido bajo un género dado, el cual es afirmado de ella en la definición. También se define la especie como aquello que en la definición es afirmado de muchas cosas que no difieren más que por el número. En este último sentido no comprende bajo sí más que individuos y singulares (lo que los escolásticos llamarán la *species infima).*

Porfirio sigue a Aristóteles sosteniendo que el ser (τὸ ὄν) no es un género supremo que comprende las categorías.Pero para construir una *tabula lógica* admite que en los límites de cada categoría hay géneros supremos (γενικώτατα) y especies ínfimas (εἰδικώτατα). Un género supremo es lo que, siendo género, no puede ser especie; esto es, lo que no tiene un género por encima de sí. Una especie ínfima es aquello que, siendo especie, no es género. Entre el género supremo y la especie ínfima están los conceptos intermedios que siendo, a la vez, géneros y especies se subordinan unos a otros (mantienen entre sí relaciones de inclusión). Un ejemplo de cómo construir una *tabula lógica,* según las relaciones de inclusión señaladas y tomando como género más alto la categoría de sustancia, es el siguiente (en forma arbórea: llamada después *árbol de Porfirio):*



Según esta clasificación de conceptos, en una definición el atributo no puede tener menor extensión que el sujeto; a lo sumo, cuando se trata de un propio (ἴδιον), pueden ser iguales. El género es siempre afirmado de la especie y los conceptos superiores de los inferiores. El individuo (τὸ ἄτομον, lo indivisible) está englobado (περιέχεται) en la especie, y la especie en el género; el género es un todo; el individuo es una parte; y la especie es, a la vez, todo y parte.

La *diferencia* es un modo inseparable, es la característica específica (εἰδοποιὸς διαφορά). Hay diferencias intraespecíficas y diferenciales interespecíficas: las primeras hacen que dos cosas difieran sólo por la cualidad; las segundas hacen que dos cosas sean otras (ἄλλο); son éstas las diferencias específicas, que sirven para dividir el género en sus especies. La definición se hace por el género y por tales diferencias.

[14] *Tópicos,* I, 4, 101, 17-25.

La *propiedad*. Porfirio distingue cuatro especies (en terminología escolástica):

a) *quod convenit omni et soli, sed non semper*. Por ejemplo, encanecer: conviene a todos los hombres, y sólo a ellos, pero sólo en su vejez.
b) *quod convenit soli sed non omni*. Por ejemplo, ser médico, conviene sólo a los hombres pero no todos lo son.
c) *quod convenit omni sed non soli*. Por ejemplo, ser bípedo: conviene a todos los hombres, pero también a otras especies.
d) *quod convenit omni et soli et semper*. (τὸ μόνῳ καὶ παντὶ καὶ ἀεί) Porfirio pone como ejemplo el reír (τὸ γελαστικόν) como atributo aplicado al hombre; es la propiedad por excelencia; en tal caso el sujeto y el atributo pueden intercambiarse.

El *accidente* es lo que aparece y desaparece sin que conlleve la destrucción del sujeto. O también: es aquello que puede pertenecer o no pertenecer al sujeto. Por ejemplo ser justo respecto del hombre.

También se suele hacer responsable a Porfirio de otro tema largamente debatido por los lógicos (y los filósofos) medievales: el tema de los universales. La responsabilidad se le imputa por haber escrito[15]:

> "No voy a indagar ahora si los géneros y las especies existen por sí mismos, o si son puras concepciones abstractas; ni en qué circunstancia serían realidades, caso de ser corpóreas o no; ni si existen separados de las cosas sensibles o confundidos con ellas. Tal indagación resulta demasiado difícil y exigiría una larga discusión que no es de mi incumbencia".

En la lógica de Porfirio aparecen, como en la aristotélica, los géneros y las especies; mas también, como en la estoica, los individuos, a los que los primeros se aplican. Resulta evidente afirmar la existencia real de los individuos. Pero en el caso de los géneros y especies se plantearán largas discusiones entre los filósofos medievales, entre "realistas", "nominalistas" y "conceptualistas" contagiando a la lógica de metafísica.

Severino Boecio (470-524)

Senador romano amigo, y luego su víctima, del rey bárbaro Teodorico; con él concluye el período filosófico de la antigüedad; es el más importante de los comentadores y de los traductores de los clásicos griegos y ejercerá, por ello, gran influencia en la filosofía de la Edad Media. Por lo que respecta a la lógica sus aportaciones más importantes son[16]: traducciones de: *Las Categorías*, *Periermeneias*, *Primeros Analíticos*, *Tópicos*, *Argumentos Sofísticos*. Dos diálogos y un amplio comentario sobre la *Isagogé* de Porfirio: *Comentaria in Porphyrium*. Dos comentarios sobre el *Perihermeneias*, las *Categorías*, los *Analytica Priora*, los *Analytica posteriora* y los *Tópicos* de Aristóteles. Comentarios sobre los *Sofismas* y sobre los *Tópicos* de Cicerón. Y las obras:

-*Introductio ad categoricos syllogismos.*
-*De Syllogismo categorico.*
-*De Syllogismo hypothetico.*
-*De divisione.*
-*De definitione.*

Naturaleza y división de la lógica

Boecio, como buen seguidor del gran neoplatónico Porfirio, prefiere hablar de "Dialéctica" en vez de "Lógica". La Dialéctica es el arte de dividir, según la dialéctica en su fase descendente expuesta por Platón en el *Sofista*. Y, con respecto a la Filosofía, la Dialéctica constituye una parte esencial en el proceso de llegada a la Metafísica o Teología. Al comienzo de la *Consolatio Philosophiae* divide Boecio, siguiendo a Aristóteles y a sus maestros neoplatónicos, la Filosofía en: especulativa (Ciencias Naturales, Matemáticas, Teología o Metafísica) y práctica (Etica, Política y Economía). La Dialéctica era para Platón una disciplina que está por encima y constituye la cúpula de las Matemáticas; y para Boecio la rampa que se pierde en la Teología.

Para la división de la Lógica (o Dialéctica) parte Boecio de esta idea: hay que ir de lo simple a lo compuesto, por tanto de los nombres y verbos (1ª parte) a las proposiciones (2ª) y de éstas a los silogismos (3ª parte):

> "Syllogismorum vero compago propositionibus texitur, propositionum vero partes sunt nomen et verbum; pars autem ab eo cuius pars est prior est; de nomine et verbo quae prima sunt disputatio prima ponatur, de hinc de propositione, ad ultimum de syllogismorum connexione tractabitur"[17].

Las categorías

En el estudio de la primera parte de la Lógica -las partes de la proposición- considera Boecio necesario

---

15 *Isagogé*, ed, cit., I, 3.
16 Las obras de Boecio están recogidas en *Patrologia Latina*. Ed. de J. P. Migne vols. 63 y 64. Hay también mejores ediciones: los *Commentaria* sobre el *Periermeneias* editados por Carl Meiser. Teubner, 1867-80. De *syllogismis hypotheticis*, ed. de Luca Obertello. Brescia, 1969. Sobre los *Tópicos* de Cicerón, ed. de J. C. Orelli y J. G. Baiter, *M. Tullii Ciceronis Opera Omnia*. V, I. Zürich, 1833.
17 *De Syllogismo categorico*. Ed. cit., p. 558.

comenzar por los cinco universales (las *quinque voces)* de Porfirio. Así, es necesario saber qué es un género para poder entender los diez géneros que Aristóteles antepuso a todo lo demás. Las definiciones se hacen *per genera, species, differentias, proprietatesque* o también: en la división quien ignore los cinco universales confundirá frecuentemente las especies y el género, *quod est factu foedissimum*. En la teoría de los cinco universales Boecio sigue a Porfirio, añadiendo algunas consideraciones sobre lo *unívoco*, lo equívoco, lo multívoco y lo diverso:

> "Multivoca sunt quorum plura nomina, una definitio est, ut est scutum, clypeus. Diversivoca sunt quorum neque nomen idem est, neque eadem definitio"[18].

Las categorías son, según Boecio, una clasificación de los objetos del pensamiento; son los géneros bajo los que Aristóteles ha clasificado todas las cosas: la infinita variedad de cosas escapaba al espíritu; y retrotraerlas a unos pocos géneros es hacerlas objeto de ciencia. Por otra parte, esas diez categorías no pueden ser englobadas en un género supremo como querían los estoicos. De esas diez categorías, destaca Boecio la *sustantia*, respecto de la cual las restantes son accidentes. Las sustancias se dividen en *substantiae primae:* aquellas que caen bajo los sentidos, es decir, los individuos; y en *substantiae secundae*: "quae-cumque ad intelligibilem pertinent incorporalitatem".

Estudia, luego, Boecio los conceptos en su oposición, en su división, y en su definición. Distingue los siguientes:

Tipos de oposición

- Conceptos *contrarios:* aquellos que comprendidos en la extensión de un mismo género están uno al otro extremo del otro. Por ejemplo, blanco y negro.
- Conceptos *contradictorios*: aquellos en relación tal que el contenido del uno es la negación del otro (oppositio, quae affirmatione et negatione proponitur) por ejemplo, blanco y no-blanco.
- Conceptos *opuestos,* como el *habitus* a la *privatio*, como la posesión de una cualidad frente a la falta de esa misma cualidad.
- Conceptos *relativamente* opuestos, como el doble y la mitad, lo activo y lo pasivo.
- Conceptos *dispares:* aquellos que son simplemente diferentes unos de otros y que por consiguiente no están en relación.

Tipos de división

Boecio distingue seis especies:

- Del género en sus especies *(genus in species).*
- De un todo en sus diferentes partes *(totum in partes).*
- De la palabra en sus significaciones *(vox in significationes).*
- De la sustancia en accidentes *(subiectum in accidentia).*
- Del accidente en sustancias *(accidens in subiecta).*
- Del accidente en accidentes *(accidens accidentis).*

Las tres primeras son *divisio secundum se* y las tres últimas *divisio accidentis*. En otro lugar *(Coment. in Porf. Isagoge)* se contenta con distinguir, según el uso, la división propiamente dicha de la partición:

> "Omnis divisio duplex est, aut cum totum corpus in diversa disiungis, aut cum genera per species distribuis".

Aquí la división del todo se hace *secundum quantitatem*. En cambio, la distribución de un género se hace *secumdum qualitatem*. El género es anterior a sus especies; el todo es posterior a sus partes; la especie es la misma que el género *(hombre*, por ejemplo es lo mismo que *animal);* la parte no es la misma que el todo (la *mano*, por ejemplo, no es lo mismo que el *hombre).*

Tipos de definición

Boecio sostiene que para obtener definiciones completas se hace necesaria la división de las especies, y, en cierto sentido, la división y la definición son la misma cosa. Hay diferencias esenciales *(per se)* y diferencias accidentales *(per accidens).* Sólo las primeras sirven para la división de los géneros y constituyen las especies. Para obtener una genuina definición, aquella que expresa la esencia (definitio substantialis, graece οὐσιώδης), hay que partir del género de la cosa a definir y dividirla en las especies y las diferencias hasta llegar a la propiedad, que la distingue de todo lo que no es ella misma. Una definición así no será ni demasiado estrecha ni demasiado larga, y convendrá a todo y sólo lo definido. Según esto, sólo las esencias medias pueden ser adecuadamente definidas: sólo ellas tienen, a la vez, un género superior y una diferencia específica. Y hay que contentarse con explicar o describir las cosas que no pueden ser definidas: es lo que los griegos llaman ὑπογραφῆς λόγους y los latinos *subscriptivas rationes.*

---

[18] Comentario a las *Categorías*, Ed. cit., p. 118.

Las proposiciones

En este apartado Boecio repite con frecuencia a los comentadores griegos, en especial a Porfirio. Distingue cinco tipos de proposiciones *(orationum perfectarum partes quinque)*: la deprecativa, la imperativa, la interrogativa, la vocativa y la enunciativa.

La *oratio enuntiativa*, que afirma o niega, es la proposición lógica propiamente dicha: en ella se halla la verdad o el error. A la proposición simple, que los griegos llaman κατηγορική, la llama Boecio *propositio praedicativa*: aquella que es emitida sin ninguna condición; por ejemplo: "todos los hombres son mortales", "ningún hombre es perfecto". En tales proposiciones el concepto-sujeto tiene siempre menor extensión que el concepto predicado, salvo en el caso en el que el predicado es una propiedad del sujeto: por ejemplo *homo est risibilis*. Sujeto y predicado son los términos de la proposición. El verbo *est, non est*, no es un término, sino el signo de la cualidad de la proposición.

Las proposiciones son simples (afirman o niegan simplemente, son las únicas predicativas) o completas (afirman *sub conditione)*, como la hipotética o condicional, "quae ex duabus simplicibus copulante conditione consistit". Por ejemplo: "si dies est, lux est".

Consideradas según la cualidad, las proposiciones son afirmativas o negativas; según la cantidad, universales, particulares, individuales, indefinidas; y según la modalidad, necesarias, contingentes, y de *inesse*.

Hay indefinidas cuyo sujeto es:

- un nombre simple: *homo ambulat.*
- un nombre indefinido *(nomen infinitum*, ὄνομα ἀόριστον, según la expresión de Aristóteles): *non homo ambulat.* Y éstas:
  - Universales: *omnis non homo ambulat.*
  - Particulares: *quidam non homo ambulat.*
  - Singulares: *ambulat non Socrates.*

También hace distinciones Boecio en la afirmación y negación:

- afirmación o negación *simplex.*
- afirmación o negación *infinita:* la negación recae sobre el predicado: *est homo non iustus (affirmatio infinita); non est homo non iustus (negatio infinita).*
- afirmación o negación privatoria: *est iniustus homo; non est iniustus homo.*

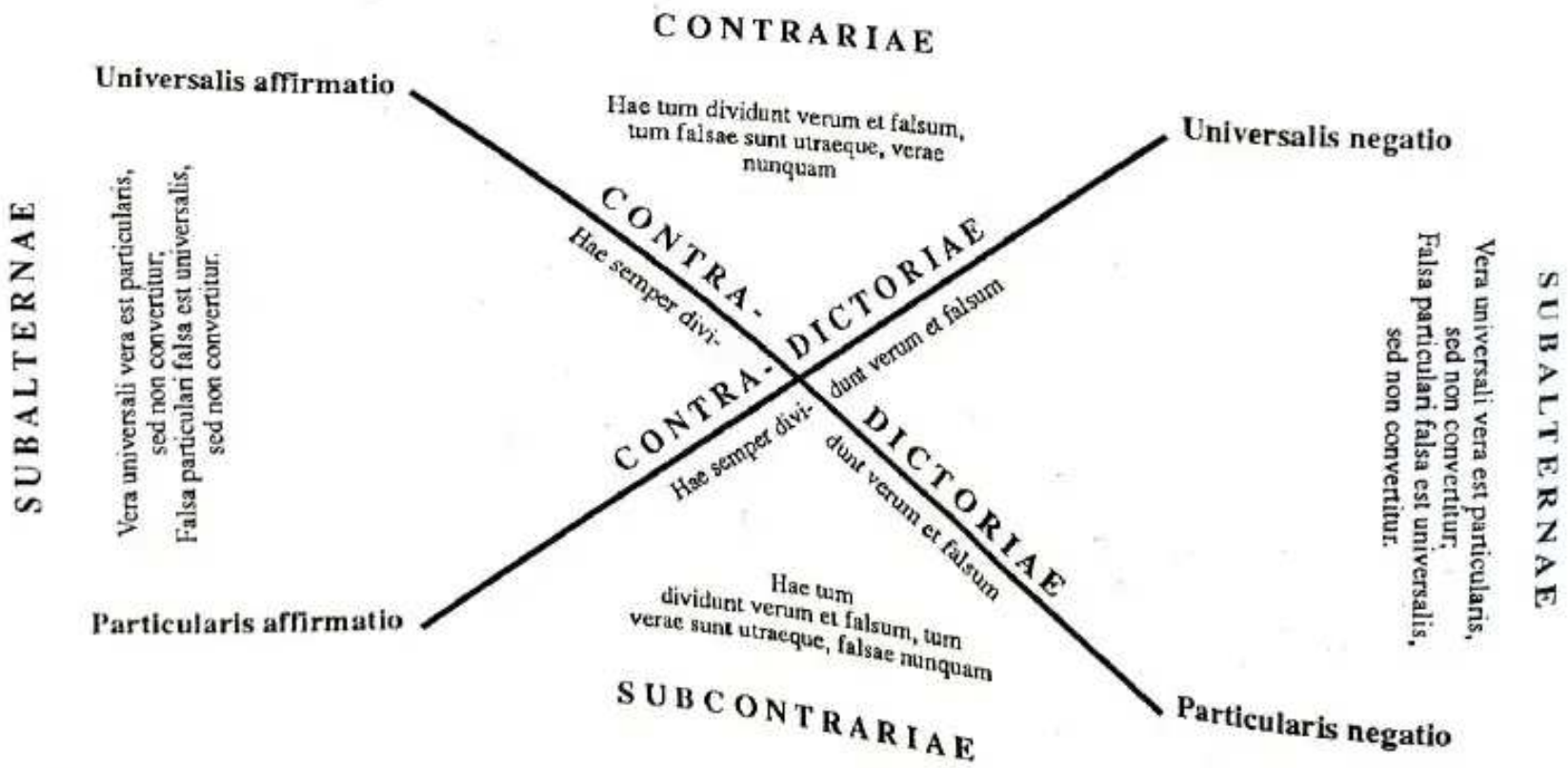
Estas tres formas pueden ser definidas o indefinidas, según que su cantidad esté, o no, determinada.

Según las distinciones antedichas y siguiendo a Syrianus, calcula Boecio los posibles tipos de proposiciones: 144. En efecto, hay 4 tipos de proposiciones por razón de la cantidad: indefinidas, universales, particulares e individuales; 6 maneras de afirmar; por tanto 24 formas; otras tantas formas negativas, en total 48 que multiplicadas por tres, según la modalidad *(necessarium, contingens, inesse)*, da 144.

Relaciones entre proposiciones

Dos proposiciones pueden, o no, tener en común los mismos términos: si tienen los mismos términos, éstos pueden ocupar el mismo, o diferente lugar. Si ocupan el mismo tenemos la relación de *oposición* de las proposiciones; si ocupan distinto, tenemos la *conversión* y la *contraposición.*

Las relaciones de oposición vienen expresadas en el cuadro siguiente:



Combinando las relaciones de oposición con los tipos de negación que Boecio estudia detalladamente establece las reglas para la equipolencia (*convenientia*) de las proposiciones. Así:

Omnis homo rationalis est Omnis homo non rationalis est Quidam homo non rationalis est Quidam homo rationalis est	} conveniunt {	nullus homo non rationalis est nullus homo rationalis est quidam homo rationalis est quidam homo non rationalis est

Si examinamos ahora las proposiciones cuyos términos son los mismos pero ocupan distinto lugar, tenemos la teoría de la conversión y la contraposición.

Hay, según Boecio, dos tipos de conversión: *simplex* y *per contrapositionem*.

La conversión *simplex* se hace: bien *principaliter*, esto es, invirtiendo los términos sin cambiar la cantidad (universal negativa y particular afirmativa), bien *per accidens*, es decir, invirtiendo los términos y cambiando de cantidad (universales: afirmativa y negativa).

En caso de que el predicado sea una propiedad del sujeto, la universal afirmativa puede ser convertida *principaliter*. Por ejemplo: *omnis homo risibilis omnis risibilis homo*.

La conversión *per contrapositionem* se hace invirtiendo los términos y negando, a la vez, el sujeto y el predicado. Así, por ej., la universal afirmativa *omnis homo animal est* se convierte por contraposición en: *Omne non-animal non-homo est*.

Boecio formula por primera vez las reglas de la conversión y contraposición de las proposiciones de la siguiente manera:

> "In simplici terminorum conversione quod particularis affirmatio et generalis negatio sibi ipsis convertentur, generalis vero affirmatio et particularis negatio sibi ipsis non converterentur, hic in per contrapositionem conversionibus contra est"[19].

Los silogismos

Como buen comentador, Boecio se preocupa de exponer todos los tipos y combinaciones posibles de silogismos que ha encontrado en los lógicos griegos. Distingue, primeramente, entre silogismos categóricos y silogismos hipotéticos. En lo que respecta a los primeros sigue muy de cerca los *Primeros Analíticos*, extendiéndose con multitud de detalles y ejemplos. Señala que el procedimiento silogístico atañe a la corrección formal del razonamiento, no a la verdad material del contenido:

> "nec hoc nos perturbet, si quae hic propositiones et conclusiones falsae sunt, quandoquidem no veritates rerum sed connexiones syllogismorum, figuras et modus suscepimus disserendos"[20].

Otro signo del formalismo al que apuntaba Boecio es el uso que hace de letras como variables de términos generales:

> "Quotiescumque ita dicimus, ut litteras pro terminis disponamus, pro brevitate hoc et compendio facimus, id quod per litteras demonstrare volumus, universaliter demonstramus"[21].

Siguiendo la tradición aristotélica, divide los silogismos en *perfectos*, aquellos que no necesitan de otro soporte para ser válidos, e *imperfectos*, que necesitan una justificación externa. Son perfectos los 4 modos de la primera figura, a los que llama también "indemonstrabiles" y "directi"; acepta también en esta figura los 5 modos indirectos de Teofrasto que son, dice "imperfecti et per conversionem".

Silogismos hipotéticos

El mismo Boecio considera que es en el campo del silogismo hipotético donde tiene algo nuevo que decir; que sobre este tema no ha encontrado nada en los escritores latinos y sólo algo, aunque confuso, entre los griegos, razón por la cual le ha dedicado mucho tiempo y trabajo[22]. Y, por motivo de este testimonio, Boecio fue considerado, durante bastante tiempo, el descubridor del razonamiento hipotético.

Comienza Boecio distinguiendo la proposición hipotética de la predicativa simple. En la primera no hay algo que se predica de algo, sino se dice que algo es el caso si otro algo lo es[23]. No sólo la conectiva "si", sino

---

[19] *De Syllogismo categorico*, ed. cit., p. 589.
[20] *De Syllogismo categorico*. ed. cit., p. 605.
[21] *Ibidem*, 592.
[22] *De Syllogismo hypothetico*, ed. cit., p. 606.
[23] *Ibidem*, p. 607.

también la conectiva "aut" sirve para formar proposiciones hipotéticas: por ejemplo "*aut hoc est aut illud est*". La proposición hipotética puede ser *simple*, aquella que consta de dos proposiciones simples y la conectiva "si", por ejemplo, "si A est, B est", y compuesta: aquella que consta de dos hipotéticas, por ejemplo, "si, cum A est, B est, cum sit C, est D" o aquella que consta de una simple y una hipotética, por ejemplo, "si A est, cum sit B, est C"; o aquella que consta de una hipotética y una simple, por ejemplo, "si, cum sit A, est B, erit et C"[24].

Pasando de las proposiciones a los silogismos, llama silogismos hipotéticos "quos latine conditionales vocamus alii quinque alii quatuor alii tribus constare partibus arbitrantur.....quoniam enim omnis syllogismus ex propositionibus texitur, prima vel propositio vel sumptum vocatur, secunda vero dicitur assumptio, ex his quae infertur conclusio nuncupatur"[25].

Los silogismos hipotéticos simples son 8. Los 4 primeros funcionan por la afirmación del (porque la segunda premisa repite el) antecedente de la primera premisa. Son los "primeros silogismos hipotéticos perfectos":

(1) *Si est A, est B; atqui est A; est igitur B.*

(2) *Si est A, non est B; atqui est A; non est igitur B.*

(3) *Si non est A, est B; atqui non est A; est igitur B.*

(4) *Si A non est, B non est; atqui non est A; non est igitur B.*

Los otros cuatro funcionan por la negación del (porque la segunda premisa niega el) consiguiente de la primera premisa. Estos no son ya perfectos:

(5) *Si est A, est B; at non est B; non est igitur A.*

(6) *Si est A, non est B; atqui B est; igitur A non est.*

(7) *Si A non est, B est; B autem non est; A igitur est.*

(8) *Si non est A, non est B; est autem B; erit igitur A.*

A continuación acomete Boecio el examen de los silogismos hipotéticos compuestos, ejemplificando gran número de ellos. He aquí el primero: *"Si est A, cum sit B, est C; atqui est A; cum igitur sit B, est C".*

Finalmente, entre los silogismos hipotéticos introduce los formados con proposiciones en disyunción ya que, según él[26], la proposición *"aut est A aut est B"... similis est ei propositioni quae dicit "si non est A, est B"*, de manera que cabe retrotraer los silogismos con premisas en disyunción a los silogismos con premisas en condicional, según los modelos anteriores.

Como quedará patente más adelante, los escritos de Boecio se convirtieron en el manual de lógica de la Alta Edad Media. Es Boecio quien cierra la antigüedad clásica y la fuente a la que, tras el paso de la barbarie, acuden los pensadores medievales.

---

[24] *Ibidem*, p. 610.

[25] *Ibidem*, p. 614.

[26] *Ibidem*, p. 637. Hay que hacer notar, sin embargo, que cabe inferir de la primera la segunda, pero no viceversa. En simbología moderna: (A w B) → (- A → B) es una implicación verdadera; pero (- A → B) → (A w B) no es una implicación verdadera.

BIBLIOGRAFIA

Bidez, J., "Boèce et Phorfyre", en *Revue belge de philologie et d'histoire*, 2 (1923), pp. 189-201.

Chadwick, H., *Boethius*. Clarendon Press. Oxford, 1981.

Dürr, K., *The propositional logic of Boethius*. Amsterdam, 1951.

Gibson, M. T. (ed.), *Boethius, his life, thought, and influence*. Blackwell. Oxford, 1981.

Guzzo, A., "L'Isagoge di Porfirio e i commenti di Boezio", en *Annali dell'Instituto superiore di magisterio del Piemonte*, 7. Turín, 1934.

Minio-Paluello, L., art. *Boethius*, en *Encyclopaedia Britannica*, 1968.

Obertello, L. A., *Severino Boezio*. 2 vols. Génova, 1974.

Shiel, J., "Boethius commentaries on Aristotle", en *Medieval and Renaissance Studies*, 4 (1958), pp. 217-44.

Solmsen, F., "Boethius and the Organom", *en American Journal of Philology*, 31 (1944), pp. 69-74.

VI. La Edad Media

Tras la invasión de los bárbaros, la tradición filosófica subsiste débilmente en las escuelas monásticas, principalmente de Inglaterra e Irlanda. Alcuino (735-804) era abad de Canterbury cuando fue llamda por Carlomagno para dirigir la escuela palatina a la que pretendía poner el mismo nivel que Bizancio, sede de la cultura helenístico-cristiana, y que Córdoba, capital de la cultura árabe. La Filosofía escolástica nace y se desarrolla en los conventos y en las escuelas eclesiásticas fundadas por Alcuino.

Son características esenciales de la Filosofía medieval las siguientes:

1) El abuso de la autoridad: se considera que la verdad está en los libros sagrados y en obras de los filósofos antiguos; la tarea, pues, consiste en desgranar verdades de tales biblias y hacerlas compatibles, conciliando la razón y la fe. Por lo tanto, la Filosofía en general, y la Lógica en particular, de la Edad Media es fundamentalmente una prolongación de la Antigüedad. Los escolásticos se dedican a reproducir fielmente y a comentar las obras que tenían entre manos: hasta el siglo XII los libros en uso de las escuelas fueron solamente los escritos de los últimos "retores" latinos: Mario Victorino (mitad del siglo IV), Martianus Capella (autor de un manual sobre las *Siete artes liberales*, compuesto hacia el 470), Boecio (sólo sus comentarios, mas no sus traducciones de los *Analíticos, Los Tópicos* y *Argumentos Sofísticos)* y Casiodoro (477-570) teórico de la división de las artes en el *Trivium* -gramática, retórica y dialéctica- y en el *Quadrivium* aritmética, música geometría y astronomía). Una muestra de lo dicho son los cursos dictados por Gerberto de Aurillac, (luego Papa con el nombre de Silvestre II)[1]. Por lo que hace a la dialéctica sigue este orden: a) Examina las introducciones *(Isagogas)* de Porfirio, según la traducción de Victorino, b) El comentario de Boecio al primero, c) Pasa luego a las *Categorías* de Aristóteles, d) Muestra las dificultades del *Peri Hermeneias*, e) Finalmente da a conocer los *Tópicos* de Cicerón esclarecidos por los seis libros de comentarios de Boecio y los cuatro libros *De topicis differentiis*, dos sobre los silogismos categóricos, tres sobre los silogismos hipotéticos, uno sobre las definiciones y otro sobre las divisiones. Como se ve, el curso de Gerberto no era más que un comentario de Boecio.
2) La segunda característica de la Filosofía y la Lógica Medieval es el formalismo. El formalismo se apoya en la confianza en la autoridad. Si los principios están ya dados, lo que resta por hacer es deducir las consecuencias posibles utilizando reglas que eviten caer en el error. De ahí el uso y abuso de multiplicar las distinciones, encontrar fórmulas mnemotécnicas, etc.

La división usual de la Filosofía escolástica en tres períodos es válida también para la historia de la lógica:

Período 1º: desde el siglo IX hasta el siglo XII (Abelardo).
Período 2º: siglo XIII. El gran siglo de la Edad Media.
Período 3º: siglo XIV y comienzos del XV: período de decadencia.

1. La lógica *vetus:* La escolástica platónica

En el primer período, la Filosofía medieval está predominantemente influida por el platonismo y sobre todo por el neoplatonismo. Se busca fundir la fe y la razón: "Credo ut intelligam", dice S. Anselmo. La lógica está constituida por los escritos de Boecio: los dos comentarios a la *Isagogé* de Porfirio, el comenta-

[1] Sus obras aparecen recogidas por Migne en *Patrología Latina*, vol. 139, pp. 57- 338.

rio de las *Categorías*, los dos comentarios al *Peri Hermeneias*, los escritos sobre el silogismo categórico, sobre el hipotético, y los comentarios *In topica Ciceronis*. Este patrimonio, la base más firme y constante de la enseñanza de la lógica a todo lo largo de la edad Media -incluso después de la difusión de la *lógica modernorum*- constituye la *Logica Vetus*.

A través de los repetidos comentarios fueron adquiriendo importancia algunas cuestiones que Porfirio y Boecio sólo habían tratado tangencialmente. Una de ellas, *(Prima quaestio)* que dará lugar a grandes y numerosos debates fue la cuestión de los universales, cuestión que contaminó más de lo deseado a la lógica de metafísica.

Etimológicamente los universales *(universalia)* provienen de *universale, ut universum, significat multitudinem quandam in unum redactam (multa versa in unum)*. La base de discusión era el pasaje de Porfirio traducido por Boecio y antes citado, sobre la naturaleza de los géneros y las especies. Ya en el primer período, siglos IX-XII, aparecen las posturas extremas sobre el problema: la realista y la nominalista[2].

San Anselmo (1033-1109)

El gran campeón del realismo en este período, fue S. Anselmo. Como buen platónico reconoce a los universales una existencia independiente de las cosas particulares: por encima de todos los hombres individuales se eleva la idea de hombre, el hombre en sí, realidad superior de la que todos los individuos participan y de la que toman sus cualidades y su esencia: "plures homines in specie sunt unus homo"[3]. Los universales no son, pues, inmanentes a los individuos sino que son los ejemplares de las cosas y constituyen el mundo de la verdad en sí. La verdad en sí es solamente causa; la verdad de ser es, a la vez, el efecto de la verdad en sí y la causa de la verdad del conocimiento, que es solamente efecto.

La prueba (argumento ontológico) que da en el *Proslogium, seu fides quaerens intellectum* reposa sobre la hipótesis realista, haciendo salir la existencia de Dios de la idea de Dios. El ateo está obligado a admitir que tiene la idea de un ser más allá del cual no se podría concebir nada mayor *(id quo maius cogitari non potest)*. Además, ese ser debe existir no solamente en nuestro pensamiento, sino en la realidad, porque si no fuese así podríamos concebir un ser que, con las mismas cualidades, existiese, a la vez, en el pensamiento y en la realidad, esto es, un ser más grande que el ser más grande que se pueda concebir, lo cual es contradictorio. Por lo tanto *id quo maius cogitari non potest*, es decir, Dios, existe en la realidad. Y por cierto tan verdaderamente existe que necesariamente existe (prueba similar a la anterior).

Este argumento ha sido rechazado o retomado por muchos. Merece un examen de su estructura lógico-formal[4].

Si, siguiendo a A. Dou, utilizamos la siguiente simbología:

- m = "lo maximal" = "Id quo maius cogitari non potest = Dios.
- i = Inteligibilidad de una cosa.
- e = Existencia.
- a = Existencia necesaria.
- α = Función tal que x α s = objeto que posee simultáneamente la perfección de objeto x y la del objeto s.
- I (x) = *x* está en el pensamiento.
- E (x) = *x* está en el entendimiento.
- R (x) = *x* está en la realidad.
- N (x) = *x* está necesariamente en la realidad.

El argumento contiene los asertos siguientes:

Aserto I : E (m).

Aserto II : R (m).

Aserto III : N (m).

Estos tres asertos, son probados admitiendo ciertos axiomas, que son precisamente los cuestionables. El primer aserto parte del axioma siguiente (entre otros):

Ax. 2: $i \varepsilon m$

Ciertamente, si admitimos $i \varepsilon m$ queda probado E *(m)*; pero aquí está la clave del argumento: admitir la inteligibilidad de *m*. Esto es precisamente lo que hay que demostrar; hay que demostrar la idea de Dios. Por eso, como afirma Hintikka, en la obra citada, "toda la fuerza del argumento quedaría reducida a afirmar que desde el momento en que se conoce quién es Dios, se sabe que El existe". Esta es la posición de S. Anselmo y también la de Descartes: "cierto encuentro en mí la idea de él (Dios)", y "no más se puede separar la existencia de la esencia de Dios, que de la esencia del triángulo la magnitud de tres ángulos que suman dos

---

[2] Un buen estudio sobre el tema es el de Carre, M-H., *Realists and Nominalists*. Oxford Univ. Press, 1946.

[3] *Epistola de Incarnatione Verbi*, en *San Anselmi Opera Omnia*. Ed. de F. S. Schmitt. Nelson, 1946, vol. 2, 10.9.

[4] Merecen reseñarse, en este sentido, los análisis de A. Dou: "Formalización del argumento ontológico anselmiano", en *Pensamiento*, 23 (1967), pp. 263-272; y J. Hintikka, "On the logic of ontological argument", en *Models for modalities*. Reidel, Dordrecht, 1971. Este último utiliza en el análisis la lógica modal epistémica y acaba considerando incorrecto el argumento anselmiano.

rectos, o de la idea de monte la idea de valle"[5]. Para Descartes, lo plenamente inteligible es real, porque en su inteligibilidad está su esencia y la esencia lleva implícita necesidad; la existencia no añade nada a las esencias; cuando lo esencial está organizado es lo real.

Leibniz, mejor lógico que Descartes, se percata precisamente de que la conclusión (la prueba de la existencia de Dios) depende del Ax.2, y que éste no es tal; es un aserto que hay que demostrar, de manera que se podrá demostrar la existencia de Dios cuando se demuestre que la idea de Dios es posible[6], esto es, que Dios es posible[7]. Para Leibniz, el criterio de verdad utilizado por Descartes -la evidencia, claridad y distinción-[8] resulta insuficiente y falaz; hay que sustituirlo por este otro: Es posible y verdadera toda idea no contradictoria; y, para asegurarse de que una idea no encierra contradicción, basta descomponerla en sus elementos simples.

Pasemos ahora a la consideración de los otros axiomas que sustentan, respectivamente, los asertos II y III:

Ax. 6: $E(x) \& -(e \varepsilon x) \rightarrow E(x \alpha e) \& x \alpha e > x$

Ax. 9: $R(x) \& -(a \varepsilon x) \rightarrow R(x \alpha a) \& x \alpha a > x$

La estructura es la misma; nos detendremos, pues, en uno de ellos, y lo dicho puede aplicarse (análogamente) al otro.

El Ax. 6, traducido al lenguaje natural dice: si hay algo, *x*, que está en el entendimiento, y no existe, entonces hay otro algo que tiene existencia, que está en el entendimiento y que es mayor que *x*. A este supuesto se dirigen las críticas de Sto. Tomás y de Kant, poniendo en cuestión que la existencia *e* sea un predicado.

Sto. Tomás rechaza el valor probatorio del argumento, haciendo la distinción entre lo pensado posible y lo real:

> "Aun supuesto que todos entiendan que la palabra "Dios" significa lo que se dice, a saber, lo que no se puede pensar nada mayor; no por eso se sigue que entendien que lo que se significa por este nombre existe en la realidad; sino solamente en la aprehensión del entendimiento. Ni se puede argüir que esté en la realidad, a menos que se conceda que hay en la realidad algo que no se puede pensar nada mayor: lo cual no se concede por los que defienden que Dios no existe"[9].

Kant, por su parte, niega que la existencia sea un predicado, en el sentido de que:

> "por muchos y muy diversos predicados que podamos aplicar a una cosa, incluso si la determinamos completamente, no añadimos lo más mínimo a la cosa cuando afirmamos algo más de lo que esa cosa es"[10].

Finalmente, la relación "mayor que", que aparece en el argumento, queda establecida entre todas las cosas; por ejemplo, los triángulos mayores que los metros. La relación "mayor que", como toda relación binaria exige, para un tratamiento completo de su aplicación que sea *homogénea*, esto es, un conjunto de categorías del mismo *tipo* (Teoría de los tipos lógicos) y que aplicada a ellas cobre valor veritativo la proposición resultante. Por ejemplo, la relación "más alto que" tiene un valor veritativo aplicada a "hierba" y "árbol", pero no a "sueño" y "pensamiento". La prueba, en efecto, parte del supuesto de que "aquello que existe en la realidad 'es mayor que' aquello que existe sólo en el pensamiento"; pero tal supuesto dista mucho de ser un axioma[11].

Roscelino de Compiégne (C. 1050-1125)

Es considerado el fundador del "nominalismo", en oposición al "realismo" predominante en el primer período de la filosofía medieval.

> "Petrus iste (Abelardo) habuit primo praeceptorem quemdam qui primus nostris temporibus in logica sententiam vocum instituit"[12].

También el nominalismo hunde sus raíces en una obra de Boecio. Este, en su comentario a las *Cate-*

---

[5] *Meditaciones*. Edic. Adam-Tannery, VII, p. 66.

[6] *De Synthesi et analysi*... ed. Gerhardt, *Phil.*, VII, 299; y también *Nuevos Ensayos*, lib. IV, cap. X, párr. 8.

[7] *Monadología* párr. 45; *Meditationes de congnitione*..., ed. Gerhardt, *Phil.*, IV, 424.

[8] "Del sólo hecho de que se pueda sacar de mi pensamiento la idea de alguna cosa, se sigue que todo aquello que clara y distintamente percibo, que pertenece a aquella cosa, de verdad le pertenece" *(Ibidem*, p. 65).

[9] *Suma Teológica*, I, q.2, a, ad 2.

[10] *Crítica de la Razón Pura* 8, 626.

[11] Véase D. P. Henry, *The logic of Saint Anselm*. Clarendon Press, Oxford, 1967, pp. 142-150, donde hace ver el autor que S. Anselmo no aplica siempre la relación "mayor que" a las mismas categorías y en el mismo sentido.

[12] Otto de Freisisng, en su *De gestis Frederici*, I, p. 47, cit. por Prantl, *Geschichte*..., ed. cit., vol. II, p. 79. Cita también Prantl *Ibidem* de Avento. Ann. Boior., VI (ed. Riezler, 1884, I, p. 200): "Hisce quoque temporibus fuisse reperio Ruscelinum Britannum magistrum Petri Abaelardi, novi lycaei conditorem, qui primus sententiam vocum sive dictionum instituit novam philosophandi viam invenit; eo namque auctore duo Aristotelicorum, Peripateticorum, genera esse coeperunt; unum illud vetus locuples in rebus procreandis, quod scientiam rerum sibi vindicat, quamobrem reales vocantur; alterum novum, quod eam distrahit, nominales ideo nuncupati, quod avari rerum prodigi nominum atque notionum verborum videntur esse assertores".

gorías de Aristóteles, dice[13] que en los componentes de las proposiciones entran palabras tales como "género" y "especie" que son "nombres de nombres" *(nominum nomina)*: así, "especie" es un nombre de nombres tales como "hombre", "caballo", "higuera" y "elefante", e indica que cada uno de ellos es *de subiecto praedicabile*: de los hombres, de los caballos, de los árboles y de los elefantes individuales respectivamente. Y asimismo, "género" es un nombre de nombres tales como "animal" y "árbol", e indica que cada uno de éstos es *de subiecto praedicabile*, de las especies apropiadas. Por ejemplo, "el *hombre* es *animal*" o *"la higuera* es un *árbol"*, etc.

El primero que en la Edad Media tira por esta vía es Garlandus Compotista (*floruit* siglo XI), quien en su *Dialectica*[14] sostiene que "género" en "sustancia es un género" es un nombre de la palabra "sustancia", quedando ésta no ya como un nombre, esto es, como un significante, sino meramente como una *vox*. Y lo mismo que de "sustancia" puede decirse de "de omnibus aliis generalissimis".

Contra esta interpretación protesta San Anselmo, atribuyéndosela a Roscelino. La posición de éste la conocemos sólo a través de sus adversarios, ya que ninguna obra suya, excepto una carta a su discípulo Abelardo, ha llegado hasta nosotros. Es, sobre todo, Juan de Salisbury, en su *Metalogicon*, quien más veces hace referencia a la doctrina de Roscelino, aunque le resulta ya lejana y acabada con el propio autor:

> "Naturam tamen universalium hic omnes expediunt et altissimum negotium et maioris inquisitionis contra mentem auctoris explicare nituntur; alius ergo consistit in vocibus, licet haec opinio cum Roscelino suo fere omnino iam evanuerit"[15].

San Anselmo[16] le cuenta entre los dialécticos, o mejor, herejes de la dialéctica, que sostienen que los géneros y las especies, las *substantiae universales* no son sino *flatus vocis*.

La doctrina nominalista resultaba, ciertamente, herética, respecto de la vieja vía en el modo de filosofar que seguían las directrices del neoplatonismo: la vía "realista" *(quod scientiam rerum sibi vindicat, quamobrem reales vocantur)*. La nueva vía, por el contrario, es la seguida por los "nominalistas", así llamados *(nominales ideo nuncupati)* porque sostienen que la filosofía sólo se ocupa de palabras. Los géneros y las especies son sólo *voces*; la única realidad completa es la individual, de modo que el universal, el concepto, no tiene existencia más que en el espíritu y la única realidad que representa el universal es la palabra. Roscelino sostenía la naturaleza irreductible de lo individual hasta el punto de negar que un todo puede descomponerse en partes independientes, y afirmando que las partes, como las especies, no son más que palabras. Las partes no existen; no son más que el todo visto desde una sóla perspectiva. Si se las aísla no se obtiene una cosa real: real solamente es el todo individual; lo único que se obtiene son palabras[17]. Roscelino aplicó esta teoría al dogma de la Trinidad y extrajo como consecuencia que no puede haber tres personas en un sólo Dios: o hay tres cosas o no hay más que una; pronunciándose por el *triteismo*, lo que le ocasionó menoscabo material y moral.

Guillermo de Champeaux (1079-1121)

La doctrina opuesta era sostenida por Guillermo de Champeaux discípulo de Roscelino y maestro de Abelardo, y el más decidido defensor de la realidad de los géneros y de las especies. No nos ha llegado obra alguna suya sobre lógica[18]; conocemos su posición sobre los universales principalmente a través de Abelardo, su discípulo, con quien mantuvo una larga disputa sobre el tema.

Guillermo sostenía que los universales estaban presentes esencialmente y por entero en todos los individuos que bajo ellos caen, y que, por consiguiente no hay diferencia alguna de esencia entre los individuos, los cuales se distinguen tan sólo por la diversidad de accidentes.

> "Erat [Guillelmus Campellensis] in ea sententia de communitate universalium, ut eamdem essentialiter rem totam simul singulis suis inesse adstrueret individuis, quorum quidem nulla esset in essentia diversitas, sed sola multitudine accidentium varietas"[19].

Así, por ejemplo, "hombre" es una especie que constituye una realidad esencialmente una *(res una essentialiter)* a la que advienen ciertas formas y la hacen Sócrates. A esa misma realidad esencialmente una advienen otras

---

[13] *Patrologia latina*, 64, ed. cit., p. 175 D-176 D y 185 A.
[14] Garlandus Compotista, *Dialectica*. Edic. de L. M. de Rijk. Van Gorcum, Assen, 1959, p. 21-22.
[15] Juan de Salisbury, *Metalogicon*, edic. de C. C. J. Webb. Clarendon Press, Oxford, 1929, Part. II, Párr. 17.
[16] *Epistola de Incarnatione Verbi*, en *Opera Omnia*, edic. cit., vol. II, 9. 21.
[17] *Confert*, P. Abelardo, "De divisione et definitione", en *Lógica Ingredientibus*, Ed. de V. Cousin, París, 1836, p. 471: "Fuit autem memini, magistri nostri Roscellini tam insana sententia, ut nullam rem partibus constare vellet, sed sicut solis vocibus species ita et partes adscribebat".
[18] La mejor fuente para conocer su doctrina es V. Cousin, *Fragments de Philosophie scolastique*. 5 vols. París, 1865-1866.
[19] Abelardo, *Epistola*, 1, c.2 en la ed. de V. Cousin *Ouvrages Inédites d'Abelard*. París, 1836, p. 4.

formas y hacen a Platón, y lo mismo sucede con los demás individuos, sin que haya otra cosa en Sócrates más que esas formas informantes de aquella materia (nec aliquid est in Socrate praeter illas formas informantes illam materiam ad faciendum Socratem). La esencia toda entera es modificada por los accidentes que hacen el individuo, puesto que la esencia está toda entera en cada individuo:

> "ubi enim Socrates est, et homo universalis ibi est, secundum totam suam quantitatem informatus Socratitate"[20].

La consecuencia de esta teoría es la negación de la existencia individual; lo que aplicado a la Teología da lugar a una especie de panteísmo que no reconoce entre los seres más que distinciones accidentales.

La principal objeción que Abelardo hace a su maestro a este respecto es la siguiente[21], si los individuos no difieren entre sí más que por los accidentes, en tal caso Sócrates, estando en Atenas, está también al mismo tiempo en Roma, donde su esencia (su naturaleza) está toda entera, lo cual resulta imposible.

Pedro Abelardo (1079-1143)

Abelardo escribió cuatro obras de lógica:

-*Introductiones Parvulorum* que se compone de breves glosas a: la *Isagogé* de Porfirio, a las *Categorías* y al *Peri hermeneias* de Aristóteles.

-*Lógica Ingredientibus* (así llamada porque *Ingredientibus* es la primera palabra del texto), la cual consiste en glosas extensas a la *Isagogé* de Porfirio, a las *Categorías* y al *Peri hermeneias* de Aristóteles y a *De differentiis topicis* de Boecio. Fue escrita probablemente cuando Abelardo enseñaba en París, antes de 1.120.

-*Lógica nostrorum petitioni* (así llamada porque *nostrorum petitioni* son las primeras palabras del texto), la cual consiste en extensas glosas sobre la *Isagogé* y puede datar de la época de su enseñanza en la hermita del Paráclito.

-*Dialectica*, que tiene forma de obra independiente: es un tratado orgánico acerca de cuestiones tratadas en los escritos lógicos de Boecio y el tratado de Victorino *De definitionibus*. Parece que contiene materiales de los diferentes períodos de la vida de Abelardo, pero probablemente no alcanzó su forma definitiva hasta una época muy tardía, quizá la época de su estancia en Cluny, poco antes de su muerte.

Las ediciones de estas obras son:

-V. Cousin *Ouvrages Inédits d'Abelard*, París, 1836, Edición incompleta.

-B. Geyer, *Peter Abaelards Philosophiche Schriften*, en Beitrage zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters, Vol. XXI, 1-3, Münster 1919-1927; y vol. XXI, 4, Münster 1933. Contiene *Logica ingredientibus* y *Logica nostrorum petitioni*. De ésta última había editado Rémusat una incompleta paráfrasis en francés, en Ch. de Rémusat, *Abélard, sa vie et son Oeuvre*. 2 vols. París, 1855.

- M. del Pra, *Pietro Abelardo Scritti Filosofici*, Milán-Roma, 1954. Contiene las glosas sobre la *Isagogé* de Porfirio y sobre *Las Categorías* y sobre el *Peri hermeneias* de Aristóteles, sobre el *De divisionibus* y sobre el *De differentiis Topicis* de Boecio.

- L. M. de Rijk; *Petrus Abelardus Dialectica*, Van Gorcum, Assen 1956.

- L. Minio Paluello, *Abaelardiana inedita*, Roma, 1958. Contiene un comentario sobre el *Peri hermeneias* y un análisis de un paralogismo y de cinco sofismas que se derivan de la interpretación nominalista del término *totum*.

Sobre la lógica de Abelardo:

- Boler, J. F., "Abailard and the problem of Universals", en *Journal of the History of Philosophy*, 1, (1936), pp. 37-51.

- C. Ottaviano, *Petro Abelardo, la vita, le opere, il pensiero*, Roma, 1931.

- J. G. Sikes, *Peter Abailard*. Cambridge, 1932.

- M. T. Beonio-Brocchieri Fumacalli, *La logica di Abelardo*, Florencia 1964.

- R. Padellaro, *Abelardo e il problema degli universali*, Roma 1966.

- M. M. Tweedale, *Abailard on Universals*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

Los Universales

Como cualquier lógico del s. XII, Abelardo debía responder a la cuestión sobre los Universales, más concretamente sobre la naturaleza de los Universales. Los investigadores modernos, no concuerdan en determinar qué posición toma exactamente Abelardo en la inevitable polémica sobre los Universales. Por lo demás esa falta de acuerdo se produjo muy tempranamente: si bien en muchos pasajes Abelardo se declara contrario al *nominalismo* de Roscelino, otras declaraciones muy semejantes a las de Ockham, motivaron que fuese clasificado durante

---

[20] Escoliasta anónimo: *De genere et specibus*, recogido por V. Cousin, *Ibidem*, p. 513.

[21] En V. Cousin, *op. cit.*, p. 514: "Quod si ita est, quis solvere potest, quim Socrates eodem tempore Romae sit et Athenis? Ubi enim Socrates est, et homo universalis ibi est secundum totam suam quantitatem informatus Socratitate... ubicumque autem Socratitas est in homine, ibi Socrates est, Socrates enim homo Socraticus est".

bastante tiempo como nominalista; por otra parte Juan de Salisbury en su *Metalogicon*, le sitúa en posición alejada tanto del nominalismo como del realismo: Abelardo aparece como el sostenedor del "sermonismo":

> "Alius sermones intuetur et ad illos detorquet, quidquid alicubi de universalibus meminit scriptum; in hac autem opinione deprehensus est peripateticus palatinus Abaelardus noster, qui multos reliquit et adhuc quidem aliquos habet professionis huius sectatores et testes"[22].

La mayoría de los intérpretes modernos, con Geyer a la cabeza, y entre los que se encuentra también Boler, sostienen que Abelardo ocupa una posición intermedia entre el nominalismo y el realismo[23]. Sikes y Carre[24] llaman a esa posición intermedia en que se coloca Abelardo *conceptualismo*, ya que Abelardo sostuvo claramente que los universales son *sermones*, y Carre iguala *sermones* a conceptos, entendidos éstos en sentido psicológico, como *ficciones* de la mente. M. T. Beonio-Brocchieri acentúa el nominalismo de Abelardo rechazando la interpretación como conceptualista. Finalmente M. Tweedale en su concienzudo trabajo pretende resolver la aparente contradicción presentada ya por Geyer referida al *status* y, asimismo, a los *dicta* (los *dicta* son lo que las proposiciones dicen y las proposiciones dicen algo, si bien no hay nada que las proposiciones digan). Según Tweedale la posición de Abelardo sobre los universales, debe ser elucidada dentro de su teoría de la significación, la cual concuerda en los puntos esenciales con la de Frege:

La proposición se compone de dos (no de tres) partes: sujeto y predicado según Abelardo, la cópula y el predicado funcionan como un verbo, en una proposición de verbo intransitivo[25]. Frege llama a esto *argumento* y *función*. Sólo la primera significa algo, se refiere a algo, la segunda es *insaturada* según Frege; no significa nada, según Abelardo, porque es una función de "encadenamiento" *(copulativo)*, lo que, precisamente, distingue a los verbos de los nombres. Cuando Frege niega que los conceptos sean objetos, está negando que los conceptos existan o que sean cosas, de igual modo que Abelardo niega que los *Status* o los *dicta* existan o que sean cosas. Los *status* (de Abelardo) o los conceptos (de Frege) son lo que las expresiones predicativas significan; las esencias (de Abelardo) o los objetos (de Frege) son los *items* que actualmente poseen ciertas propiedades en tanto que caen bajo ciertos *status* o bajo conceptos.

> "Ambos, Abelardo y Frege, son nominalistas en este sentido: lo que los predicados significan no existe al margen de, o por encima de, la existencia de aquello de lo que realmente los predicados se predican"[26].

Abelardo en *Logica Ingredientibus*, parte de la definición de Aristóteles del *universale*, "quod de pluribus natum est aptum praedicari". De esta definición se sigue que el universal no puede ser una *cosa*, porque "res de re non praedicatur"; por lo tanto, queda rechazado el realismo. No siendo una *res*, es una *vox* o *sermo*. La *vox universale* es capaz de ser aplicada a (predicada de) un conjunto de individuos repecto de su *status* común, i. e., la semejanza como abstraída por la mente humana para un conjunto de individuos similares; por ej., la semejanza de Sócrates y de Platón ni es una cosa ni es una nada, sino su ser hombre *(esse hominem o status hominis)*. Según esto, Abelardo adopta la concepción de que: 1) hay cosas extramentales, cuya existencia es independiente de la mente humana, y de que 2) el hombre es capaz, hasta cierto punto, de conocerlas. La lógica es *ars sermocinalis* y, por consiguiente, concierne sólo a las *voces* o *sermones*. Pero en Lógica el *término* es algo: no un sonido, sino algo con un significado. Abelardo llama a la *vox*, tomada, no como un sonido, sino como una entidad lógica (correspondiendo a su significado), *sermo*. El *sermo* es la palabra con vistas a su significación; y el *significatum* ordinario es algo, extramental. Las palabras no son pues. El *sermo*, la proposición (y no la palabra) es lo universal, porque la palabra no se predica de muchos más que en tanto que forma parte de una proposición: cuya naturaleza consiste precisamente en la atribución universal *(sermo praedicabilis)*.

Así,pues, no hay universalidad más que por el acto de predicación, por la proposición. Fuera de la proposición no hay más que palabras, cosas individuales. Así, por ejemplo, si decimos "hombre", esta palabra en tanto que sensación, en tanto que "flatus vocis", es un individuo. Pero si predicamos "hombre" de "Sócrates" en una proposición -"Sócrates es hombre"-, entonces por este acto de predicación aparece el universal. La cuestión que se plantea ahora es qué son las proposiciones:

> "Dignum autem inquisitione censemus, utrum illae existentiae rerum, quas propositiones loquuntur, sint aliquae de rebus existentibus"[27].

Ciertamente las proposiciones no son las cosas particulares por ellas expresadas ("res aliquas non esse ea

---

22 J. de Salisbury, *Metalogicon*, lib. II, cap. 17, edic. cit., p. 113.
23 Cayendo, según parece, en una contradicción: combate, por una parte, la tesis de que los individuos que caen en el universal convienen en algo (en una *res* o *essentia)* y sostiene, por otra, que convienen en algo llamado *status*.
24 *Op. cit.*
25 "tantumdem enim 'currit' verbum proponit quantum 'est currens' dicit" *Dialectica*, edic. de Rijk, cit., p. 123.
26 M. Tweedale, *op. cit.*, p. 316.
27 *Dialectica*, ed. cit. p. 153.

quae a propositionibus dicuntur"). Las proposiciones no designan simplemente cosas, como los nombres; lo que expresan es cómo se conexionan una cosas con otras: si convienen entre sí. ("qualiter res sese ad invicem habeant, utrum scilicet sibi conveniant an non proponunt"[28].

Los universales son, pues, conexiones, no cosas. La proposición es verdadera en caso de que enuncie conexiones reales al mismo tiempo que intelectuales: "Patet insuper adeo per proposiciones de rebus ipsis, non de intellectibus nos agere..."[29]. Mas lo que las proposiciones dicen o proponen (los *dicta)* no son cosas ni imágenes mentales: "Nos vero nolumus propositiones vel solos intellectus significare vel res ipsas, sed cum significatione intellectum quandam aliam significationem habere quae nil est omnino, veluti Socratem esse hominem vel non esse"[30]. Que las proposiciones no significan cosas queda patente, según Abelardo, del examen de las proposiciones condicionales. Por ejemplo, dada una proposición "si est rosa, est flos", el nexo necesario en esta *consequentia* no es una cosa o una propiedad de las cosas, de las ideas; mas, con todo, es un nexo objetivo basado en la significación, en el *dictum* de la proposición:

> "Cum aliquam consequentiam in qualibet propositione necessariam dicimus non in essentia sui quae transitoria est, sed secundum suam significationem, oportet in significatione eius haberi, quod necessarium possumus appellare. At vero nec intellectus propositionis in se necessitatem ullam habet, quae est actio transitoria. Aliud ergo oportet significari a propositione, pro quo necessaria dici possit, veluti cum istam consequentiam, 'si est rosa est flos', veram semper etiam destructis rebus et necessariam concedamus, oportet videri, pro quo significatio necessaria iudicatur"[31].

En consecuencia, la conexión (en este caso necesaria) se da entre los *dicta*. Los *dicta*, como los *status*, no son cosas; tampoco son frabricaciones de la mente. No cabe decir nada afirmativamente de ellos, ni siquiera decir que son nada; sólo cabe referirse a ellos negativamente: no son algo (concreto) "Praeterea nihil affirmative dici potest de dicto propositionis, ut videlicet dicam affirmative: ipsum esse nihil sed negative: non esse aliquid"[32]. Lo que todos los hombres tienen en común (el *status)* es ser -un- hombre, y esto no es una cosa. Similarmente, lo que se significa con el *dictum* de "Sócrates est homo" es ser -un- hombre -de- Sócrates, y, de nuevo, esto no es una cosa *(res).*

El *Est*

Abelardo está de acuerdo con Aristóteles en que las proposiciones de *secundo adiacente*, ("homo currit", por ejem.), son equivalentes a las de *tertio adiacente* ("homo est currens"): "tantumdem enim 'currit' verbum proponit quantum 'est currens' dicit"[33]. Pero, contrariamente a Aristóteles, Abelardo sostiene que no es la significación de tiempo lo que separa a los verbos de los nombres; en lo que difieren es en el *modus significandi;* el verbo no significa tiempo sino que efectúa el encadenamiento *(copulatio)* que permite la constitución de la proposición:

> "Non tam igitur in significatione temporis nomen a verbo recedere videtur quam in modo significandi. Verbum enim, quod solum inhaerentiam facit, in eo tempus quoque designat quod inhaerentiam rei suae ad subiectam personam in tempore denotat. Nomen autem inhaerentem determinet..."[34].

Abelardo considera el *verbum sustativum "est"* como la cópula del sujeto y el predicado (en caso de que aparezca como *appositum subiecto*, como en "Socrates est", ha de entenderse como una abreviatura de "Socrates est ens"[35]), y sostiene que la combinación de cópula con el predicado tiene la misma función que un verbo intransitivo una función doble: la de significar algo y la de proponer la inherencia de aquello a lo que el sujeto se refiere. Pero la cópula sola no significa nada. En "Homo est animal" el "est" desempeña una función en la proposición *(officium copulandi*[36]*)*, al igual que las palabras "si" y "no" desempeñan otras funciones, pero sin significar cosa alguna; son sincategoremáticos.

> *"'Est'* verbum interpositum ad coniunctionem terminorum, unde scilicet est tertium adiacens, nullius rei significationem ibi exercet, plus tamen ad vim affirmationis proficit coniugendo terminos significantes quam ipsi termini, similiter 'non est' ad vim negationis, et licet intellectus non constituant, quandam coniunctionem vel disiunctionem intellectarum rerum in anima haberi faciunt, quam tamen coniunctionem vel disiunctionem non significant, licet haberi faciant, quia intellectum non dant in se sed intellectorum coadiunctionem vel separationem habere nos fa-

---

[28] *Ibidem*, p. 154.
[29] *Ibidem*, p. 154.
[30] *Logica Ingredientibus*, Edic. de Geyer, cit., p. 365.
[31] *Logica Ingredientibus*, Edic. de Geyer, cit., p. 366.
[32] *Ibidem*, p. 369.
[33] *Dialectica*, edic. cit., p. 123.
[34] *Ibidem*, p. 123.
[35] *Ibidem*, p. 161.
[36] *Logica Ingredientibus*, edic. cit., p. 368.

ciunt... Sicut autem 'est' vel 'non est' coniunctiva vel disiunctiva sunt, non significativa, ita 'si' vel 'non si' significativas voces copulant vel separant,ut ipsa tamen non significent, cum nullius rei in se conceptionem teneant sive fictae sive verae, sed animun inclinant ad quendam concipiendi modum"[37].

Que la cópula no signifique (no tenga como referente) cosa alguna, no quiere decir que sea nada. La cópula tiene, cuando menos, una función selectiva: está seleccionando posibles predicados respecto del sujeto. La cópula, dicho en términos modernos, es un funtor, al igual que "si.....entonces" o "no" y es la que, por lo tanto, determina la estructura formal o forma lógica de la proposición.

Otra cuestión es cómo interpretar el 'est' cuando aparece copulando entre "essentias quae significationem non continent, veluti 'non ens' aut 'opinabile'".

¿Cómo interpretar el "est" en la proposición, dicha actualmente, "Homerus est poeta", o en la proposición "Chimera est opinabilis"? Porque los "est" en estas proposiciones "in designatione non-existentium volunt accipi. Sed quid ergo esse ea negat, si idem 'esse' quod non-existentia demonstrat, accipiat"?[38]

Una primera solución que se le ocurre a Abelardo, es considerar a este tipo de proposiciones como *locutiones impropriae*, como las proposiciones que contienen una *oppositio in adiecto* ("un hombre muerto corre"). Así, "Chimera est opinabilis" no tiene por qué forzarnos a admitir la verdad "Chimera est". Porque -dice Abelardo-[39], como uno de sus maestros sostenía, el verdadero sentido de la proposición viene expresado cuando se formula así: "anima alicuius opinionem habet de Chimera". Aquí no hay atribución de una propiedad a una quimera y, por lo tanto, no hay razón para afirmar que la quimera existe.

Pero Abelardo considera inaceptable esta solución, ya que es aplicable tanto a lo inexistente como a lo existente. Su propuesta consiste en negar que el verbo "ser" sea, lógicamente hablando, una parte de la proposición, sino que forma con el nombre-predicado un verbo único; por consiguiente, el "est", en su función de cópula del sujeto con el predicado, no comporta la afirmación de existencia:

"Nec quidem, quantum ad eius interpretationem pertinet, ex eo quod dicitur 'Petrus es homo' inferri potest 'Petrus est', sed fortasse quantum ad praedicationem 'hominis', quod existentis rei tantum nomen est"[40].

Mas esta solución -la cópula "est" en la proposición atributiva no comporta afirmación de existencia- no concuerda, como luego veremos, con su teoría sobre la oposición de las proposiciones, según la cual las proposiciones universales afirmativas sí tienen un alcance existencial. Ni tampoco con esta otra precisión respecto de este tipo de proposición: "Socrates est homo" la cual "nullo modo sine re permanente vera esse potest"[41].

La negación

Respecto de la oposición de las proposiciones sostiene que la negación (la contradictoria) de una proposición categórica o hipotética, se obtiene cuando el signo afecta a toda la proposición[42]. Y así, la negación (la contradictoria) de "quidam homo est albus" es "nullus homo est albus", porque "nullus" no es más que una abreviatura de "non ullus". Y la negación de "omnis homo est albus" es "non onmis est albus", rechazando aceptar como su negación (contradictoria) "quidam homo non est albus", como Boecio había mantenido. Abelardo considera que "non omnis homo est albus" y "quidam homo non est albus" son proposiciones que no significan lo mismo[43]. Es, pues, la primera, no la segunda, la que debe figurar en el "cuadrado lógico" de la oposición de las proposiciones. A "quidam" o "ullus", se opone (contradictoriamente) "non ullus" = "nullus", y a "omnis" se opone (contradictoriamente) -como ya observó Aristóteles- "non omnis". Esta estructuración de Abelardo obedece a una razón: el intento de resolver otro problema que plantea la cuantificación: la afirmación, o no, de existencia que comporta la proposición categórica universal. Para Abelardo -y para los lógicos medievales- la universal afirmativa "omnis homo est albus" tiene un alcance existencial, como las particulares; hasta las de tipo tautológico como "omnis homo est homo" resultará falsa si no existiesen hombres:

"Cum autem 'quidam homo non est homo' semper falsa sit atque 'omnis homo est homo' homine non existente, patet simul easdem falsas esse: unde nec recte dividentes dici poterunt"[44].

---

37 *Logica Ingredientibus*, ed. cit., p. 339.
38 *Dialectica*, ed. cit., p. 135.
39 *Ibidem*, p. 136.
40 *Ibidem*, p. 137.
41 *Ibidem*, p. 239.
42 "Multum enim refert ad sententiam enuntiationis ...negativa particula ...quod quidem ex hypotheticis quoque enuntiationibus ostenditur ...Est itaque recta ac propria tam voce quam sensu negatio, quae negatio praeposita propositae enuntiationi sententiam eius extinguit ...Ex his itaque manifestum est, subitilius Aristotelem considerasse negationem universalis affirmationis, quam Boethium". *Ibidem*, pp. 183 y 186.
43 *Ibidem*, p. 184.
44 *Ibidem*, p. 176.

La modalidad

Abelardo clasifica[45] las proposiciones categóricas en a) simplemente enunciativas, "de puro 'inesse', et sine modo aliquid enuntiant") y b) las que predican algo "cum modo".

Los modos, en sentido propio, son los adverbios; mas también los adjetivos modales acompañados de un acusativo y un infinitivo. Siguiendo a Aristóteles, Abelardo recoge éstos cuatro: "posible", "imposible", "necesario" y "contingente" (también, en un sentido, "verdadero" y "falso").

Los modos auténticos son los que modifican *in sensu* o *quantum ad sensum*, esto es, los que modifican la "inherentiam verbi quasi prius propositam et constitutam", es decir, la predicación de la proposición correspondiente *de inesse*. Así, "possibile est Socratem currere" significa predicar la posibilidad del *sensus* de la proposición "Socrates currit"; equivale, pues, a la proposición "Socrates currit possibile", donde "Socrates" es sujeto, "currit" predicado y "possibile" es la *determinatio praedicati*. Los otros adverbios que no modifican así hacen modal la proposición sólo *secundum* o *quantum ad constructionem*. Así "possibile est Socratem currere", significa ahora que "Socratem currere" es un sujeto (o como dice Abelardo "infinitivus modus ('currere', scilicet) subicitur et 'Socrates' quasi determinatio subiecti ponitur"), y "neccese" es el predicado. En este sentido *(quantum ad construtionem*, no *secundun sensum)* son también modos *verum* y *falsum*. Así, "cum dicimus: 'Socratem esse hominem verum est', id intelligimus quod hoc quod dicit haec propositio: 'Socrates est homo' verum est de his quae in re sunt, idest una est de numero existentium rerum... Similiter est quando dicimus: 'possibile est Socratem esse hominem', non aliquam alicui atribuimus proprietatem, sed id dicimus quod id quod dicit haec propositio: 'Socrates est homo', est unum de his quae natura patitur esse" *(Dialectica, ed. cit.*, p. 204-205). Y es también entendida la modalidad en este sentido, en cuanto modificación de un contenido proposicional, como puede establecer Abelardo la siguiente conexión entre las modalidades:

> "Verum antecedit quidem ad possibile, sequitur vero ad necessarium; falsum autem ad impossibile tantum sequitur; si enim necesse est esse, verum est esse, et si verum est esse, possibile est esse; si vero impossibile est esse; falsum est esse"[46].

De manera que hay dos tipos de modalidad: la auténtica y verdadera modalidad, la *secundum sensum*, y la modalidad quantum *ad constructionem*[47]. Y según estos dos tipos de modalidad, hay (en la proposición modal) "duplex praedicatum et duplex subiectum", y caben también dos afirmaciones y dos negaciones, según que se niegue el modo o el verbo de modo infinitivo. A estos dos tipos de modalidad vuelve a referirse Abelardo, aunque con otra terminología, en su glosa *"Peri Hermeneias"*[48] y con referencia al *De sophisticis Elenchis*.

Introduce allí la siguiente distinción: las modales pueden ser entendidas *in sensu composito*, cuando el modo "ad integrum sensum propositionis applicatur" (llamadas ahora modales *de sensu)*, y pueden ser entendidas *in sensu diviso*, cuando el modo se refiere "ad rem ipsam, non ad propositionem" (llamadas ahora modales *de re)*:

> "Similiter, si dicam 'quandam rem impossibile est currere', diversos habet sensus, de sensu et de re. Si enim de sensu exponatur, sic: 'impossibile est quod quaedam res currat' falsa est; si vero de re hoc modo: 'quaedam res non potest currere' vera est. Sed et si dicam 'necesse est non sedere stantem', de sensu verum est quia necesse est ut non sit ita quod stans sedet; si vero de re ita accipiam quod 'is qui stat ex necessitate caret sessione' falsum est. Et ita de re et de sensu expositae huismodi modales diversos habent sensus"[49].

Según esta división, las proposiciones *in sensu composito (de sensu)* no son auténticas modales, ni son cuantificables ni convertibles, y sólo admiten una negación. Las proposiciones *in sensu diviso*, en cambio, tienen cuatro enunciaciones: dos según el modo (afirmativa-negativa) y dos según el verbo infinitivo (afirmativa-negativa).

Los lógicos medievales, posteriores a Abelardo, seguirán utilizando esta distinción hablando de modalidad *de dicto* (aplicación de la modalidad al contenido proposicional) y modalidad *de re* (modificación del predicado)[50].

La Inferencia

La *inferentia*, en Abelardo, es un género que comprende como especies la *cosequentia* (inferencia inmediata) y la *argumentatio* (inferencia mediata) y es definida de esta forma:

---

[45] *Dialectica*, ed. cit., p. 190.

[46] *Dialectica*, ed. cit., p. 204.

[47] Tenemos, dice Abelardo, "quosdam proprie modos secundum sensum, quosdam quantum ad constructionem solam". *Glosa super Peri Hermeneias*. Ed. M. del Pra., *op. cit.*, p. 6).

[48] L. Minio-Paluelo, *Abaelardiana Inedita*. Ed. cit., p. 13.

[49] *Ibidem*, p. 14.

[50] (Véase W. Kneale, "Modality de dicto and de re", en *Logic, Methodology and Philosophy of sciencie. Proceedings of the 1960 International Congress*, ed. por E. Nagel, P. Suppes y A. Tarski, Stanford, California, 1962, pp. 624-633.

"Inferentia itaque in necessitate consecutionis consistit, in eo scilicet quod ex sensu antecedentis sententia exigitur consequentis, sicut in hipotetica propositione dicitur, ut in senquentibus monstrabitur. Haec autem inferentia alias perfecta est, alias imperfecta"[51].

La *consequentia* es perfecta si la *necessitas consecutionis* está basada en la colocación de los términos sin consideración alguna de su significado *(consequentia secundum complexionem)*. Y es imperfecta, si es preciso atender al significado de los términos para poder establecer la *necessitas consecutionis (consequentia ex rerum natura)*.

Esta división general de las inferencias es aplicable a todo tipo de argumentación. En lo que respecta en particular a la consecuencia, Abelardo considera ésta como una *coniuntio*, entre un antecedente y un consecuente. Y esta *coniuntio* puede ser natural o temporal, obteniendo así dos tipos de *consequentia* (correspondientes, en esencia, al condicional diodórico y filónico. Implicación estricta e implicación material). En el primer caso tenemos una *consecutio naturalis*, como, por ejemplo, en "si est homo, est animal". En el segundo caso tenemos sólo una *comitatio temporalis*, por ejemplo "Cum pluit, tonat". El primer tipo de *consequentia* exige la apelación -aunque distinga grados de necesidad- a términos modales:

"Videntur autem duae consecutionis necessitates: una quidem *largior*, cum videlicet id quod dicit antecedens non potest esse absque eo quod dicit consequens; altera vero *strictior*, cum scilicet non solum antecedens absque consequenti non potest esse verum, (sed etiam) ex se ipsum exigit; quae quidem necessitas in propria consecutionis sententia consistit et veritatem tenet incommutabilem"[52].

Abelardo usa la mayor parte de las veces la implicación en este sentido (correspondiente a la moderna implicación estricta). Pero también reconoce la implicación en sentido filónico (o implicación "material"):

"[Aliquae consequentiae] liberius expediuntur et assignantur secundum sensus totarum enuntiationum et laxius accipiuntur, ut videlicet ita exponantur: posito antecedenti, idest existente eo quod dicit antecedens propositio, existit illud quoque quod consequens proponit"[53].

Este doble significado que Abelardo atribuye a la *vis inferentiae* en la *consequentia* vuelve a aparecer en la *argumentatio*.

La argumentatio constituye para Abelardo el objetivo final y principal de la investigación lógica (de la "Dialectica", como él dice). Esta trata *de ratione argumentorum componenda*, y puede definirse como *ratio disserendi* o *discretio argumentandi*. Objeto, asimismo, de la Retórica, pero que no lo trata "científicamente", sino como mera habilidad para argumentar y conseguir argumentos persuasivos.

La Lógica (=Dialectica), en cambio, establece la verdad o no verdad de la *argumentatio*[54]. Su objetivo es la construcción del discurso verdadero o científico. La Lógica se distingue, así, de la Retórica porque tanto su método como su objetivo son diferentes.

Hay dos maneras en que una *argumentatio* puede resultar verdadera (y, por tanto, ser objeto de la Lógica): la "dispositio terminorum" y la "natura rerum". Al primer tipo de *argumentatio* pertenece el silogismo; al segundo el *locus*.

Abelardo estudia la naturaleza del silogismo (del categórico y del hipotético) en *Tract.* II, lib. 3 y *Tract.* IV, lib. 2 de su *Dialectica*. Sigue la definición aristotélica y la traducción de Boecio de silogismo. Pero su posición resulta ambigua a la hora de determinar en qué consiste la verdad del silogismo. A veces[55] sostiene que el silogismo obtiene su verdad porque se la garantizan los *assumpta*, que son de orden extralógico, haciendo, así, acto de presencia la Metafísica como garantía de la Lógica. De manera que, para obtener una "complexio" perfecta de premisas y conclusión, aquéllas han de ser verdaderas. Otras veces (las más), Abelardo defiende el aspecto estrictamente formal del silogismo como específico de la lógica:

"Neque enim dialecticus curat, sive vera sit sive falsa inferentia propositae consequentiae, dummodo pro vera eam recipiat ille, cum quo sermo conseritur..., sed haec concessio verae inferentiae in necessitate recipienda est"[56].

La verdad del silogismo no depende, ahora, de la verdad o "necesidad" de los *assumpta*. En la *complexio* silogística, los términos son considerados, no como designativos de la realidad, sino como elementos de un cálculo; no es preciso la consideración de la realidad, la *habitudo rerum:*

"Sive veris propositionibus sive falsis, syllogismus texatur dunmodo formam teneant syllogismi, tota tamen ipsius inferentia firmissima semper erit"[57].

---

51 *Dialectica*, ed. cit., p. 253.
52 *Dialectica*, ed. cit., p. 283.
53 *Ibidem*, p. 293.
54 *Logica Ingredientibus*, ed. Geyer, *cit.*, p. 506. Y *Dialectica*, pgs. 121, 152, 278.
55 *Dialectica*, p. 232.
56 *Ibidem*, p. 255.
57 *Ibidem*, p. 255.

Y, en este sentido, el esquema de un silogismo deviene una fórmula implicativa. De Rijk apoya esta interpretación aduciendo[58] un texto de "Differentis Topicis", en *Logica Ingredientibus:*

> "Est quidem communis sententia et omnen argumentationem esse hypotheticam propositionem"[59].

Reconocida la doble posición de Abelardo respecto de la naturaleza del silogismo, es también cierto que muestra más interés por indagar el aspecto formal del cálculo silogístico que por garantizar metafísicamente su verdad. La *vis inferentiae* del silogismo hay que buscarla, según esto, en la *dispositio terminorum*, no en la *natura rerum*. En esto precisamente se distingue la argumentación silogística de la de los *loci*. La construcción del *locus* es más imperfecta que la de un silogismo, según Abelardo, porque la primera necesita tomar en consideración el valor designativo de los términos en ella utilizados, cosa que resulta irrelevante en el silogismo desde el punto de vista de la *perfectio inferentiae*. Los *loci* reposan sobre las *proprietates sermonum* o *habitudo terminorum* que se basan, a su vez, en la *habitudo rerum* o *natura rerum*[60]; su investigación exige, pues, una consideración metafísica:

> "Istae ergo consequentiae recte ex natura rerum verae dicuntur quarum veritas una cum rerum natura variatur; illae vero veritatem ex complexione non ex rerum natura, tenent quarum complexio necessitatem in quibuslibet rebus, cuiuscumque sint habitudinis, aeque custodit, sicut in syllogismis vel in consequentiis quae formas eorum tenent ostenditur"[61].

Así, por ejemplo, cuando pasamos de "Socrates est homo" a "Socrates est animal", estamos utilizando un *locus a specie*, esto es, la *maxima propositio* del *locus* es" De quocumque praedicatur species, et genus". Esta es la que garantiza la verdad de la *consequentia;* verdad *ex rerum natura*, que establece la ilazón en la proposición "Si Socrates est homo, est animal", por correspondencia con la ilazón en la realidad. De manera que la *consequentia* de un *locus* está regida por su *maxima propositio*, que es la garantía metafísica de la argumentación: "ea res in cuius habitudine ad aliam firmitas consecutionis consistit"[62].

Pero de nuevo aparece el sentido no metafísico, sino puramente formal, aplicado ahora a la *maxima propositio*. Esta puede ser considerada como una proposición de carácter universal con vistas a establecer ciertas reglas, análogas a las de las matemáticas y de la gramática. Y en este sentido la *maxima propositio* es una proposición "per se nota, id est, ex propria inventione.... certa sicut.... quaecumque regulae"[63]. Las *maximae propositiones* serían, haciendo una extrapolación lingüística, los axiomas o las reglas de inferencia del cálculo lógico-formal.

Esta doble actitud es característica de Abelardo en la mayoría de sus indagaciones lógicas: por una parte exige separar el estudio de las propiedades y relaciones de las cosas (Metafísica) de la investigación lógica, que trata de la validez del discurso, según la *impositio vocum* o la *impositio oratiorum*[64]. Mas, por otra, admite implícitamente que las propiedades y las relaciones de las cosas son la base y garantía de las correspondientes propiedades y relaciones de los nombres.

Con todo, Abelardo, si bien no consiguió liberar totalmente a la lógica de la fuerte contaminación metafísica a la que se había visto sometida en la *lógica vetus*, no obstante, tuvo valiosas contribuciones para conseguir tal objetivo y sentar las bases de la *lógica modernorum*. En general, y en resumen, supo sacar a la lógica del plano de los términos, de la *quaestio de universalibus* que estaba infestada de metafísica y ponerla en el plano del *sermo* (Lógica = *scientia sermocinalis)*, en la vía de la *lógica nova* empeñada en la construcción de una lógica como ciencia autónoma, formal y *sermocinalis*.

2. La lógica *nova:* La escolástica aristotélica

La lógica *nova* amplía la base de la logica *vetus* (constituida por las obras: *Isagogé* de Porfirio, *Categorías* y *Perihermeneias* de Aristóteles), incluyendo las restantes obras del *Organon* aristotélico (los dos *Analíticos*, *Tópicos* y *Argumentos sofísticos)*. En la segunda mitad el siglo XII ya se conocían en las "Escuelas" de Europa todas las obras que componen el

---

[58] En su introducción a la edic. de la *Dialectica*, pp. 32-33.
[59] *Logica Ingredientibus*, ed. de M. del Pra, pp. 321-2.
[60] *Dialectica*, ed. cit., p. 256.
[61] *Ibidem*, p.256.
[62] *Glosae super Boethius, De Differentiis Topicis*, Ed. M. del Pra, p. 207.
[63] *Ibidem*, p. 207.
[64] "At vero magis praedicationem secundum verba propositionis quam secundum rei existentiam nostrum est attendere qui logicae deservimus" *(Dialectica*, ed. cit., p. 166).

Organon aristotélico, bien a través de la traducción de Boecio, bien a través de otras traducciones al latín hechas en Sicilia y en Italia por eruditos de origen griego o helenístico, o en España por los árabes.

Juan de Salisbury introduce en su *Metalogicon* (1159) el *Organon* completo en la enseñanza de la lógica. Y a principios del siglo XIII, el conjunto de la filosofía de Aristóteles (con su *Física, Metafísica* y *Etica)* se expande por las universidades europeas. El aristotelismo suplanta al platonismo; a ello contribuyó en buena medida el influjo de los árabes. En el 763 el califa Almanzor inaugura en Bagdad el centro de estudios árabes con el ánimo de que la ciudad herede el legado de Atenas y Alejandría. A principios del siglo X los escritos de Aristóteles y la mayor parte de la enciclopedia griega están ya traducidos al árabe. Bien es cierto que algunos lo estaban sobre versiones siríacas, no directamente del griego. Pero los árabes también tradujeron directamente del griego y completaron el estudio de Aristóteles con los comentaristas griegos[65].

En lo que respecta a la lógica, los árabes, en general, siguen fieles a la tradición peripatética. Aristóteles era para ellos el "primer filósofo". El segundo era Al-Farabi (870-950), el lógico más importante del mundo árabe, si bien sólo nos han llegado datos fragmentarios de sus numerosos escritos lógicos y comentarios[66]. El "tercer filósofo" era Avicena (980-1037) quien escribió unas doscientas obras, entre ellas un importante tratado de lógica, como parte de su magna enci-clopedia *Al-Shifa* (la curación) en el que sigue las directrices del aristotelismo[67].

La traducción fragmentaria al latín de este tratado llegó a la cultura cristiana cuando ésta, a partir del s. XII aceptó como filósofo oficial a Aristóteles, ejerciendo Avicena a partir de entonces, gran influencia en los pensadores cristianos: San Alberto Magno, Sto. Tomás de Aquino, Duns Escoto, etc. Avicena considera que la lógica (aristotélica) forma una unidad cuyas partes están íntimamente ligadas entre sí y son las siguientes:

- Introducción *(Isagogé* de Porfirio),
- *Categorías,*
- *Peri Hermeneias,*
- Silogismos *(Primeros Analíticos),*
- Demostración *(Segundos Analíticos),*
- *Tópicos,*
- *Argumentos Sofísticos,*
- Silogismos Oratorios *(Retórica),*
- Estudio de los versos *(Poética).*

Esta división, eliminada la *Isagogé* de Porfirio estaba ya en Al-Farabi[68]. Algunas de sus ideas sobre la lógica que luego hicieron suyas los escolásticos son:

1) El objeto de la lógica son las segundas intenciones, entendiendo por tales fundamentalmente los géneros y las especies: "Subiectum vero logicae sunt intentiones intellectae secundo quae opponutur intentionibus primo intellectis, secundum quod per eas pervenitur de cognito, ad incognitum, in quantum ipsae sunt intellectae et habent esse intelligibile, quod esse nullo modo pendet ex materia, vel pendet ex materia, sed non corporea"[69].
2) La distinción "real" entre esencia y existencia; aunque, en realidad, la auténtica distinción real que hace Avicena, siguiendo a Al-Farabi, es entre el *ser posible* y el *ser necesario*. En su esquema ontológico considera a la existencia como extrínseca a la esencia como consecuencia de sus presupuestos teológicos: Sólo el ser necesario *per se* -Dios- merece la existencia; las cosas son seres posibles *per se*, y sólo son necesarias *por otro*. El ser necesario *per se* no tendrá otra esencia que su existencia, pero las esencias meramente posibles son neutras: no merecen más el ser que el no ser; la existencia les es *extrínseca*. De aquí deducirá Sto. Tomás la distinción real entre esencia y existencia[70].
3) Partiendo del esquema ontológico anterior concibe Avicena los universales en su relación con las esencias como sigue: el universal es una idea cuya naturaleza es intelectual *(natura in intellectu)*. Y la esencia que el universal tiene en nuestro espíritu es meramente intencional. El proceso

---

65 Véase I. Madkour, *L'Organon d'Aristote dans le monde arabe*. Vrin, París, 1934.

66 Confert. *Alpharabii opera omnia, que, latina lingua conscripta, reperiri potuerunt ex antiquissimis manuscriptis eruta*. Ed. de G. Camerarii. París, 1638. Recogido en Al-Farabi, *Catálogo de las Ciencias*, ed. y trad. cast. de Angel González Palencia. C. S. I. C. Madrid, 2ª ed. 1953.

67 Sobre la logica de Avicena, véase Shehaby, N. : *The propositional logic of Avicena: A translation from Al-shifa: Al Quiyas*. Reidel, Dordrecht,1973. Zabeeh, F., *Avicenna's treatise on logic: Part one of danesh-name Alai*. Nijhoff. La Haya, 1971.

68 *Ibidem*, p. 95: "octo igitur sunt partes Logicae, Categoriae, Perihermeneias, Analytica Priora, Analitica posteriora, Topica, Sophistica, Retorica, Poetica".

69 *Avicena... Opera... Logyca, Sufficientia, De coelo et mundo*. Trad. al latín de D. Gundisalvo. Venecia, 1495, p. 70.

70 *Confert*, M. Cruz Hernández, *Filosofía hispano-musulmana*. Tomo I. Asociación Española para el Progreso de la Ciencia. Madrid, 1957, pp. 117 y ss.

para llegar al universal intencional es a través del entendimiento agente que opera sobre las formas sensibles abstrayendo las cosas particulares de la materia y de sus lazos, y confiriendo al universal mental su universalidad intencional. El universal así formado es predicable de los entes concretos.

Averroes (1126-1198) llamado "el comentador" (de Aristóteles) es el filósofo hispano-musulmán que mayor influjo ejerció en la escolástica occidental. En lo que respecta a la lógica su preocupación principal es seguir con fidelidad la doctrina de Aristóteles, comentando y analizando las expresiones del *Organon*. Sigue la división de la lógica en las nueve partes establecidas por Avicena y clasifica la lógica independientemente de las ciencias teóricas y prácticas, y la coloca según la concepción peripatética entre las ciencias elementales que sirven de ayuda a las demás. Aunque no sea propiamente lógica su teoría del entendimiento antes definida ya por Al-Farabi y Avicena, es lo más relevante de la escolástica musulmana. Averroes considera el entendimiento agente de Aristóteles como algo trascendental que desempeña una función psicológica y cósmica. El preside las operaciones intelectuales -abstracción, intuición, iluminación- y hace pasar el entendimiento humano de la potencia al acto; este entendimiento es único para todos los individuos, es universal y eterno, constituido por una sustancia pura, semejante a la de los astros y a la del alma humana, distinguiéndose de las inteligencias de las esferas celestes porque en él hay cierta composición (todas las sustancias, a excepción de la causa prima tienen algo de potencia); en efecto, el entendimiento material es como un medio transparente en el que brilla la luz del entendimiento agente: el primero es una potencia; el segundo un acto, pero ambos están dirigidos el uno al otro, y esta ecuación intelectiva de los entendimientos se realiza entre entidades eternas y universales. Sólo así llegamos a los inteligibles desde esa razón universal: el entendimiento agente[71].

Las traducciones al latín de los comentarios y versiones árabes de Aristóteles contribuyeron decisivamente a que el *Organon* de Aristóteles fuese conocido por completo en el occidente europeo a partir de la segunda mitad del siglo XII. Esto hace que la *logica vetus* (restringida a la *Isagogé* de Porfirio y las *Categorías* y *Perihermeneias* de Aristóteles, y de marcado cuño platónico) quede ampliada, y el conocimiento del *Organon* alcanza a todos los tratados que lo forman. Se habla entonces de la *logica nova* fundada en la imperecedera y completa obra de Aristóteles. Y con todos estos materiales se elaboran los grandes *tractatus*, *compendia* o *summulae* que aparecen en la primera mitad del siglo XIII y que constituyen lo que con más propiedad puede llamarse la lógica escolástica: constituían, efectivamente, los manuales para la enseñanza de la lógica en las "Escuelas".

Los tres grandes tratados de lógica del siglo XIII son: las *Summulae logicales*[72] de Pedro Hispano; las *Introdutiones in logicam*[73] de Guillermo de Shyreswood; y la *Logica*[74] de Lamberto de Auxerre.

Ha quedado definitivamente rechazada[75] la tesis apuntada por E. Ehinger[76] y obstinadamente defendida por Prantl[77] según la cual estos tratados latinos, y más en concreto el de Pedro Hispano, tienen su origen común en un compendio griego: la Σύνοψις εἰς τὴν Ἀριστοτέλους λογικὴν ἐπιστήμην, atribuido al escoliasta bizantino del s. XI Miguel Psellos.

Las *Summulae* fueron compuestas por Pedro Hispano hacia 1230, luego de abandonar éste París, a donde había llegado, oriundo de Portugal en 1220 a la edad de 18 años. Hacia 1235 fue a estudiar medicina a Salerno y Montpellier, y de 1245-50 fue profesor de medicina en la Universidad de Siena. Posteriormente regresó a su país natal, desempeñando altos cargos eclesiásticos y civiles próximos al monarca Alfonso III. En 1272 el Papa Gregorio X le nombra su médico de cámara, componiendo por entonces el *Thesaurus pauperum*, manual de medicina que gozó durante varias centurias de fama similar a las *Summulae:* éstas fueron el manual para el estudio y para la enseñanza de la lógica por excelencia hasta el siglo XVII, alcanzando 166 ediciones. El 15 de Setiembre de 1276 Pedro Hispano fue elegido Papa y tomó el nombre de Juan XXI, murió al año siguiente en Viterbo, el 20 de Mayo.

Las *Introductiones in logicam* de Guillermo de

---

[71] La edición príncipe latina de las obras de Averroes es *In aristotelis opera omnes... commentarii*, 10 tomos en 10 vols. Venecia, 1575. Y sobre su lógica: N. Rescher, *The development of arabic logic*. Pittsburgh, 1964.

[72] Ed. de I. M. Bochenski. Marietti, Turín, 1947, y de L. M. de Rijk, Van Gorcum, Assen, 1972.

[73] Ed. de M. Grabmann, Munich, 1937.

[74] Ed. de F. Alessio. La Nuova Italia Editrice, Milán, 1971.

[75] Ch. Thurot, "De la Logique de Pierre d'Espagne", en *Revue archéologique*, 10 (1864), pp. 267-281; V. Rose, "Pseudo-Psellus und Petrus Hispanus", en *Hermes* (Berlín), 2 (1867), pp. 146-147; R. Stapper, "Die *Summulae logicales* des Petrus Hispanus und ihr Verhältnis zu Michael Psellus", en *Festschrift zum elfhundertjährigen Jubiläum des deutschen Campo Santo in Rom* (Freiburg), 1897, pp. 130-138.

[76] En su publicación de la *Synopsis Organi Aristotelis Michaele Psello auctore graeco-latino*, Augsburg, 1597.

[77] [illegible]

Shyreswood fueron compuestas en la primera mitad del s. XIII, probablemente en Oxford donde Guillermo fue primero estudiante y luego maestro, pero evidenciando la influencia de la tradición oxoniense en especial del compendio (de autor anónimo de finales del s. XII), *Logica cum sit nostra*[78]. En torno a 1254 fue tesorero de la catedral de Lincoln; murió entre 1267 (fecha en que lo da aún por vivo R. Bacon) y 1272.

La *Lógica* o *Summa* de Lamberto de Auxerre fue escrita según L. M. de Rijk[79], en Troyes, y no en París como generalmente se venía afirmando, entre 1253 y 1257; y luego fue publicada en París, hacia 1260 cuando aún no estaban allí al uso las *Summulae* de Pedro Hispano.

Por tanto, parece que las semejanzas que presentan estos tres manuales no obedecen a la dependencia de unos respecto de otros, sino a que sus autores se desenvuelven en un contexto cultural y una tradición común, y acometen materias y doctrinas comunes para los lógicos de entonces.

Estos y otros *Tractatus* aún inéditos, según Grabmann[80] presentan acusadas analogías en cuanto a los contenidos e incluso en cuanto al orden de su exposición, fruto de una tradición que se había venido fraguando en las escuelas de dialéctica, en particular en la Universidad de París.

Respecto de los contenidos, se inaugura frente a la *logica vetus* la teoría de las *proprietates terminorum* o *Parva logicalia*, se prosigue el análisis de los *syncategoremata* iniciado por Abelardo, se acentúa el carácter sintáctico de la silogística, y se usa y abusa de las fórmulas mnemotécnicas y esquemas.

Estos contenidos venían distribuidos en dos grandes grupos. El primero comprende los siguientes temas: 1) las *Introductiones* (o *de propositionibus*), la materia del *Peri hermeneias* y los comentarios de Boecio al respecto; 2) tratado *de predicabilibus*, la materia de la *Isagogé* de Porfirio junto con el comentario de Boecio; 3) tratado de *praedicamentis*, las *Categorías* de Aristóteles. El segundo grupo comprende: 1) tratado *de syllogismo*, dividido, a su vez, en *de syllogismo* y *de syllogismo dialectico*, la materia de los *Primeros* y *Segundos Analíticos;* 2) tratado *de locis dialecticis* (la materia de los *Topicos)* y de las *fallaciae* o *de locis sophisticis* (la materia de los *Argumentos sofísticos).*

Algunas variaciones de ordenamiento eran: 1) el tratado de las *Categorías*: algunos, como Guillermo de Shyreswood, lo omiten, y otros lo ponen como último tratado; y 2) el tratado de *proprietatibus terminorum*: a veces viene interpolado en varios lugares, y otras veces, las más, viene al final, como un tratado semi-independiente del resto de la lógica y en tal caso, como así sucede en las *Summulae* de de Pedro Hispano, lleva el nombre de *Parva logicalia.*

Finalmente, frente a la *logica vetus*, que, de los tratados del *Organon*, concede la mayor importancia a las *Categorías* por ser el tratado que mejor ofrece el lazo de unión entre lógica y metafísica, la *logica nova* se caracteriza por su desvinculación de la metafísica y por ser una lógica formal y "sermocinalis" y, en cuanto tal, una ciencia autónoma. El *Peri hermeneias* desbanca del primer puesto (de tratamiento y de importancia, por tanto) a las *Categorías.* Y ello porque aquel tratado confirma y realza la autonomía de la lógica. A los lógicos de la *via nova* les interesa, ante todo, como a Aristóteles en el *Peri hermeneias*[81], desembarazarse de las cuestiones metafísicas o psicológicas y llevar a cabo un tratamiento puramente sintáctico-formal de la lógica. Se interesan, pues, en primer lugar, por definir los caracteres y los elementos del discurso lógico: la *vox significativa ad placitum*, la *oratio*, la *propositio* y los componentes de ésta última: *nomen et verbum.* De ahí que el tratamiento de los términos simples *(incomplexi)*, el "nombre" y el "verbo", sigue al de la proposición, porque constituyen meros términos (elementos) que adquieren valor cuando funcionan en una estructura, en la proposición.

Sinopsis de la silogística

Estos manuales cumplían su función de tales para la enseñanza escolar, ya que la Lógica era una de las materias del *trivium*. Los maestros procuraron trasmitir la lógica "clásica" (aristotélica) de manera pedagógica, utilizando técnicas apropiadas: de terminología, de exposición, de abreviación, de retención, etc.

Descartada la tesis de Prantl que busca el origen de nuestros manuales del siglo XIII en la Σύνοψις atribuida al lógico bizantino (del siglo XI) Miguel Psellus, lo más probable es que el uso de las palabras y versos mnenotécnicos fuera introducido paulatinamente en las escuelas de occidente y que Pedro Hispano y Guillermo de Shyreswood no hayan hecho más que recogerlos y ordenarlos en sus manuales.

---

[78] Editada por L. M. de Rijk, *Logica modernorum*, vol. II, *ed. cit.*, pp. 413-451.
[79] L. M. de Rijk, "A note on the date of Lamben of Auxerre's *Summulae* en", *Vivarium*, 7 (1969), pp. 160-62.
[80] *Bearbeitungen und Auslegungen...*, ed. cit., p. 7.
[81] *Peri hermeneias* I, 16 a, 9.

Las cuatro primeras vocales designan las cuatro especies de proposiciones y para que queden grabadas en la memoria con la significación de cada especie se inventaron estos versos:

Asserit A, negat E, verum generaliter ambo

Asserit I, negat O, sed particulariter ambo

Ante una proposición, dice P. Hispano, se presentan tres cuestiones: *quae?, qualis?, quanta?* A la primera cuestión *quae?* = ¿de qué especie es?, cabe responder: *cathegorica* o *hypothetica*, a la segunda, *qualis?* = ¿de qué cualidad es?, cabe responder: *negativa* o *affirmativa;* y a la tercera, *quanta?* = ¿de qué cantidad es?, cabe responder: *universalis, particularis, indefinita o singularis.*

De aquí el verso siguiente[82]:

Quae ca vel hyppo, qualis ne vel aff, u quanta par in sin.

A partir del sentido conferido a las vocales A, E, I, O, las reglas de la conversión se resumen en los versos siguientes:

Simpliciter fEcI convertitur, EvA per accid,

AstO per contra, sic fit conversio tota.

La teoría de la modalidad es resumida en las cuatro palabras: *purpurea, iliace, amabimus, edentuli*, y en el verso siguiente que da la clave:

E dictum negat, Ique modum, nihil A, sed U totum

La interpretación es: Hay cuatro modos: 1º) posible, 2º) contingente, 3º) imposible 4º) necesario. Cada una de las cuatro palabras supraescritas tiene cuatro sílabas que responden a los cuatro modos en el orden enumerado, y en cada sílaba va una vocal de las del verso con el significado en él expresado. Así la palabra *Purpurea* lleva, en este orden:

1ª) U: niega todo [el primer modo (posible) y el *dictum]:*
"non possible est non esse"

2ª) U: niega todo [el segundo modo (contingente) y el dictum]:
"non contingens est non esse"

3ª) E: niega el dictum (y corresponde al tercer modo: imposible)
"impossibile est non esse"

4ª) A: no niega nada (y corresponde al cuarto modo: necesario):
"necesse est esse"

Comparadas con los tipos de proposiciones categóricas, *purpurea* corresponde a A; *iliace* a E; *amabimus* a I; *edentuli* a O; y sobre esta base cabe aplicar a las modales las reglas de la oposición, como hace Pedro Hispano[83].

En el apartado sobre los silogismos tenemos que las cuatro letras A, E, I, O, pueden combinarse de tres en tres [los tres tipos de proposiciones (dos premisas y una conclusión) que pueden entrar en un silogismo], de modo que tendremos $4^3 = 64$ modos silogísticos, que por cuatro figuras dan lugar a 256 modos silogísticos posibles. De estos sólo unos pocos son concluyentes: aquellos que se atienen a las reglas generales del silogismo, que quedaron recogidas en los siguientes versos mnemotécnicos:

Terminus esto triplex, medius maiorque menorque;
Latius hos (terminos) quam praemissae conclusio non vult;
Nequaquam medium capiat conclusio fas est;
Aut semel aut iterum medius generaliter esto;
Nil sequitur geminis e particularibus unquam;
Utraque si praemissa negat, nil inde sequetur;
Ambae affirmantes nequeunt generare negantem;
Peiorem sequitur semper conclusio partem;

Las 4 distintas figuras, según el lugar (sujeto o predicado) que ocupa el término medio, vienen recordadas en el verso siguiente:

Sub prae 1, tum prae prae 2; tum sub sub 3; denique prae sub 4.

Los versos más célebres son los que simbolizan los modos silogísticos válidos de las tres figuras (y los indirectos) o las cuatro figuras, e indicando, además, la manera de reducir los modos imperfectos a los modos perfectos (los de la primera figura). Pedro Hispano los presenta en la primera forma[84]:

Barbara Celarent Darii Ferio-Baralipton
Celantes Dabitis Fapesmo Frisesomorum,
Cesare Camestres Festino Baroco; Darapti
Felapton Disamis Datisi Bocardo Ferison.

y, posteriormente, cuando se reconoció la 4ª figura como independiente de la primera, se suprimieron las palabras correspondientes a los modos indirectos de la 1ª figura y se añadieron como correspondientes a los modos de la 4ª figura éstas:

Bramantip Camenes Dimaris Fesapo Fresison.

---

[82] Pedro Hispano, *Summulae*, ed. cit., p. 5.
[83] *Summulae*, ed. cit., p. 16.
[84] *Summulae*, ed. cit., p. 52.

En estas palabras artificiales, las 3 primeras vocales indican los 3 tipos de proposición que entran en el modo silogístico; la consonante inicial indica a qué modo de la primera figura (al que empiece por la misma consonante) puede reducirse el modo considerado. Y otras consonantes, de las que aparecen en tales palabras y tienen significación, son: S, P, M, C; S indica conversión simple de la vocal que le precede; P, conversión *per accidens;* M, trasposición de premisas; y C, reducción *ad impossibile*. Todo lo cual se recoge en los dos versos siguientes:

S vult simpliciter verti, P vero per accid.
M vult transponi; C per impossibile duci.

Cuando toda esta terminología escolástica pasó de técnica pedagógica a núcleo de la lógica, especialmente en los siglos XV y XVI, atrajo sobre sí un juicio desfavorable.

Los *Parva Logicalia*

En todos los grandes manuales del siglo XIII aparecen ya perfectamente delimitados y como abarcando un grupo de problemas no tratados por la *logica vetus* ni tampoco (o sólo superficialmente) por Aristóteles. De ello eran, además, conscientes los lógicos de la *via nova*, por lo que les aplicaron el nombre de *Parva Logicalia*, esto es, "pequeñas obras de lógica", en cuanto materias independientes y nuevas respecto de la *logica vetus* o aristotélica. Por lo mismo, también recibieron estos nuevos capítulos, el nombre de *Ars nova*. Así lo hace constar Juan Faber de Werdea, en sus comentarios a Pedro Hispano:

> "Logica nova... docet principaliter de tota argumentatione et habet quatuor libros... logica vetus egit de partibus argumentorum et habet duos libros apud Aristotelem (i. e. *Cat.* et *De Interpr.*)...; de proprietatibus autem terminorum, sc. suppositione, ampliatione, apellatione, restrictione, alienatione, Aristoteles speciales libros non edidit, sed alii autores utiles tractatus ediderunt ex his, quae sparsim philosophus in suis libris posuerat; et ista sic edita dicuntur Parva logicalia eo quod a minoribus autoribus respectu Aristotelis sunt edita..."[85].

A veces también[86] los *Parva logicalia* incluían, además de las *Proprietates terminorum*, los *syncategoremata, consequentiae, insolubilia*, etc. En cualquier caso, constituían pequeños *tractatus* (en relación con los "grandes" o "principales" tratados de Aristóteles) de la lógica.

2.1. Las *proprietates terminorum*

El origen de esta teoría parece que aún no ha quedado bien delimitado, suele situarse en la 2ª mitad del siglo XII, y partiendo de los trabajos de Abelardo, si bien aparecen algunos elementos de esta teoría, como la *suppositio* y la *appellatio* en las *Institutiones Grammaticae* de Prisciano[87]. En las *Introductiones* de Guillermo de Shyreswood aparecen de manera bien diferenciada las cuatro propiedades que poseen los términos en cuanto elementos de la proposición: *significatio, suppositio, copulatio* y *appellatio*:

> "Quatuor sunt proprietates termini, quas ad praesens intendimus diversificare; harum enim cognitio volebit ad cognitionem termini et sic ad cognitionem enuntiationis et propositionis. Et sunt hae proprietates: significatio, suppositio, copulatio, appellatio"[88].

El estudio de estas cuatro propiedades constituirá la materia de la semántica terminística, rival de la gramática especulativa de averroístas y escotistas.

La *significatio*

Todo término que funciona como tal en una proposición posee una *significatio*, que para los realistas es una forma (en el sentido de idea, ἔιδος); así la define Guillermo de Shyreswood:"Est igitur significatio praesentatio alicuius formae ad intellectum"[89]; y para los de la tendencia psicologista, como Pedro Hispano, es una representación de la cosa: "significatio termini, prout hic sumitur, est rei per vocem secundum placitum repraesentatio"[90].

La concepción "realista" de la significación venía siendo apoyada por la teoría de Abelardo del *status* como entidad de la significación. El entendimiento de

---

[85] J. Faber de Werdea, *Exercitata parvorum logicalium secundum via modernorum*. Reutlingen, 1487, citado por Prantl, *Geschichte*... IV, p. 204 nota 153.
[86] *Confert*, por ej., los fragmentos anónimos, *Copulata tractatuum parvorum logicalium* del siglo XV cit. por Boehner, *Medieval logic*, ed. cit., pp. 16-18.
[87] *Confert*, Ch. Thurot, "De la logica de Pierre d'Espagne" en *Revue archeologique* (1864), p. 277: *Appendice:* "Origine des termes *suppositio, supponere pro, suppositio personalis, confusa*". Y Prantl, *Geschichte*... III, p. 74.
[88] Edic. de Geyer, cit., p. 74
[89] *Ibidem*, p. 74.
[90] *Summulae*, ed. de L. M. de Rijk, cit., p. 79.

la significación en sentido psicologista tuvo su origen en la traducción de Boecio del *Peri hermeneias:* "Ipsa [verba] quidem secundum se dicta nomina sunt et significant aliquid. Constituit enim qui dicit intellectum et qui audit quiescit"[91]. Y también en el mismo Aristóteles cabe rastrear esta interpretación psicologista: Al comienzo del *Peri hermeneias* (I, 16 a, 3-8) distingue Aristóteles cuatro niveles relacionados entre sí: a) la escritura (letras); b) el lenguaje hablado (sonidos vocales); c) las afecciones del alma; y d) las cosas reales. Las letras son símbolos de los sonidos vocales, y éstos lo son de las afecciones del alma, las cuales, a su vez, son imágenes de las cosas reales. Los dos primeros niveles no son los mismos para todos, en tanto que los dos últimos sí lo son. De aquí que la posición más frecuente en la Edad Media era la de que las palabras se refieren directamente a los conceptos y sólo indirectamente a las cosas. Así dice Sto Tomás que "vox significat conceptum intellectus, quo mediante significat rem"[92]. La significación así entendida constituye una relación transitiva: los términos hablados o escritos significan directa y solamente los conceptos y sólo por la transitividad de la significación significan (llegan a) las cosas reales; así lo razona Lamberto de Auxerre: "Sicut enim dicitur quod quidquid est causa causae est causa causatae, sic potest dici suo modo quod quidquid est signum signi est signum significati"[93]. Esta transitividad de la significación queda rota por la concepción también admitida sin discusión por los escolásticos del convencionalismo de los dos primeros niveles: términos hablados y términos escritos.

Los términos (vocales o escritos) quedan, pues, subordinados a los mentales (o conceptuales); son de éstos, de los conceptos, de donde les viene la significación.

Ya en la *Institutiones grammaticae* (II, IV, 15) de Prisciano aparece la división de los términos en dos clases, en: a) categoremáticos *(termini categorematici* o *categoremata,* también llamados *termini significativi* o *significantes),* son aquellos que por sí mismos poseen significacdo: los nombres y los verbos; ya que un nombre y un verbo juntos forman una oración, y b) sincategoremáticos *(termini syncategorematici* o *syncategoremata,* también llamados *termini consignificativi* o *consignificantes),* debido a que sólo adquieren significado unidos a los de la primera clase: las conjunciones y las preposiciones.

Hay, como luego veremos, varias teorías sobre la significación, o no, de los sincategoremáticos. De los categoremáticos se admite, como acabamos de ver, (aunque subordinada a los conceptos) su significación, y también que, en último término, aunque no inmediatamente, significan algo extramental. Pero las controversias siguen al intentar establecer el significado extramental de un término general: los realistas establecerán que es una naturaleza común, el *status* de Abelardo por ej., los nominalistas, por el contrario, defendían que, por ej., el término "hombre" significa los hombres individuales. La cuestión se complica aún más con la introducción de la doctrina de la *suppositio,* que amplía la de la *significatio,* pero que presenta divergencias entre la escuela de Oxford (Guillermo de Shyreswood) y la de París (Pedro Hispano).

La *suppositio*

Los términos "supponere" y "suppositio" no siempre han tomado un significado unívoco. Etimológicamente "sub-ponere" significa "poner algo debajo de algo" o "reemplazar" o "sustituir". De ahí que pasase a expresar la función lógica de que un término "sustituye" o "reemplaza" o "está en lugar de" aquello que significa. La teoría de la *suppositio* de los términos aparece ya bien fijada en los *tractatus* del siglo XIII, pero con divergencias[94]. En la tradición de Oxford (la *Logica cum sit nostra* y las *Introductiones* de G. de Shyreswood) la *suppositio* es una propiedad de los términos -sujeto o predicado- en tanto que aparecen en la proposición, y en tanto que aparecen en un contexto *(suppositio habitualis),* y el rango de la *suppositio* coincide con el de la *appellatio:* las cosas presentes. En la tradición de París (Pedro Hispano) la *suppositio* es una propiedad de los términos tomados por sí mismos. Un término, por ej. "homo" tiene de por sí *(per se sumptus)* una *suppositio naturalis:* "supponit pro omnibus hominibus qui fuerunt, et qui sunt et qui erunt"[95], quedando la *appellatio* como un caso particular de la *suppositio* (cuando ésta queda restringida *(restrictio)* por un verbo en un tiempo presente).

La *suppositio* según Pedro Hispano

Definición

> "Suppositio vero est acceptio termini substantivi pro aliquo"[96]

---

[91] Commentarii in librum Aristotelis *Peri hermeneies,* ed. Carl Meiser, 1877, cit., p. 5.
[92] *De potentia,* 5, p. 1.
[93] *Lógica,* ed. de F. Alessio, cit., p. 205.
[94] Véase L. M. de Rijk, "the development of suppositio naturalis in medieval logic", en *Vivarium,* 9 (1971), pp. 71-107.
[95] *Summulae,* ed. cit., p. 81.
[96] *Ibidem,* p. 80.

Clases

A) *Suppositio discreta:* Aquella que se hace por medio de un término discreto, como "Sócrates" o "este hombre". Así, en una proposición singular como "Sócrates es justo" el término "Sócrates", que oficia de sujeto, posee una *suppositio discreta.*

B) *Suppositio communis:* en cuanto opuesta a discreta o singular, es la que se hace por medio de un término común, como "hombre". Esta se divide en: *naturalis* y *accidentalis:*

I) La *Suppositio naturalis* viene definida así: "est acceptio termini communis pro omnibus a quibus aptus natus est participari (praedicari), ut "homo" per se sumptus de natura sua supponit pro omnibus hominibus qui fuerunt et qui sunt et qui erunt"[97]. La *suppositio naturalis* no aca-e-ce, pues, sólo en la proposición, sino que, con independencia de que entre o no en la proposición, el término común tiene capacidad natural de suposición, al usarlo como palabra que significa algo (de aquí la conexión de la *suppositio* con la *significatio).*

II) La *Suppositio accidentalis.* Esa capacidad natural que los términos poseen en virtud de su significación puede quedar limitada por el contexto de la proposición, por ej., "homo" en "homo fuit", o por la adición de otro término, por ej. "homo" en "homo albus", y en esos casos la suposición es "accidental". La suposición "accidental" se divide en:

a) *Suppositio simplex,* cuando un témino común es tomado por una cosa universal por él significada. Por ej., en "homo est species" o en "animal est genus", el término "homo" es tomado por el hombre en general, (supponit pro homine in communi) y no por algún hombre individual *(non pro aliquo inferiorum).* Esta suposición "simple" puede serlo:

a_1) Del sujeto: cuando el sujeto es tomado por (está en lugar de) alguna naturaleza común, no por individuos. Por ej., "homo", en "homo est species".

a_2) Del predicado, en las proposiciones universales afirmativas. Por ej., en "omnis homo est animal", el predicado "Animal" tiene una suposición simple porque es tomado por solo la naturaleza del género, no por los inferiores (del género), ya que de ser tomado en este último sentido, cabría inferir "omnis homo est iste animal" lo cual es falso.

a_3) Del término común puesto después de una exceptuación, por ej., "homo", en la frase "omne animal praeter hominem est irrationale". En efecto, "homo" es aquí tomado *(supponit)* por el hombre en general y no por los hombres individuales (por los inferiores de la especie "hombre"); "homo" posee, pues, una suposición simple; de ahí que no quepa inferir hacia los inferiores. De "omne animal praeter hominem est irrationale" no se sigue "omne animal praeter hunc hominem."

b) *Suppositio personalis:* cuando un término común es tomado por sus inferiores. Por ej., cuando se dice "homo currit", el término "homo" "supponit pro suis inferioribus, scilicet pro Socrate et Platone". La suposición "personal" puede ser "determinada" o "confusa":

b_1) *Suppositio determinata:* es la que posee un término común tomado de manera indefinida, o con el signo de particularización, como sucede con "homo" en "homo currit" o en "aliquis homo currit". Aquí el término "homo" es tomado por uno de sus inferiores (es, por ello, personal), y es determinada porque un solo hombre está corriendo. El término "homo" hace verdaderas las proposiciones anteriores solamente cuando es tomado por un solo hombre que está corriendo.

b_2) *Suppositio confusa* es la acepción de un término común por muchos mediante un signo de universalidad, como cuando se dice "omnis homo est animal"; el término "homo" afectado por el signo de universalidad es tomado por cada uno de los individuos que significa.

La *suppositio confusa* puede serlo:

1) *Pro necessitate signi vel modi.* Así, cuando se dice "omnis homo est animal", el término "homo", debido al signo de universalidad, se confunde con cada uno de sus inferiores.

2) *Pro necessitate rei:* En la proposición anterior: "omnis homo est animal", el término

[97] *Ibidem,* p. 81.

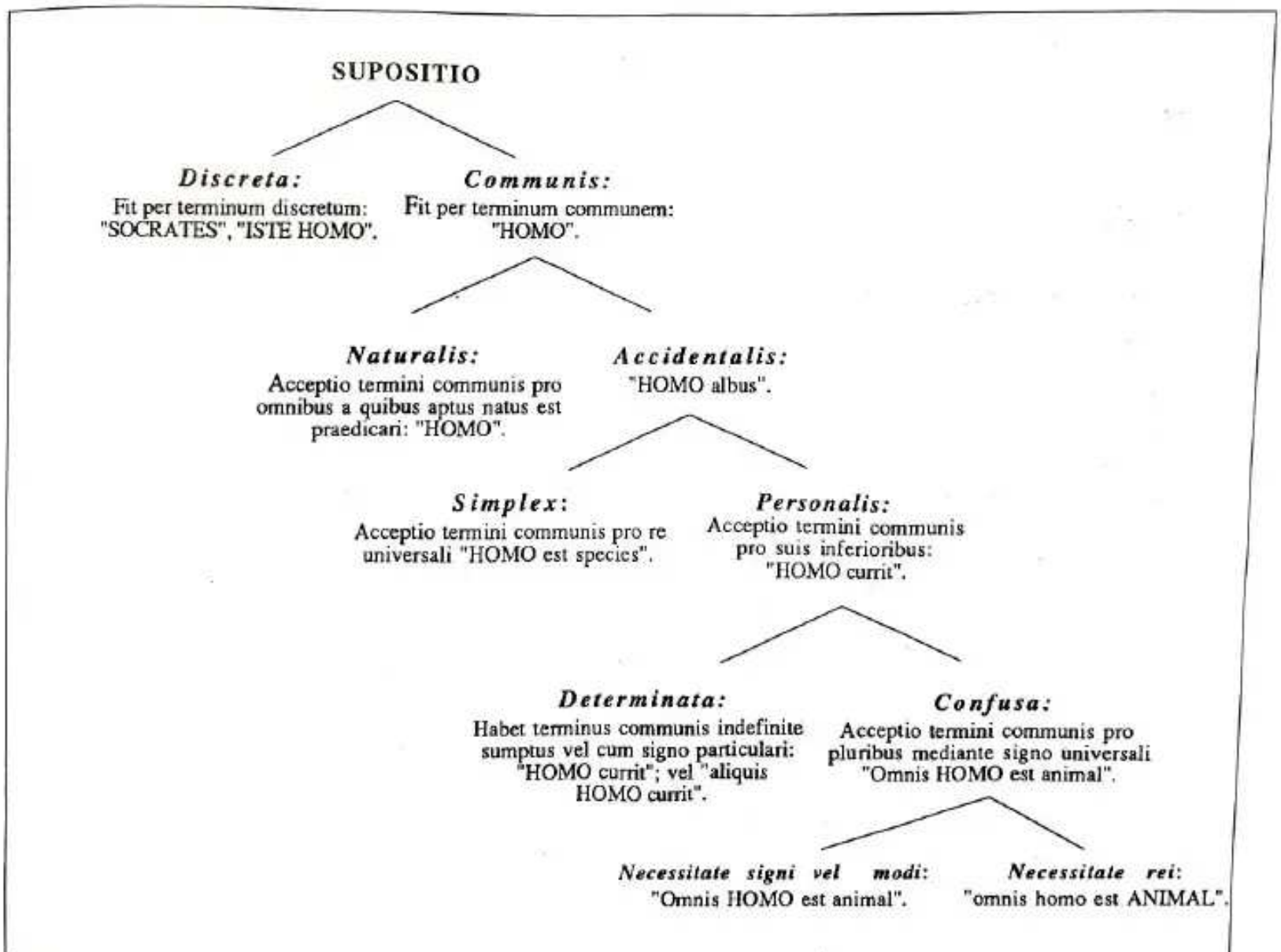
"homo", debido al verbo "est", es tomado *necessitate rei* por tantas esencias por cuantos hombres es tomado "homo". Y respecto del predicado, dado que cada hombre lleva inherente su animalidad, tenemos que "animal", *pro necessitate rei*, es tomado por tantos animales por cuantos hombres es tomado "homo" y por cuantas esencias es tomado el verbo "est".

Según esta última división, dada una proposición universal afirmativa, como por ej., "omnis homo est animal", se dice que el término sujeto ("homo") *supponit confuse mobiliter et distributive*, porque es tomado por todos los individuos por él significados y, por lo tanto, es "movilizado". La cópula "est" y el término predicado ("animal"), sin embargo, significan respectivamente, las "esencias" y las naturalezas contenidas en cada uno de los individuos significados por el sujeto; en este caso el término "animal" es tomado *confuse sed inmobiliter*, porque no cabe hacer el descenso hacia sus inferiores: no cabe pasar de "omnis homo est animal" a "omnis homo est hoc animal". Al hacer esto pasamos de la suposición simple a la personal. En conclusión: P. Hispano asigna al "est" y al predicado *suppositio simplex* y no *suppositio confusa*.

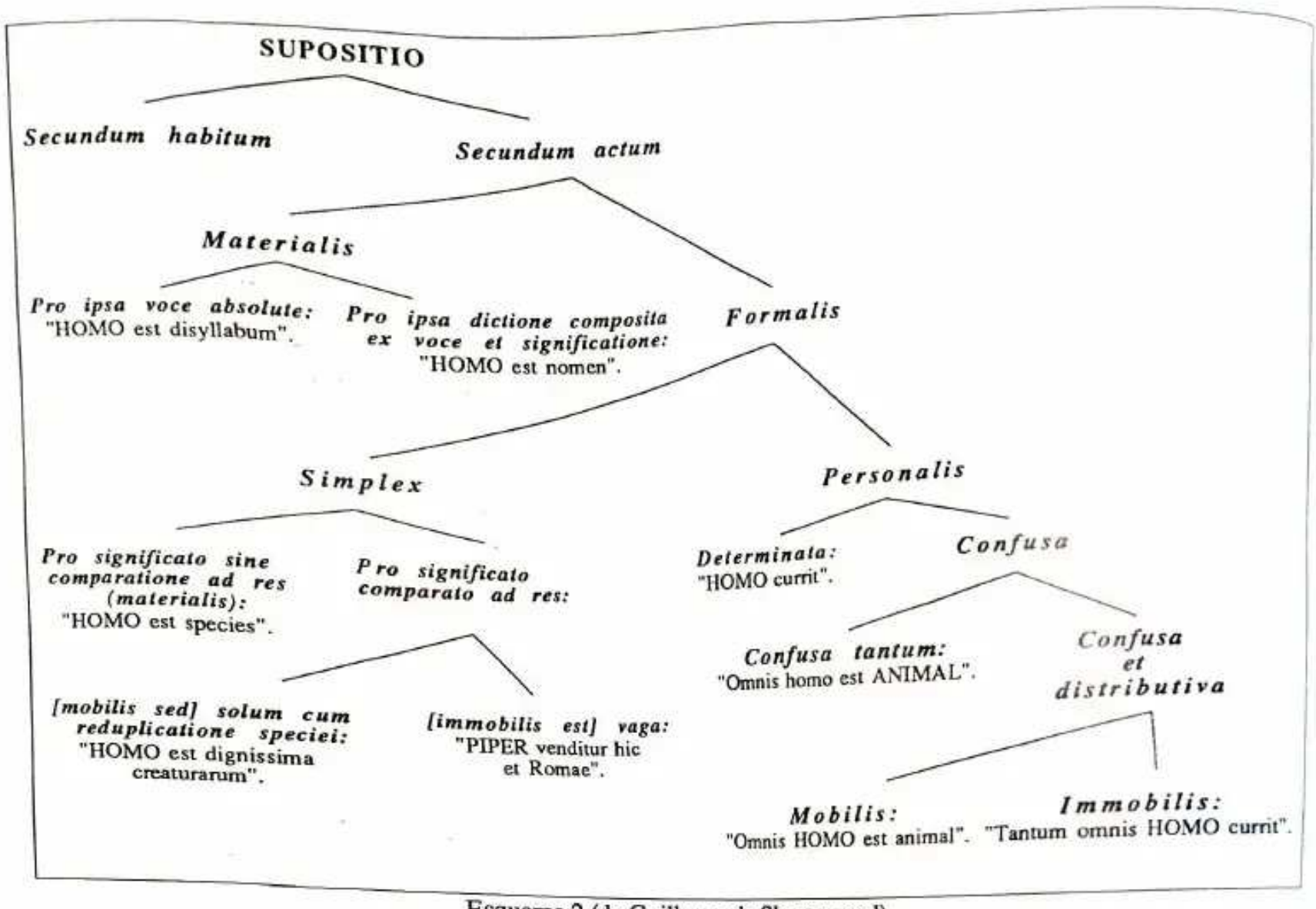
Los esquemas 1, 2 y 3 representan las anteriores distinciones (figurando con mayúsculas el término supuesto).

La *suppositio* es la *proprietas terminorum* más importante, y de las teorías sobre ella depende la teoría sobre las otras *proprietates terminorum: Significatio, copulatio, appellatio, restrictio* y *ampliatio*.

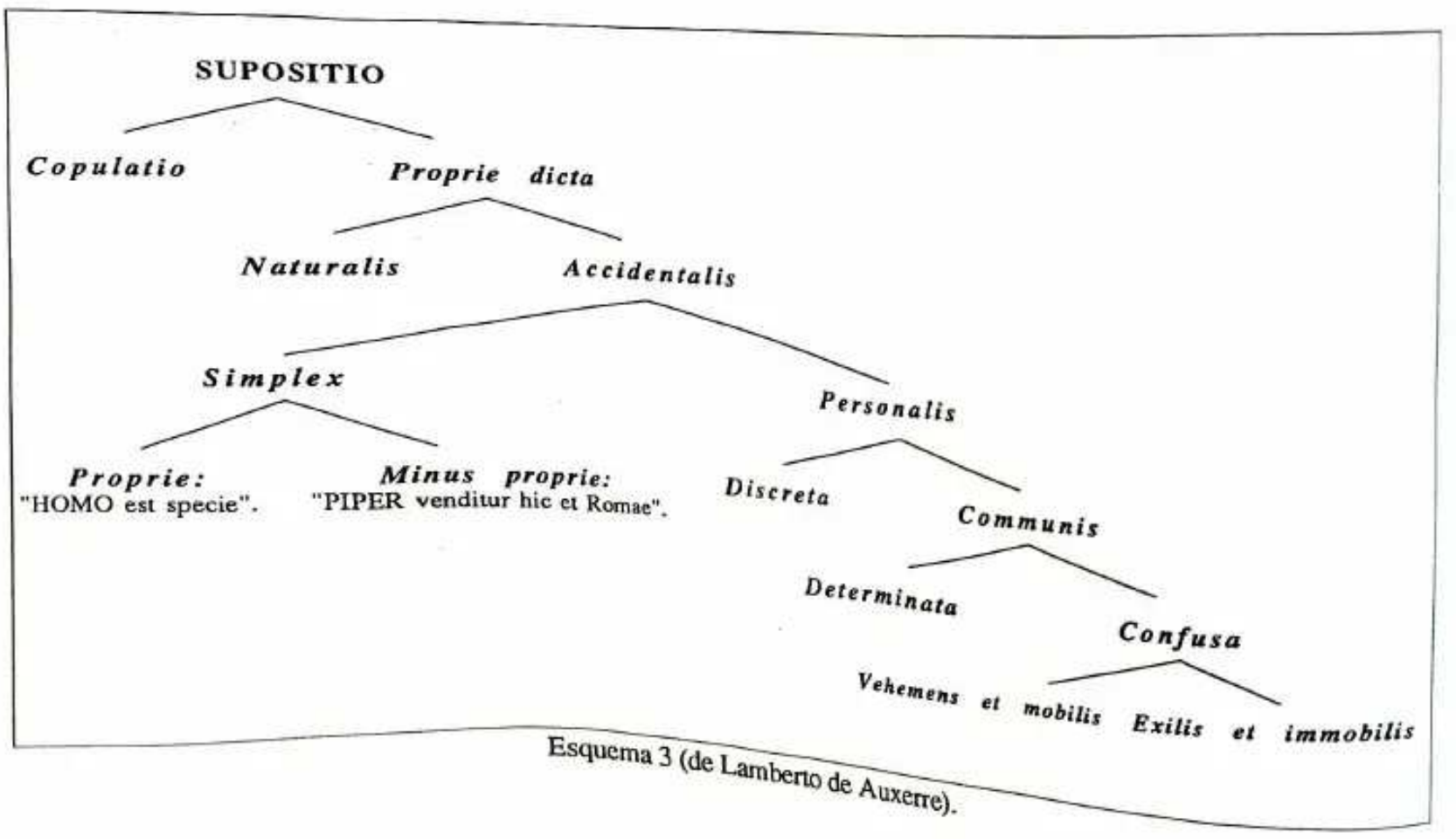
En la tradición parisiense (Pedro Hispano) la noción fundamental de partida es la *suppositio naturalis*. Esta es la capacidad natural de una palabra significativa. La *suppositio* queda referida, pues, en primer lugar, a la *significatio*, siendo ésta para Pedro Hispano, la representación convencional de una *res* por medio de una *vox;* siendo la *res*, bien una naturaleza universal bien cualquier individuo que participa de dicha naturaleza universal; la significación cubre, pues, tanto la connotación (de una naturaleza universal) como la denotación (de los individuos que participan de esa naturaleza universal). *Suppositio* y *significatio* son diferentes: la *significatio* consiste en hacer (convencio-



Esquema 1 (de Pedro Hispano).



Esquema 2 (de Guillermo de Shyreswood).



Esquema 3 (de Lamberto de Auxerre).

nalmente) que una palabra signifique una *res;* la *suppositio* es el *uso* de una palabra que significa algo; la significación es propia de la voz; la suposición lo es del término en cuanto compuesto de voz y significación. Una palabra, en cuanto que posee significación, deviene capaz de "suponer" (ser tomada) por todo aquello de lo que se puede predicar, y a esa capacidad natural de la suposición llama Pedro Hispano *suppositio naturalis.*

La *copulatio*

La *significatio* es, pues, anterior a la *suppositio*, y también a las otras propiedades de los términos. Así, la significación de una *res*, puede serlo:

a) *sustantive:* tiene lugar mediante un nombre sustantivo, como "homo"; y éstos tienen la propiedad *suppositio.*

b) *adiective:* tiene lugar mediante un adjetivo o verbo, como "albus" o "currit". Y éstos tienen la propiedad *copulatio.*

Sustantivos y adjetivos son, no significaciones, sino "modi rerum quae significantur"; esto es, que un nombre sea sustantivo o adjetivo depende del modo de ser de la cosa significada. Si una realidad es *adiacens* a otra, su *modus* tiene lugar mediante un adjetivo. Sustantivos, por un lado, y adjetivos (y verbos) por otro, tienen, según esto, un comportamiento distinto pero correspondiente: "Nomina vero substantiva dicuntur *supponere*, nomina vero adiectiva et etiam verba dicuntur *copulare*". Y la *"copulatio* est termini adiectivi acceptio pro aliquo"[98].

La *appellatio*

Otra propiedad de los términos relacionada directamente con la *suppositio* es la *appellatio*. La diferencia que comúnmente (Lamberto de Auxerre y Pedro Hispano) se establece entre la *suppositio* y la *appellatio* es ésta: la *suppositio*, como también la *significatio*, concierne tanto a las cosas existentes como a las inexistentes. *"Appellatio* -dice Pedro Hispano-[99] est acceptio termini *pro re existente".* La *appellatio* exige la existencia actual de la cosa *appellata*[100] . De ahí que Pedro Hispano atribuye *appellatio* no sólo a los nombres comunes, sino también a los nombres propios, cuando designan a una realidad existente: "Appellationum autem alia est termini communis,ut "hominis", alia termini singularis, ut "Socratis". Terminus singularis idem significat et supponit et appellat, quia significat rem existentem, ut 'Petrus' vel 'Johannes'"[101].

La *appellatio* de los términos singulares coincide con su *significatio* y con su *suppositio*. Con respecto a la de los términos comunes hay que distinguir:

a) Si el término común posee *suppositio simplex*, esto es, si es tomado *(supponit)* por la esencia común de una cosa, como por ej., "homo", en "homo est species", entonces el término en cuestión "idem significat, supponit et appellat, ut "homo" significat et supponit et appellat[102].

b) Si el término común posee *suppositio personalis*, esto es, si el término es tomado *(supponit)* por sus inferiores, como, por ej., "homo", en "homo currit", entonces el término "homo" "non idem significat et supponit et appellat, sed significat *hominem* in communi et supponit pro particularibus et appellat particulares homines existentes"[103].

La *restrictio* y la *ampliatio*

Constituyen dos modos complementarios de variar la *suppositio personalis* de un término. Es decir la *suppositio* del término que aparece contextualizado en la proposición (y que es tomado por sus inferiores) puede ser restringida o ampliada, y de ahí tenemos la *restrictio* y la *ampliatio.*

La *restrictio* "est coarctatio termini communis a maiore suppositione ad minorem, ut cum dicitur 'homo albus currit', hoc adiectivum 'albus' restringit 'hominem' ad supponendum pro albis"[104].

---

[98] *Summulae logicales,* ed. cit., p. 80.

[99] *Ibidem,* p. 197; y Lamberto de Auxerre la define como "acceptio termini pro supposito vel suppositis actu existentibus" (*Apud* Prantl, *Geschichte,* ed. cit., III, p. 31.

[100] Y sigue insistiendo *(ibidem,* p. 197) P. Hispano: "Dico autem pro re existente, quia terminus significans non ens nihil appellat, ut "Caesar" vel "antichristus" et "chimera", et sic de aliis.Differt autem appellatio a suppositione et significatione, quia appellatio est tantum de re existente, sed suppositio et significatio sunt tam de re existente quam non existente, ut "Antchristus" significat *Antichristum* et supponit por Antichristo, sed non appellat, "homo" autem significat *hominem* et supponit de natura sua tam pro hominibus existentibus quam non existentibus et appellat tantum homines existentes".

[101] *Ibidem,* p. 197.

[102] *Ibidem,* p. 197-98.

[103] *Ibidem,* p. 198

[104] *Ibidem*, p. 194.

La *ampliatio* "est extensio termini communis a minore suppositione ad maiorem, ut cum dicitur 'homo potest esse Antichristum', iste terminus'homo' non solum supponit pro eis qui sunt, sed etiam pro eis qui erunt. Unde ampliatur ad futuros[105].

La *ampliatio* puede hacerse:

a) mediante una forma verbal, como por ej., "potest" en "homo potest esse Antichristus".

b) mediante una forma nominal, como por ej., "possibile" en "hominem esse Antichristus est possibile".

c) mediante una forma participial como por ej., "potens" en "homo est potens esse Antichristus"

d) mediante una forma adverbial, como por ej., "necessario" en "homo necessario est animal".

En todos estos casos el término "homo" "supponit non solum pro praesentibus sed etiam ampliatur ad omnes qui erunt". Y de aquí se sigue otra división de la *ampliatio*, según ésta sea: a) *respectu suppositorum:* cuando el término-sujeto *(supponens)* o predicado *(apponens)*- es tomado por todos sus *supposita*. Por ej., en "homo potest esse Antichristus", el término "homo" es tomado por todos aquellos que caen *sub forma* indicada por el término ("id quod est vel potest esse homo"). b) *respectu temporis:* cuando el término -sujeto *(supponens)* o predicado *(apponens)* respecto de una *dictio* ampliativa- es ampliado para ser tomado por todo aquello que en todo tiempo es denotado por él. Por ej., en "homo necessario est animal", tanto "homo" como "animal" son tomados "pro his qui sunt et qui semper erunt".

También la *restrictio* puede hacerse de varias maneras:

a) *per nomen* o *per adiectivum accidentis:* De ambos casos ofrece Pedro Hispano el mismo ejemplo: "homo albus". En el primer caso el nombre "homo" limita al término "albus", porque no todo lo que es blanco es hombre; en el segundo caso el *adjetivo* "albus"limita al término "homo", puesto que no todos los hombres son blancos.

b) *per verbum*, como cuando se dice "homo currit". Aquí el verbo en tiempo presente restringe la *suppositio* del término "homo", el cual es tomado sólo *pro praesentibus*.

c) *per pariticipium*, como cuando se dice "homo currens disputat". El término "homo" es tomado sólo *pro currentibus*.

d) *per implicationem*, como cuando se dice "homo qui est albus currit". El "qui est albus" restringe "homo" a los blancos.

e) *per inferius appositum superiori*, como cuando se dice "animal-homo". El término "animal" es tomado sólo por los animales que son hombres.

f) *per differentiam*, como cuando se dice "animal rationale", aquí "animal" es tomado sólo por los racionales.

En conclusión y en términos generales, la *restrictio* es efectuada por Pedro Hispano sobre la base de la *suppositio naturalis*, que es omnitemporal. Partiendo de la *suppositio naturalis*, de que un término posee *de se* el poder de referirse a todas las cosas que él abarca, sin considerar si tales cosas son presentes, pasadas o futuras, se establecen restricciones a esa omnitemporal *suppositio*. Así, el verbo en tiempo presente restringe la suppositio del término-sujeto a la de ser tomado por las cosas presentes, la *suppositio* así restringida coincide con (es) la *appellatio*. Y la *ampliatio* queda relegada a la resolución de problemas modales.

En la tradición de Oxford, la doctrina de las *proprietates terminorum* viene organizada de manera un tanto diferente. El punto básico de partida es, asimismo, la doctrina de la *suppositio*. Aquí la división principal -que no aparece en el esquema de Pedro Hispano- es la establecida entre *suppositio materialis* y *suppositio formalis:* "dicitur *materialis* quando ipsa dictio supponit vel pro ipsa voce absolute vel pro ipsa dictione composita ex voce et significatione, ut si dicamus 'homo est disyllabum', 'homo est nomen'. *Formalis* est quando dictio supponit suum significatum"[106]. Esta distinción corresponde a la moderna entre *uso* y *mención* de un término: la *suppositio materialis* toma la palabra, no en su función significativa, sino materialmente como signo de sí mismo o de su sonido; la palabra es mencionada. Y la manera en que así es tomada suele ser indicada mediante el entrecomillado (mencionándola). Así, cabe decir que "hombre" es bisílabo. En cambio, un término posee *suppositio formalis* cuando es tomado (usado) por los objetos que tiene por función designar.

Otra característica diferenciadora de la escuela de Oxford es que las propiedades de los términos lo son de estos en cuanto insertos (contextualizados) en la proposición. De aquí proviene la distinción de G. Shyreswood *suppositio secundum actum* y *suppositio secundum habitum*.

[105] *Ibidem*.
[106] G. Shyreswood, *Introductiones*... ed. cit., p. 75.

La *suppositio habitualis* es la propia del término en cuanto tal (correspondiente a la *suppositio naturalis* de Pedro Hispano). De ella escribe G. de Shyreswood: "secundum autem quod est in habitu dicitur suppositio significatio alicuius ut subsistentis. Quod enim tale est, natum est ordinari sub alio"[107].

La *suppositio actualis* es "ordinatio alicuius intellectus sub alio"[108].

Los términos pueden ser usados en las proposiciones como sujetos o como predicados: un término puede naturalmente oficiar de sujeto en una proposición; de por sí posee *suppositio habitualis;* y en cuanto usado en una proposición queda actualmente "ordenado" con respecto a un predicado y posee, así, *suppositio actualis*. El término-predicado, sin embargo sólo posee *suppositio habitualis* y el rango de ella coincide con la *appellatio:*

> "Et sciendum, quod ex parte subiecti supponit [terminus] secundum utramque deffinitionem suppositionis [habitualis et actualis], ex parte autem praedicati supponit secundum habitualem suam deffinitionem. Sciendum etiam quod terminus ex parte subiecti appellat suas res, sed non secundum quod est subiectum. Ex parte autem praedicati appellat. Secundum autem quod praedicatum, comparatur ad subiectum suum per aliquam suarum rerum et secundum hoc appellat"[109].

La *appellatio* es, como la *suppositio habitualis*, propiedad del término en cuanto tal: el sujeto *appellat* en virtud de su ineludible *suppositio habitualis* (aunque posea también *suppositio actualis)* y el predicado *appellat* en cuanto que posee sólo *suppositio habitualis*. La appellatio es, pues, consecuencia de la *suppositio habitualis*, pero habida cuenta de que la *suppositio*, para G. de Shyreswood, no es, como para Pedro Hispano, omnitemporal: el término, *de se*, es tomado por las cosas presentes:

> "Et dico, quod ille terminus 'homo' supponit pro praesentibus de se, quia significat formam in comparatione ad suas res. Haec autem comparatio tantum salvatur in existentibus. Solum enim est suum significatum forma existentium et proprie pro hiis supponit de se"[110].

De aquí que la *appellatio* venga determinada como la predicabilidad del nombre en una proposición con el verbo en tiempo presente:

> "Appellatio autem est praesens convenientia termini, i. e., proprietas, secundum quam significatum termini potest dici de aliquo mediante hoc verbo: est"[111].

Y, así, si un término sustantivo aparece como sujeto en una proposición con verbo en tiempo presente, entonces ese término *supponit* y *appellat* "pro praesentibus tantum". Y cuando un término sustantivo aparece como predicado -puesto que el predicado significa una forma que es inherente a la sustancia del sujeto-, entonces dicho término-predicado designa sólo una forma y *appellat* en cuanto que está actualmente ordenado al sujeto a través de la(s) cosa(s) subsistente(s) *(substantia):*

> "Omne enim nomen significat solam formam et non absolute, sed in quantum informat substantiam defferentem ipsam et sic aliquo modo dat intelligere substantiam. Nomen ergo in praedicato dat intelligere formam, dico, ut est formam substantiae subiecti"[112].

En conclusión, en la tradición de Oxford, la *appellatio* no es, como en la tradición de París, una *suppositio restricta*, sino la propiedad natural de los términos que poseen *suppositio habitualis*.

2. 2. Los *syncategoremata*[113]

El origen del término "syncategoremata" es el siguiente pasaje de las *Institutiones Grammaticae* de Prisciano[114]:

> "Partes igitur orationes sunt secundum dialecticos duae, nomen et verbum, quia hae solae per se coniunctae plenam faciunt orationem; alias autem partes "syncategoremata", hoc est, consignificantia, appellabant".

En la tradición latina[115] de Prisciano el término "dialécticos" se refiere a los estoicos, considerando a éstos como lógicos y gramáticos a la vez. De ahí que

---

[107] *Introductiones*... ed. cit., p. 74.
[108] *Ibidem*.
[109] *Ibidem*, p. 82.
[110] *Ibidem*, p. 85.
[111] *Ibidem*, p. 74.
[112] *Ibidem*, p. 78.
[113] Está anunciada la publicación en inglés de un trabajo exhaustivo de H. A. G. Braakhuis sobre los *Syncategoremata* en el siglo XIII (*Confert* N. Kretzmann -A. Kenny- J. Pingborg (eds.), *The Cambridge history of later Medieval Philosophy*. Cambridge Univ. Press. 1982, p. 216, nota 19.
[114] Edic. de Martin Hertz vol. 2, Teubner, 1955. Reimpres. Georg Olms, Hildesheim, 1961, p. 54.
[115] Confert, por ej., Cicerón, *Orator*, ed. cit., pág. 45, cap. 32.

aunque Prisciano presenta la distinción (categoremático/syncategoremático) como gramátical, no obstante, como realmente reconocieron los estoicos, es también lógica, y los análisis que de ella llevan a cabo los escolásticos muestran el alto grado de desarrollo del formalismo al que llegaron los lógicos medievales, y que no fueron meros repetidores o comentadores de Aristóteles y sistematizadores de su silogística. El tratamiento de los *syncategoremata* entronca con la tradición estoica, en cuanto distinta de la aristotélica, y en él afloran contribuciones muy finas al desarrollo de la lógica formal entendida ésta en sentido amplio como estudio de la forma o estructura de las proposiciones y de las inferencias.

El análisis que llevan a cabo los lógicos escolásticos de los *Syncategoremata* sobrepasa el puramente gramatical: incluye en tal categoría de términos no sólo conjunciones o preposiciones que en el habla acompañan realmente a los términos gramaticalmente categoremáticos, sino que también son tratados como lógicamente sincategoremáticos otros términos gramaticalmente categoremáticos: tanto adjetivos *(omnis, totus, infinita)* como pronombres *(quidquid, uterque)* o verbos *(incipit, desinit, vult)*. La noción de *syncategorema* como categoría lógica la confeccionaron los lógicos medievales -y así lo reconocían ellos mismos- con lo que Aristóteles dice en el cap. 3 de *De Interpretatione* donde distingue la falta de significación (de categoricidad) de algunas palabras en otro sentido distinto incluso del de la incompleta significación de los verbos: allí aparece la negación como un *syncategorema*, por cuanto que multiplica los términos (definidos-indefinidos) y las proposiciones, por cuanto que por sí misma no significa nada, pero co-significa, esto es, significa unida a otros. En este sentido entienden los lógicos medievales los *syncategoremata:* son términos que por sí mismos no poseen significación, pero la tienen unidos a, y modificando a, otros que poseen significado por sí mismos[116]. A partir de la *Lógica Nova*, la base en la que se asientan, de la que parten, los análisis lógicos es la proposición entendida como la oración latina, y por lo tanto con su peculiar estructura gramatical, que es verdadera o falsa; sus componentes esenciales son el nombre y el verbo, y su estructura la de sujeto-predicado. Hay modificaciones de los nombres y de los verbos que no alteran el valor de la proposición y por lo tanto no resultan pertinentes para la lógica; hay, en cambio, otras que alteran la verdad o la falsedad de la proposición, estos elementos modificativos del valor veritativo de la proposición, que son términos que entran en la proposición y que, por lo demás, no tienen objetos significados por ellos (no tienen referentes) y no pueden, por lo tanto, funcionar como sujeto o predicado de una proposición, son los sincategoremáticos: entran en la proposición como adjuntos, modificando la significación de los nombres o verbos (como componentes de la oración) o del sujeto o predicado (como constituyentes de la proposición) y alterando o dejando oscuro, en consecuencia, el valor veritativo de la proposición. La falta de claridad del valor veritativo de la proposición es debida precisamente a la introducción -explícita o implícitamente- en ella de algún *syncategorema*, lo cual obliga a un análisis, una *expositio*, y de ahí los *Tractatus Exponibilium* y el origen de los *sophismata:*

> "Propositio exponibilis est propositio habens obscurum sensum expositione indigentem propter aliquod syncategorema explicite positum vel in aliqua dictione inclusum"[117].

El interés por el estudio de los *syncategoremata* corre parejo con el conocimiento que con la *Lógica Nova* en el s. XII se desarrolla de los *Tópicos* y *Argumentos Sofísticos* de Aristóteles. El análisis de por qué se producen las falacias conduce necesariamente al estudio y análisis de los *syncategoremata*, y ello obliga a traspasar el análisis de las condiciones formales de la silogística aristotélica: aparecen a veces ciertas palabras en las proposiciones que, sin alterar la estructura formal silogística, rompen con las reglas sobre relaciones y operaciones (transformaciones) de las proposiciones silogísticas, y producen situaciones paradójicas y capciosas (sofísticas). De ello se percataron los primeros lógicos "terminístas":

> "Hoc etiam notandum est quod sunt sophistici termini quibus propositionum impeditur conversio. Tales sunt: "solum", "tantum", "praeter", "nisi". Unde haec propositio non convertitur: "aliquid est unum solum", "aliquid est tantum animal", "aliquid praeter Socratem est homo"[118].

Son estos términos sofísticos los que luego van a tratar sistemáticamente como *syncategoremata* los

---

116 *Confert*, por ej., P. Hispano, *Summulae*... ed. cit., p. 3, cap. 5. Guillermo de Ockam, *Summa Logicae*, ed. Ph. Boehner. 1951, vol. I, cap. 4, pág. 15.

117 En el *Tractatus Exponibilium*, atribuido a Pedro Hispano. Ed. de sus obras en Colonia, 1489. *Apud* Pralt *Geschichte*..., ed. cit., vol. III, p. 67-68.

118 Anónimo, *Ars Emmerana* (S. XII), ed. De Rijk, *Logica Modernorum*, ed. cit., vol. II, 1, p. 157-58.

grandes maestros en el siglo XIII: Pedro Hispano[119], Guillermo de Shyreswood[120], Nicolás de París[121]; en el siglo XIV: Walter Burleigh[122] y Alberto de Sajonia[123] y en el siglo XV: Pablo de Venecia[124] e incluso en el siglo XV Pedro Espinosa[125] y Fernando Encinas[126]. Cada uno de estos maestros ofrece una clasificación de los syncategoremata; por ejemplo, la de Guillermo de Shyreswood[127], y organizada desde categorías actuales, es como sigue:

a- Distribución (o cuantificación): *omnis, totus, infinitus, qualislibet, uterque...*

b- Negación: *non, nihil*

c- Exclusión: *solus, tantum...*

d- Excepción: *praeter, nisi...*

e- Composición (o predicación): *est, incipit, desinit...*

f- Modalidad: *necessario, contingenter...*

g- Condicional: *si, quin....*

h- Conjunción: *et, atque...*

i- Disyunción: *vel, utrum, aut...*

j- Comparación: *quam...*

k- Reduplicación: *inquantum, secundum quod*

Similar clasificación se encuentra en el tratado de Pedro Hispano[128]. Como antes hemos indicado, el significado de los términos sincategoremáticos depende de los términos categoremáticos, a los que modifican, alterando el valor veritativo de la proposición. Y atendiendo a las modificaciones que los sincategoremáticos producen en la estructura de la proposición cabe distinguir, siguiendo a Guillermo de Shyreswood:

I) Sincategoremáticos que afectan al sujeto o al predicado de una proposición causando una *ampliatio* o una *restrictio*, y pudiendo originar *sophismata*. La aclaración de los sofismas da lugar a los *Tractatus exponibilium*.

II) Sincategoremáticos que afectan a (conectan) dos proposiciones: las conectivas o funtores lógicos. El estudio de algunas de ellas dará lugar a la teoría de las *consequentiae*.

Del primer grupo de sincategoremáticos, unos de los más significativos e interesantes para la teoría de la cuantificación son aquellos tales como: *omnis, totus, infinitus,...*, que anexos al sujeto o predicado producen una *ampliatio*, afectando, por tanto, a la distribución del término considerado. Por ejemplo, el *syncategorema Omnis* adjunto a un término afecta a la distribución de éste, pero de manera distinta a como lo hace también *totus*. Y así: "omnis homo" y "totus homo" poseen significados bien diferentes, y también son diferentes las inferencias posibles *per descensus* a partir de una u otra. Veamos, a modo de ejemplo, la doctrina de Pedro Hispano al respecto: En primer lugar, los signos "omnis" y "totus" son sincategoremáticos, puesto que "per se nihil significant". Pero sí significan algo unidos al sujeto de una proposión; alteran su valor veritativo. Así, dada la proposición verdadera "animal est homo", la proposición resultante de añadir "omnis" al sujeto, "omne animal est homo", resulta falsa. De manera que "omnis non significat universale, sed quoniam universale, quia significat terminum communem sumi pro omni, ut 'omnis homo'"[129].

En segundo lugar, los sincategoremáticos "omnis" y "totus" pueden ser tomados:

---

[119] *Textus omnium tractatum Petri Hispani etiam sincathegoreumatum et parvorum logicalium cum copulatis secundum doctrinam divi Thome Aquinatis iuxta processum magistrorum Coloniae in bursa Mantis regentium*. Coloniae, 1489. De esta edición proviene la edición, traducción e introducción de J. P. Mullally y R. Houde, P. Hispanus: *Tractatus Syncategorematum and Selected Anonymous Treatises*. Marquette Univ. Press, 1964. Según N. Kretzmann: "Syncategoremata, exponibilia, sophismata", edición citada, pp. 216 nota y 223 nota, el genuino texto de los *Syncategoremata* de Pedro Hispano sólo podrá establecerse tras la ed. de H. A. G.Braakhuis, *De 13 de eeuwse Tractaten over syncategorematische termen*. Meppel,1979.

[120] *Syncategoremata*. Ed. de J. R. O'Donnell, en *Mediaeval Studies*, 3(1941) pp. 46-93 y *William of Sherwood's Treatise on Syncategorematic Words*. Trad. ingl. con introducción y notas de N. Kretzmann, Univ. of Minnesota Press, 1968.

[121] *Syncategoremata*. Ed. de Braakhuis, vol. II, 1979, cit.

[122] *Sophismata* (c. 1350). Ed. Paris, 1502,

[123] *De puritate artis logicae tractatus longior* (c. 1320). Ed. de P. Boehner, 1955, Parte I.

[124] *Sophismata* (c. 1400). Ed. Venecia, 1493.

[125] *Ars Summularum. Tractatus actuum syncategorematum*. Salamanca, 1533.

[126] *Tractatus de compositione propositionis mentalis actuum syncategoreumatum*. París, 1528. Sobre éstos dos últimos véase V. Muñoz Delgado, *La lógica hispano-portuguesa hasta 1600*. Salamanca, 1972, pp. 75 y 82.

[127] En la edic. de Kretzmann, cit., p. 8.

[128] Cit., *apud* Prantl, *Geschichte...*, cit, vol. III, p. 68 nota: "Quae faciunt propositionem exponibilem, sunt in multiplici differentia, quia quaedam sunt signa exclusiva, ut 'tantum, solum'..., quaedam exceptiva, ut 'nisi, praeter', quaedam reduplicativa, ut 'inquantum, secundum quod', quaedam important inceptionem vel desitionem, ut 'incipit' et 'desinit', quaedam important privationem finis, ut 'infinitum', quaedam important excessum, ut comparativi et superlativi gradus, quaedam vero important distinctionem, ut 'differt, aliud ab'..., propositio redditur obscura sicque indiget expositione."

[129] P. Hispano, *Summulae...*, ed. cit., p. 210.

a) *collective:* "omnes apostoli sunt duodecim"; "tota domus valet centum denarios". En este caso no vale la inferencia per *descensus*: "ergo isti sunt duodecim"; "ergo ista pars valet centum denarios".

b) *divisive* o *distributive:* "omnes homines natura scire desiderant"; "domus tota est alba". En este caso el predicado conviene (es distribuido) a cada una de las partes en que se divide el todo; son, pues, válidas las inferencias: "ergo isti homines natura scire desiderant"; "ergo ista pars domi est alba".

De confundir estos posibles sentidos, provienen numerosos *sophismata*, como por ejemplo, "omnis homo est et quodlibet differens ab illo est non-homo"; "totus Socrates est minor Socrate", etc. Y la solución ofrecida por Pedro Hispano consiste:

1) en distinguir si la partícula en cuestión es usada *collective* (o *categoremática)* o bien *distributive* (o *syncategoramatice):* Así "omnis" en "omnes apostoli sunt duodecim" al ser tomado *universale* (en forma predicativa: categoremática) forma una clase: la clase de los apóstoles; y al no ser distributiva, no cabe atribuir el predicado "sunt duocedim" a cada uno de los miembros de esa clase. En cambio "omnis" en "omnes homines natura scire desiderant", al ser tomado *universaliter* (en forma adverbial: sincategoremática) hace que el término al que afecta sea tomado por todos sus inferiores en sentido distributivo: "significat terminum communem sumi pro omni".

2) En distinguir diversas maneras de distribuir -supuesto que la partícula es tomada en sentido sincategoremático o distributivo. Y, así, no distribuye lo mismo "totus" que "omnis". Para llegar a esta última distinción hay que tener en cuenta ésta otra: La *forma* es doble[130]:

a) *forma materiae*, por ejemplo: "mi alma es forma de mi cuerpo, y la tuya del tuyo". "Ista forma est pars et non praedicatur de eo cuius est forma".

b) *forma predicabilis*, por ejemplo: todos los superiores, como los géneros y las especies y las diferencias son formas de los inferiores. "Sed individua istius formae predicabilis sunt materia eius".

A partir de esta distinción, cabe establecer la distinta distribución de "omnis" y "totus". El primero hace una distribución de las *formae praedicabiles*, en tanto que "totus" lo hace por las *formae materiae:* "omnis dicit adaequatio universalis cum suis individuis, ut 'omnis homo'"[131]; "totus est signum distributivum partium integralium, ut 'totus Socrates est albus'"[132]. Puesto que "omnis" distribuye la *forma praedicabilis* por sus individuos (o inferiores) no importa el número de individuos de esta forma. Y de ahí que "omnis" no exige, en contra de lo que sostiene Guillermo de Shyreswood[133], "al menos tres referentes" *(tria appellata)*, porque, argumenta Pedro Hispano[134], en "omnis homo", la partícula "omnis", en singular, "quia respicit speciem secundum se et non materiam individuorum, ideo solum exigit essentiam aptam natam praedicare de pluribus, sive actu participetur a pluribus sive ab uno solo. Et ideo aliquando exigit tria appellata, aliquando unum solum, secundum naturam universalis cui adiungitur".

"Totus", en cambio, distribuye "per partes integrales", esto es, "per formas materiae". Estas partes del todo que forma el sujeto se someten al predicado no *secundum se* sino *prout sunt in suo toto*. Así, por ejemplo, en "totus Socrates est albus", es el todo, Socrates, el que se somete a la blancura *in recto* o *secundum se;* las partes, en cambio, *in obliquo* o *prout sunt in toto*. En este caso "Sócrates" es un todo compuesto de partes integrales, como la casa se compone de paredes, techo, fundamento. En este tipo de todo, "id quod est totum dat intelligere partes obliquas". Por tanto, de "totus Socrates est albus" se sigue "Socrates secundum quamlibet sui partem est albus", y también: "qualibet pars Socratis est alba"[135].

Sobre la base de este análisis ofrece Pedro Hispano la siguiente solución a uno de los sofismas más notables y tratados por los lógicos medievales: "Totus Socrates est minor Socrate".

---

[130] *Ibidem*, p. 213.
[131] *Ibidem*, p. 214.
[132] *Ibidem*, p. 226.
[133 y 134] *Introductiones*... ed. cit., p. 49: "hoc signum "omnis" vult habere tria appellata ad minus... sed intellige quod, cum distribuit pro partibus secundum numerum, requirit tria appellata actualiter entia, et cum pro partibus secundum speciem requirit tria habitualiter entia vel plura". Igualmente R. Bacon, en *Summa de sophismatibus et distinctionibus*, ed. de R. Steele, en *Opera hactenus inedita Rogeri Baconis*, fasc. XIV. Oxford, 1937, p. 144: "Et dicendum quod "omnis" exigit tria appellata, quia determinat ibi multitudinem in temarium sicut omne categorisma...".
[135] *Ibidem*, p. 226.

La proposición-sofisma es verdadera y la contraprueba (que concluye: "ergo Socrates est minor Socrate", a partir de la proposición-sofisma y de "totus Socrates est Socrates") peca, en primer lugar, "secundum accidens" y también "secundum quid et simpliciter". En la inferencia "Socrates est minor Socrate" se comete una "fallacia accidentis", al inferir "per partes de toto". Ya que el predicado, *esse minorem Socrate*, se atribuye a las partes, a las que verdaderamente conviene, pero al todo no le conviene: por tanto la proposición "Socrates est minor Socrate" "est simpliciter falsa". En segundo lugar, la contraprueba peca "secundum quid et simpliciter", "quia ista'totus Socrates est minor Socrate' non ponit Socratem esse minorem Socrate simpliciter sed secundum partes suas; et ita ponit Socratem secundum quid esse minorem Socrate. Et ita, cum simpliciter infert sic: 'ergo Socrates est minor Socrate', peccat secundum quid et simpliciter"[136].

Partiendo del análisis de los *Syncategoremata* y avanzando en una dirección cada vez más formalista la lógica medieval entra en la *via modernorum* a finales del siglo XIII.

3. La lógica *modernorum*

La *logica vetus* y la *logica nova* conforman la llamada *logica antiquorum*. Frente a ésta se configura la llamada *logica modernorum*. En la *via modernorum* la lógica se desarrolla no sólo en sentido cuantitativo (teoría de las *consequentiae* y de los *sophismata)* sino también en el sentido de profundizar en el carácter formal de la disciplina y de buscar para ella una autonomía y una delimitación precisas sobre todo frente a la metafísica. En este último sentido tiene gran importancia el ockamismo, por cuanto que elabora sobre la base de los desarrollos técnicos de los lógicos terministas, una filosofía de la lógica, planteando nuevos problemas y objetivos en la investigación lógica: la función de ésta no queda reducida a su uso en las ceremonias académicas, sino que cumple una función crítica en el análisis del legado de las autoridades, introduciendo sutiles distinciones sinctácticas y semánticas. Así escribe Ockam:

> "Alia utilitas logicae est facilitas virtutem sermonis et proprium modum loquendi percipiendi. Nam per istam artem faciliter scitur quid ab autoribus de virtute sermonis profertur, et quid non de virtute sermonis sed secundum modum usitatum loquendi, vel secundum intentionem dicentis; et quid dicitur proprie et quid metaphorice; quod est maxime necessa-rium studentibus in dictis aliorum, quia semper omnia dicta auctorum de virture sermonis et proprie accipiunt, incidunt in multos errores et inexplicabiles difficultates"[137].

Esta actitud crítica de lógicos modernos ante la lectura de cualquier autor filósofo o santo había de ser bien acogida por los escépticos y críticos escolásticos del siglo XIV. Las *auctoritates* (teológicas y filosóficas) puede que siempre tengan razón de *virtute sermonis*, pero el intérprete, con la hábil distinción entre sentido propio y sentido metafórico, siempre puede criticarlas y obligarlas a decir lo que en realidad piensa él. Las consecuencias son: en el terreno filosófico el edificio del aristotelismo ortodoxo es socavado; y en el terreno teológico el atrevimiento a interpretar los libros sagrados y de santos, que acaba en el libre examen del siglo XV con el ockamista Lutero. En ambos casos el ockamismo suponía una desestabilización de la escolástica cristiana y por ello es comprensible que atrajese sobre sí protestas y condenas. Las dos primeras condenas provinieron de la Facultad de Artes de París mediante dos decretos, el 25 de septiembre de 1339 y el 29 de diciembre de 1340, viniendo este último firmado por Buridán, que por lo demás era un ockamista, de manera que más que una reacción de la ortodoxia tomista-averroista contra el ockamismo cabe vislumbrar en el decreto un desbordamiento de Ockam por sus discípulos: En tanto que Ockam defendía y recomendaba un análisis sintáctico y semántico del texto tomado en consideración con el fin de establecer la verdad o la falsedad *de virtute sermonis*, el decreto (Buridán) considera tal análisis inútil ("Magis igitur oportet in affirmando vel negando sermones ad materiam subiectam attendere, quam ad proprietatem sermonis, disputatio namque ad proprietatem sermonis attendens nullam recipiens propositionem, praeterquam in sensu proprio, non est nisi sophistica disputatio. Disputationes dyalectice et doctrinales, quae ad inquisitionem veritatis intendunt, modicam habent de nominibus sollicitudinem"[138]. Y, en tanto que para Ockam la *virtus sermonis* proviene de las reglas del uso y de la semántica, el decreto (Buridán) sostiene que dicha *virtus* no es más que

---

[136] *Ibidem*, p. 227.

[137] *Expositio Aurea*... Bolonia, 1496. Proemium. Reimpr. Gregg, 1964. y en *Summa totius logicae*. Bolonia 1498, parte I, cap. 77: Et ideo multum est considerandum quando terminus et propositio accipitur de virtute sermonis, et quando secundum usum loquentium vel secundum intentionem auctorum, et hoc quia vix invenitur aliquod vacabulum qui in diversis locis librorum philosophorum, sanctorum et auctorum aequivoce accipiatur, et hoc penes aliquem modum aequivocationes. Et ideo volentes semper accipere vocabulum univoce et uno modo frequenter errant circa intentiones auctorum et inquisitionem veritatis, cum fere omnia vocabula aequivoce accipiantur". Ed. de P. Boehner, 1951, p. 214.

[138] H. Denifle (ed.), *Chartularium Universitatis Parisiensis*, Tomo II, París, 1891, p. 506.

la proveniente de la intención del hablante, de manera que el todavía objetivismo de Ockam es superado por un radical convencionalismo de Buridán:

> "Et quia sermo non habet virtutem, nisi ex impositione et usu communi actorum vel aliorum, ideo talis est virtus sermonis, qualiter eo actores communiter utuntur et qualiter exigit materia, cum sermones sint recipiendi penes materiam subiectam"[139].

Buridán, a su vez, será superado por discípulos aún más radicales: Nicolás d'Autrecourt, Gregorio de Rimini, Juan de Mirecourt... Y esta corriente crítica y escéptica será la causante de la disolución de la metafísica tomista a la vez que de la creación de las nuevas concepciones físicas. En manos de los jóvenes ockamistas y buridamistas la lógica deja de ser mera disputa académica para pasar a ser crítica de la filosofía y de la teología tradicional; deja de quedar inserta en la metafísica tomista y averroísta para alcanzar su plena autonomía para tratar de resolver como ciencia sus propios conceptos y problemas.

Entre los lógicos del siglo XIV (y principios del XV) destacan:

Walter Burleigh

Nació c. 1275 y murió después de 1344. Estudió y enseñó primero en Oxford y luego en París; en el 1333 accedió al obispado de Durham, obteniendo también, luego, numerosas prebendas, entre ellas una canonjía en York y otra en Salisbury. Su obra de lógica más importante es *De puritate artis logicae tractatus longior* (ed. por Ph. Boehner, 1955); en él ocupa un lugar preeminente la teoría de las *consequentiae*, articulando el resto de lógica sobre dicha teoría, lo que indica, como también el título de la obra, un alto grado de formalismo en el tratamiento de la lógica.

Guillermo de Ockam

Nació c. 1285 y murió después de 1347. Estudió en Oxford y se hizo franciscano; se vio envuelto en varias polémicas y fue acusado de herejía. Llamado a Avignon en 1340 para que respondiese a tales acusaciones, se inmiscuye en nuevas controversias hasta que es excomulgado; y busca, entonces, refugio en Munich bajo la protección de Luis de Baviera. Su obra de lógica más importante es la *Summa logicae* (ed. parcial de P. Boehner. 1951; ed. completa de G. Gal y S. Brown 1974).También en su *Expositio aurea* (ed. en Bolonia 1496. Reimpresión en Gregg., 1964, y ed. revisada de E. A. Moody, 1965) y en su *Expositio super libros elenchorum* (ed. de F. del Punta, 1979) aparecen tratados temas de la lógica terminista pero con un estilo menos rígido y pedantesco, y más crítico y vehemente que el de los escolásticos del siglo precedente.

Juan Buridán

Nació c. 1300 y murió después de 1358. Estudió y enseñó en París, de cuya universidad fue rector en 1328 y de nuevo en 1340. Es autor de *Perutile compendium totius logicae* (1ª ed. Venecia 1499, reimpr. en Minerva, 1965) dividido en ocho tratados de los cuales los tres primeros constituyen una mera edición de las *Summulae* de Pedro Hispano. Y pueden considerarse como subsiguientes a éstos 8 el tratado de los *Sophismata* (1ª ed. París c. 1500; ed. de T. K. Scott, Frommann, 1977) y el *Tractatus de Consequentiis* (ed. de H. Hubien, Lovaina, 1976).

Juan de Cornubia (Pseudo- Escoto)

Floruit en la mitad del siglo XIV. Su obra, *In universam logicam quaestiones*, atribuida a Juan Duns Escoto, aparece en el vol. I de *J. D. Scotus Opera Omnia* (1ª ed. de L. Wadding, 12 vols. Lyon 1639; nueva edic. en 26 vols. Vives, 1891. Reimpr. Georg Olms, 1968).

Alberto de Sajonia

Nació en Ricmestorp o Helmsted c. 1316. Estudió en Praga y luego en París, donde fue discípulo de Buridán. Enseñó en la Facultad de Artes de París entre 1351 y 1362, llegando a ser Rector de la Universidad de París en 1353. Fue llamado para participar en la fundación de la Universidad de Viena, de la que llegó a ser el primer Rector en 1365. Al año siguiente fue nombrado obispo de Halberstad, cargo que ocupó hasta su muerte, en 1390. Sus obras de lógica más importantes son: *Sophismata* (1ª ed. París, 1495), *Quaestiones super artem veterem* (1ª ed. Bolonia, 1496) *Commentarius in Posteriora Aristotelis* (Venecia, 1497), *Perutilis logica* (Venecia, 1518).

---

[139] *Ibidem*. Tesis ésta del convencionalismo que es defendida aún más explícitamente por Buridán en su *Perutile compendium totius logicae*, l. III, c. 3: "Tertia opinio, cui ego assentio, est ista, quod vox in significando vel in supponendo non habet virtutem propriam nisi ex nobis. Et absurdum est dicere simpliciter, quod propositio auctoris sit falsa secundum locutionem impropriam, secundum quam est vera, sed debemus dicere, quod vera est secundum sensum verum imposita, iuxta dictum Aristotelis primo ethicorum, quod sermones sunt recipiendi et intelligendi secundum materiam subiectam".

Rodolfo Strode

Vivió en la 2ª mitad del siglo XIV; durante 1359 y 1360 estudió en el Merton College. Escribió *Lógica* (manuscrita, ed. en preparación de Alfonso Maierú) y *Consequentiae et obligationes, cum commentaris* (Venecia, 1493).

Pablo de Venecia

Nació c. 1369 y murió en 1429. Estudió en Oxford hacia el 1390 y fue luego maestro en varias universidades italianas, sobre todo en la de Padua. Entre sus obras de lógica destacan: *Logica parva* (Venecia, 1476, Foto-reimpresión en Georg. Olms, 1970). *Logica magna* (Venecia, 1499. Ediciones parciales y traduc. inglesa debidas a N. Kretzmann, 1979; F. del Punta y M. M. Adams, 1978; A. R. Perreiah, 1971), *Sophismata* (Venecia, 1493) y *Quadraturu* (Venecia, 1493).

Pablo de Pérgola

Murió en 1455. Fue discípulo de Pablo de Venecia en Padua. Enseñó, luego, en Venecia desde 1421 hasta su muerte. Su *Lógica* sigue de cerca a la *Lógica parva* de su maestro. Tiene también: *Dubia circa philosophiam*, influida por las *Consequentiae* de Strode, y *Tractatus de sensu compositio et divisio*. Este, junto con la *Lógica*, ha sido editado por M. A. Brown, 1961.

Entre los temas específicos de lógica mejor elaborados por estos autores están, la teoría de las *consequentiae* y los *sophismata*.

3. 1. Las consequentiae

La teoría de las *consequentiae* constituye uno de los capítulos más interesantes de la lógica medieval. Para Lukasiewicz[140] son una continuación y desarrollo de la lógica estoica. Bochenski[141], por el contrario, sitúa el origen de las *consequentiae* en algunas nociones aristotélicas.

En realidad cabe situar su origen tanto en los Tópicos (tratamiento de los entimemas) de Aristóteles, como en la lógica de los estoicos, llegada a los medievales a través del *De syllogismis hypotheticis* de Boecio. En su *Dialectica* Abelardo inicia el análisis de las *consequentiae* en los silogismos y en los *loci* (ver *supra*). También Santo Tomás utilizó la palabra "consequentia" en su *Summa contra gentiles* (libro I, cap. 67). Pero el hecho significativo es que la lógica del siglo XIV aparece como una lógica de las *consequentiae*, ocupando la mayor parte de los tratados y subordinando a ella las otras partes de la lógica -la teoría de los términos, la teoría silogística, etc. En los grandes manuales del siglo XIII, los de Pedro Hispano, Guillermo de Shyreswood y Lamberto de Auxerre) las *consequentiae* no tienen asignado un apartado específico, sino que son tratadas de manera tangencial e introductoria, en los capítulos sobre las proposiciones, sobre los Tópicos y sobre los *syncategoremata*. En cambio, los grandes maestros del siglo XIV y principios del XV (Burleigh, Ockham, Pseudo-Escoto) prestan atención específica a las *consequentiae*, llegando incluso -como es el caso de Alberto de Sajonia- a articular sobre ellas el resto de la lógica. En este siglo alcanza su madurez la teoría de las *consequentiae* y también la lógica en general (la lógica medieval), de modo que en los dos siglos siguientes la inmensa literatura sobre lógica -producida principalmente en España[142]- está plagada de comentarios y de discusiones de detalle más que de nuevos descubrimientos.

La noción de *consequentia* es bastante amplia: apelando a conceptos de lógica moderna veremos que cubre:

1) la relación deducibilidad formal (sintáctica), que media entre la fórmula (o conjunto de fórmulas) Γ y la fórmula A y que suele simbolizarse así: $\Gamma \vdash A$.
2) la relación de deducibilidad semántica o consecuencia lógica de la fórmula A a partir de la fórmula (o conjunto de fórmulas) Γ , y simbolizada así: $\Gamma \models A$.
3) la función u operación que media entre dos proposiciones conectadas de forma hipotética, "Si A, entonces B", entendida como "implicación material" y simbolizada así: $A \rightarrow B$.

---

[140] *Para una historia de la lógica de enunciados;* cit., p. 33.

[141] "De consequentiis scholasticorum earumque origine", en *Angelicum*, 15(1938), pp. 92-109. Sobre las *consequentiae* véase también, E. A. Moody, *Truth and consequence in medieval logic*. North-Holland, Amsterdam, 1953.Ph. Boehner, "Does Ockham know of material implication?" (1951), en *Collected articles on Ockham*. Franciscan Institute, Nueva York, 1958; A. N. Prior, "On some 'consequentiae' in Walter Burleigh", en *The new scholasticism*, 27, (1953), pp. 433-446; A. González, "The theory of assertoric consequences in Albert of Saxony", en *Franciscan studies*, 18 (1958), pp. 290-354, y (19), pp. 13-144. F. Bottin, "Per una definizione di consequentia", en C. Giacon (ed.), *Logica e semantica e altri saggi*. Antenore, Padua, 1975, pp. 17-36.

[142] Véase a este respecto: E. J. Ashworth, *Language and Logic in the Post-medieval Period*. Reidel, Dordrecht, 1974. V. Muñoz Delgado: *La lógica nominalista en la Universidad de Salamanca (1510-1530)*. Madrid, 1964. Y del mismo: *Lógica hispano-*

4) la función u operación que media entre dos proposiciones conectadas de igual forma que antes, pero entendida como "implicación estricta" (Lewis) y simbolizada así: A —3 B.

En el (1) y (2) la *consequentia* establece (es) una *illatio* (una relación) en un esquema argumental entre dos conjuntos de proposiciones: el de las premisas y el de las conclusiones y viene normalmente expresada por las partículas *sequitur* o *igitur*. Por ejemplo: "In consequentia syllogistica ex opposito conclusionis cum altera praemissarum *sequitur* oppositum alterius praemisae"[143]. En este sentido la *consequentia* no es *vera* o *falsa*, sino *bona (valet, bene sequitur)* o *mala*[144]: la *consequentia* constituye la aplicación de una *regla* de inferencia, y en cuanto tal resulta correcta o incorrecta, pero no verdadera o falsa.

En (3) y (4) la *consequentia* establece (es) una función veritativa en una proposición hipotética, expresada por la partícula *si*. En este sentido la *consequentia* -al ser una proposición- es vera o falsa. Así la entiende Ockham, cuando escribe:

> "Sed quia conditionalis aequivalet uni consequentiae, ita quod tunc conditionalis est vera, quando antecedens infert consequens, et non aliter, ideo differatur usque ad tractatum de consequentiis... Est etiam sciendum quod ad veritatem conditionalis nec requiritur veritas antecedentis nec consequentis, immo est aliquando conditionalis necesaria et quaelibet pars eius est impossibilis, sicut hic: Si Socrates est asinus, est rudibilis"[145].

Y así también la entiende Buridán cuando exige[146] que la *consequentia*, para que sea tal, ha de ser verdadera. La *consequentia* en este sentido constituye una *tesis lógica*.

En el primer sentido las *consequentiae* pueden ser estructuradas (y así lo hacen Burleigh y Alberto de Sajonia) como un sistema de reglas de inferencia. En el segundo sentido las consequentias forman un conjunto de *tesis (leyes) lógicas*. Los lógicos del siglo XIV alcanzaron a percatarse de la correspondencia biunívoca que cabe establecer entre reglas y leyes. Ahora bien, una ley es una proposición, si bien, evidentemente, no toda proposición es ley. Una proposición hipotética -forma a la que se reduce la *consequentia* - no puede ser ley cuando está formada por dos proposiciones "atómicas" (distintas), mediando en ese caso entre ellas -entre antecedente y consecuente- la implicación material: $p \rightarrow q$. Para obtener una ley de una proposición hipotética, al menos una de sus proposiciones componentes -el antecedente o el consecuente- ha de ser "molecular", (condición necesaria) y entre las proposiciones componentes media la implicación estricta (condición suficiente): A —3 B.

Por ejemplo: (x) Px —3 Pa. A esta ley corresponde la regla $\frac{(x)\ Px}{Pa}$

Sobre esta correspondencia entre *leyes*, en forma de proposiciones hipotéticas, y *reglas*, que hacen válido un argumento, organizaron los maestros del siglo XIV la teoría de las *consequentiae*. Si el esquema argumental "A, *igitur* B" es válido, entonces la proposición hipotética "si A, B" es verdadera. Así lo fórmula explícitamente Ockham: "Quia conditionalis aequivalet uni consequentiae, ita quod tunc conditionalis est vera, quando antecedens infert consequens et non aliter, ideo differatur usque ad tractatum de consequentiis". Pero no necesariamente tenemos que "si A, B" es verdadera, entonces "A igitur B" es válido (correcto); sólo cuando el "si..." funciona como "implicación estricta", tal como ya lo vio Pedro Hispano:

> "Ad veritatem conditionalis exigitur quod antecedens non possit esse verum sine consequenti, ut 'si homo est, animal est'. Unde omnis conditionalis vera est necessaria, et omnis conditionalis falsa es imposibilis. Ad falsitatem eius sufficit quod antecedens possit esse sine consequenti, ut "Si Socrates est, album est"[146].

De manera mucho más detallada Strode da un gran número de reglas para los distintos tipos de *consequentiae*. Para la *consequentia materialis* pone estas dos reglas: 1) "Ex impossibili sequitur quodlibet"; 2) "Necessarium sequitur ad quodlibet"; ambas rigen para la implicación en sentido estricto. Pero en los ejemplos que aduce cabe entrever una noción de *consequentia* asimilable a la deducibilidad semántica o relación de consecuencia lógica, según la cual el consecuente debe formar parte del antecedente. En efecto, Strode observa que un condi-

---

143 W. Burleigh, *De puritate artis logicae*... ed. cit., p. 208.

144 Así escribe Strode en sus *Consequentiae*, cit. (*apud* Prantl, *Geschichte*, IV, p. 46): "Consequentia est illatio consequentis ex antecedente... Dicitur aliqua bona et aliqua mala, quae valet, et que non valet. Consequentia bona dicitur, cuius non potest esse ita, sicut adaequate significatur per antecedens, quin pro tunc sic ita, sicut adaequate significatur per suum consequens... Dicitur non bona, quando stat, sic esse, sicut significatur adaequate per antecedens, licet non sit ita, sicut adaequate significatur per consequens suum".

145 *Summa logicae*, Parte II, cap. 30.

146 *Tractatus de consequentiis*, ed. cit., pág. 21.

146 *Summulae*, ed. cit., p. 9.

cional puede ser falso aun cuando tanto el antecedente como el consecuente sean a la vez verdaderos, como, por ejemplo: "Si tu es homo, ego sum homo"[147].

Las *consequentiae* según Pseudo-Escoto

Cuando Pseudo-Escoto[148] escribe sobre su teoría de las *consequentiae*, el tema debía de estar ya bastante debatido, ya que comienza discutiendo otras diversas concepciones de las *consequentiae*. Dice que hay tres posibles caracterizaciones de *consequentia* :

I) "Ad bonitatem consequentiae requiritur, et sufficit, quod impossibile est antecedens esse verum, et consequens falsum"[149]. En su contra aduce Pseudo-Escoto el siguiente ejemplo: "Toda proposición es afirmativa, luego ninguna proposición es negativa". Esta *consequentia* resulta en sí evidentemente válida; pero la objeción reside en que el antecedente -"toda proposición es afirmativa"- puede ser verdadero (caso de que quedasen eliminadas todas las proposiciones negativas), en tanto que el consecuente -"ninguna proposición es negativa"- habría de ser falso (no es posible que sea verdadero), porque su propia existencia lo falsearía. Y, por lo tanto, de acuerdo con la caracterización ofrecida, la *consequentia* mencionada no puede ser aceptada como *bona*.

II) "Ad bonitatem consequentiae requiritur, et sufficit, quod impossibile est sic esse, sicut significatur per antecedens, quin si sit, sicut significatur per consequens"[150]. El contraejemplo aducido es: "Ninguna quimera es un macho cabrío, luego un hombre es un asno". Esta *consequentia*, en su conjunto, resultaría inválida por el antecedente -"Ninguna quimera es un macho cabrío"- verdadero (ya que para que una proposición negativa sea verdadera basta con que no se dé el estado de cosas significado por la correspondiente proposición afirmativa) y el consecuente -"un hombre es un asno"- falso. Y, sin embargo, según la formulación, habría de resultar una *consequentia bona*.

III) "Ad bonitatem consequentiae requiritur, et sufficit, quod impossibile est antecedente, et consequente simul formatis antecedens esse verum, et consequens falsum"[151]. También contra esta caracterización ofrece Pseudo-Escoto un contraejemplo: "Dios existe, luego esta *consequentia* no es válida". Esta *consequentia* cumple los requisitos exigidos por la definición para ser válida y, sin embargo, en su conjunto resulta inválida. En efecto, de resultar válida su consecuente sería falso, puesto que precisamente afirma que la consecuencia no es válida; pero, puesto que el antecedente es verdadero si el consecuente es falso, la *consequentia* no podría ser válida. De modo que el supuesto de que esta *consequentia* es válida se refuta a sí mismo. Mas con esto se cumplen las condiciones de (III) para su validez, puesto que el antecedente y el consecuente son ambos necesarios (que el antecedente lo es resulta evidente, y que lo es el consecuente queda patente por el hecho de que la *consequentia* "Dios existe, luego esta *consequentia* no es válida" no puede ser válida es necesariamente verdadera). Por lo tanto, nunca se dará el caso de que, siendo el antecedente verdadero, sea el consecuente falso.

Pese a estas dificultades que presenta la caracterización (III) Pseudo-Escoto se inclina por ella con una excepción:

> "Dico igitur, quod ad bonitatem consequentiae, requiritur et sufficit ultimus modus, scilicet impossibile est, antecedente, et consequente simul formatis, quod antecedens sit verum, et consequens falsum, excepto uno casu, scilicet ubi significatum consequentis repugnat significationi natae consequentiae, sicut coniunctionis, quae denotat consequentiam esse"[152].

Y tampoco a esta excepción saca punta, y sólo acude a ella a la hora de justificar la introducción de la regla: "Ad quamlibet propositionem sequitur propositio necessaria bona consequentia simplici", que exige una explicación.

La definición que, finalmente, ofrece Pseudo-Escoto de *consequentia* es ésta:

> "Consequentia est propositio hypothetica composita ex antecedente et consequente mediante coniunctione conditionali vel rationali, quae denotat quod

---

147 Strode, *Consequentiae*, apud Prantl, *Geschichte* ... IV, ed. cit., p. 46: "et stat, conditionalem esse falsam, cuius tam antecedens quam consequens esset verum, ut "si tu es homo, ego sum homo"... Sicut conditionalis nihil ponit in esse, sic neque aliqua consequentia; et ideo concedendo consequentiam non oportet concedere antecedens vel consequens; similiter negando consequientiam non oportet antecedens vel consequens negare... Et tunc stat iste versus: "ex falsis verum ex veris nil nisi verum".

148 *Quaestiones super Analytica Priora*, en *D. Scotus Opera Omnia*, I, 10, p. 287.

149 *Ibidem*, p. 286.

150 *Ibidem*, p. 287.

151 *Ibidem*, p. 287.

152 *Ibidem*, p. 287.

impossibile est ipsis, scilicet antecedente et consequente, simul formatis, quod antecedens sit verum et consequens falsum. Et tunc, si ita est, sicut ista coniunctio denotat, consequentia est bona, et si non, tunc consequentia non valet".

La "propositio conditionalis", "si A, B", y la "propositio rationalis", "A, igitur B", son dos de las 5 ó 6 especies -conditionalis, copulativa, disiunctiva, causalis, temporalis, rationalis- de proposiciones hipotéticas[153]. Y aunque Pseudo-Escoto, aquí y en otros varios pasajes, se refiere a la *consequentia* como si se tratase de una proposición y por lo tanto hablando de su verdad, en realidad la entiende en sentido de relación de derivabilidad entre premisas (que sigue llamando antecedente) y conclusión (designada por "el consecuente"); por eso distingue entre *consequentia propria (bona consequentia)*: aquella que *bene sequitur*, que *valet*, es decir, cuando tenemos una inferencia correcta; y *consequentia impropria* (*mala consequentia)*: cuando la inferencia resulta incorrecta.

Las *consequentiae propriae* pueden ser entimemáticas o silogísticas[154], constituyendo las primeras el núcleo central de estudio y elaboración en esa época.

Clasificación de las *consequentiae*

Según una primera división, la *consequentia* puede ser: *materialis* o *formalis*.

Consequentia formalis

"Consequentia formalis est illa quae tenet in omnibus terminis stante consimili dispositione et forma terminorum; et vocatur termini in proposito subiecta et praedicata propositionum vel partes subiecti et praedicati. Sed ad forman consequentiae pertinent omnia syncategoremata posita in consequentia, ut coniunctiones, signa universalia, particularia, negationes et hiusmodi. Secundo ad formam consequentiae pertinet copula propositionis, et ideo non est eadem forma consequentiae ex propositionibus, quarum copula est de inesse et quarum copula est de modo. Tertio ad formam pertinet multitudo praemissarum, affirmatio et nagatio propositionum et hiusmodi, et ideo non est eadem forma arguendi ex affirmativis et negativis, et ita de aliis[155].

Esta definición de *consequentia formalis* resulta similar a la ya dada por Abelardo (ver *supra)* de *argumentatio secundum dispositionem terminorum*, la única que resulta para Abelardo "perfecta" y correspondiente a una proposición condicional verdadera *secundum complexionem*, esto es, proposición que no necesita tomar en consideración el valor designativo de sus términos sino que resulta verdadera en virtud de su estructura, determinada por los *syncategoremata*, por el número de términos y por la ordenación de éstos. Y así como Abelardo distingue la *argumentatio* "verdadera" *ex complexione* (el silogismo, por ejemplo) de la *argumentatio* "verdadera" *ex rerum natura* (los *loci)*, calificando a la primera de "perfecta" y a la segunda de "imperfecta" (por cuanto que esta última necesita de una *maxima propositio* que garantice la *consequentia)*, así también Pseudo-Escoto distingue la *consequentia formalis*, válida *ex dispositione et forma terminorum* de la *consequentia materialis*, que por sí misma no alcanza la perfección (la corrección lógica) de la primera, aunque puede alcanzarla con una proposición adicional.

La *consequentia formalis se subdivide*[156]:

a) "Quaedam est, cuius antecedens est una propositio categorica,ut conversio, aequipollentia et huiusmodi".

b) "Allia est, cuius antecedens est propositio hypothetica" (syllogismus, etc.)

Consequentia materialis

"*Consequentia materialis* est illa quae non tenet in omnibus terminis retenta consimili dispositione et forma ita, quod non fiat variatio nisi terminorum".

La *consequentia materialis* puede ser:

a) *bona simpliciter*: aquella que puede ser reducida a *consequentia formalis* mediante la asunción de una proposición necesaria. Así, por ejemplo, dada la siguiente *consequentia materialis bona simpliciter* "homo currit, igitur animal currit", se reduce a formal por medio de esta proposición necesaria: "omnis homo est animal". Y esta *consequentia* "Subdividitur in multa membra secundum diversitatem locorum dealecticorum".

b) *Bona ut nunc:* aquella que puede ser reducida a formal mediante la asunción de una proposición contingente verdadera. Así, por ejemplo, supuesto que Sócrates es blanco la siguiente *consequentia*

---

153 *Confert* G. Ockam, *Summa logicae*, II, 30; J. Buridán, *Trat. de consequentiis*, I, 3.
154 *Ibidem*, p. 302.
155 *Ibidem*, p. 287.
156 *Ibidem*.

es *bona ut nunc:* "Socrates currit, igitur album currit", porque se reduce a formal mediante esta proposición contingente: "Socrates est albus".

De estos tipos de *consequentia* el más novedoso es el de *consequentia materialis bona ut nunc*, pues el mismo Abelardo la rechazaría como *argumentatio* válida o como proposición condicional verdadera en cuanto a ella correspondiente. El condicional correspondiente de este tipo de *consequentia* es el filónico, bien distinto del diodórico, y de gran importancia en la lógica proposicional (tipo estoico). Sea que a Pseudo-Escoto le llegó por la influencia de los megáricos, sea que él mismo se percató de ella, al resultarle necesaria para la caracterización de las *consequentiae*, el hecho es que la lógica proposicional (estoica) se reaviva de nuevo al margen de la lógica aristotélica (silogística) en el siglo XIV, especialmente en la teoría de las *consequentiae*.

Pseudo-Escoto ofrece y demuestra[157] luego cinco reglas concernientes a las *consequentiae*. Ellas nos permiten entender mejor la noción de *consequentia* de Pseudo-Escoto:

(1) Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali.

(2) Ad quamlibet propositionem impossibilem sequitur quaelibet alia propositio non consequentia formali sed consequentia materiali bona simpliciter.

(3) Ad quamlibet propositionem sequitur propositio necessaria bona consequentia simplici.

(4) Ad quamlibet propositionem falsam sequitur quaelibet alia propositio in bona consequentia materiali ut nunc.

(5) Omnis propositio vera sequitur ad quamcumque aliam propositionem in bona consequentia materiali ut nunc.

La demostración de (1), por ejemplo, discurre así: De "Socrates est et Socrates non est" se sigue en buena consecuencia formal "Homo est asinus".

Prueba:

-(1) Socrates est et Socrates non est...
...supuesto

(2) Socrates non est...
...(A copulativa ad alteram eius partem est consequentia formalis).

(3) Socrates est...
...Por la misma regla que (2)

(4) Socrates est vel homo est asinus...
...(A partir de (3) por la regla: quaelibet propositio infert se ipsam formaliter cum quacumque alia in una disiunctiva).

(5) Homo est asinus...
...A partir de (4) y (2) mediante silogismo disyuntivo.

Cada uno de estos pasos supone la aplicación de una regla distinta del cálculo de proposiciones. Ello indica el alto grado de ejercitación de la lógica proposicional requerida en el tratamiento de las *consequentiae*.

Strode, continuador de Pseudo-Escoto en el tratamiento de las *consequentiae*, ofrece dos reglas para la *consequentia materialis*[158] correspondientes a las (2) y (3) de Pseudo-Escoto:

(1) Ex impossibili sequitur quodlibet.

(2) Necessarium sequitur ad quodlibet.

Y luego ofrece[159] estas 24 reglas de carácter general que determinan las *bonae consequentiae*. De éstas llaman la atención las 13-16, por cuanto que introduce una nueva gradación entre los modos de la lógica modal, colocando entre el "verum" y el "falsum" los modos epistémicos "scitum" y "dubium".

(1) Si aliqua consequentia est bona et formalis et eius antecedens est verum, ergo et consequens est verum.
(2) Si consequens est falsum, igitur et antecedens.
(3) Si aliquando erit ita, sicut significatur per consequens.
(4) Si aliquando non erit, sicut significatur per consequens, pro tunc non erit, sicut adaequate significatur per antecedens.
(5) Si antecedens est concedendum, consequens est ab eodem concedendum.
(6) Si consequens est negandum, igitur et antecedens.
(7) Si antecedens est possibile, consequens est possibile.
(8) Si consequens est impossibile, igitur et antecedens est impossibile.
(9) Si antecedens est necessarium, et consequens est necessarium.
(10) Si consequens est contingens, et antecedens est contingens vel impossibile.
(11) Si antecedens est pure negativum, et consequens est pure negativum.

---

[157] *Ibidem*, p. 288.

[158] *Apud* Prantl, *Geschichte...*, IV, ed. cit., p. 46.
[159] *Ibidem*, pp. 46-48.

(12) Si consequens est pure affirmativum, ergo et antecedens vel aliqua pars eius.
(13) Si antecedens est scitum, et consequens est scitum.
(14) Si consequens est dubium, et antecedens est dubium vel scitum esse falsum.
(15) Si antecedens est dubitandum, ergo consequens non est ab eodem negandum.
(16) Si consequens est negandum, antecedens non est ab eodem dubitandum.
(17) Si aliquid antecedit ad antecedens, ergo illud idem antecedit ad consequens.
(18) Si aliquid sequitur ad consequens, illud idem sequitur ad antecedens.
(19) Si aliquid stat cum antecedente, ergo idem stat cum consequente.
(20) Si aliquid repugnat consequenti, illud idem repugnat antecedenti.
(21) Si arguatur ex contradictorio consequentis ad contradictionem antecedentis, illa consequentia valet.
(22) Si arguatur ex opposito consequentis ad alteram praemissarum, sequitur oppositum alterius praemisae.
(23) Si antecedens est intellectum a te, et consequens est intellectum a te.
(24) Si aliqua consequentia est bona, ergo oppositum consequentis non potest stare cum antecedente.

Las *consequentiae* en Guillermo de Ockham

Ockham ofrece una clasificación de las consequentiae un tanto diferente de la de Pseudo-Escoto. Hace[160] tres distinciones que no necesariamente quedan subordinadas unas a otras.

1ª distinción

La consequentia válida puede ser:

a) *simplex*, "quando pro nullo tempore poterit antecedens esse verum sine consequente". Esto es, la *consequentia simplex* es siempre válida: El antecedente no puede nunca ser verdadero sin que el consecuente también lo sea. Por ejemplo, "nullum animal currit, ergo nullus homo currit".

b) *ut nunc*, "quando antecedens pro aliquo tempore potest esse verum sine consequens, sed non pro isto tempore". Según esto, una *consequentia ut nunc* es válida en un tiempo dado, pero puede ser inválida en otro. Por ejemplo, "omnis homo currit, ergo Socrates currit", es válida sólo si existe Sócrates y en tiempo de su existencia.

2ª distinción

La *consequentia* puede hacerse:

a) *Per medium intrinsecum:* "quando tenet per aliquam propositionem formatam ex eisdem terminis". Una *consequentia* de este tipo es, según esto, un entimema: mediante la adición de una proposición al antecedente se convierte en un silogismo. Así, en el ejemplo que pone: "Socrates non currit, igitur homo non currit", esta *consequentia* alcanza su validez mediante la asunción de esta proposición-premisa ("tenet virtute istius medii"): "Socrates est homo".

b) *Per medium extrinsecum:* "quando tenet per aliquam regulam generalem quae non plus respicit illos terminos quam alios". Esto es, cuando resulta válida en virtud de una regla general (lógica) que no concierne a los términos intervinientes sino a la estructura de la proposición. Por ejemplo: "Tantum homo est asinus, ergo omnis homo est asinus". Esta *consequentia* es válida, no en virtud de los términos categoremáticos en ella intervinientes: "homo" y "asinus", sino en virtud de la siguiente regla general (lógica) que rige la conversión de las proposiciones: "Exclusiva convertitur in universalem".

Esta segunda distinción se corresponde con la ya establecida por Abelardo (ver *supra)* entre *argumentatio ex complexione* (El silogismo o la inferencia inmediata) y *argumentatio ex natura rerum* (el entimema, por ejemplo), que es "imperfecta" respecto de la primera, porque, como la *consequentia per medium intrinsecum* de Ockham, necesita de una proposición adicional (en el antecedente) para obtener su validez.

3ª distinción

Una *consequentia* puede ser:

a) *Formalis:* Aquella que resulta válida en virtud de su estructura formal, de modo que inmediata o mediatamente está regida por una ley lógica. Subdistingue, en efecto, dos subtipos de *consequentia formalis:* las que son válidas *per medium extrinsecum* y las que lo son *per medium intrinsecum*.

1) "Quaedam tenet per medium extrinsecum quod respicit formam propositionis, sicut sunt tales regulae: Ab exclusiva ad universalem de terminis transpositis est consequentia bona: ex maiore de necessario et minore de inesse sequi-

[160] *Summa logicae*, III, 3, cap. 1.

tur conclusio de necessario, et huiusmodi". Ejemplo de este subtipo es el ofrecido en IIb. Esta *consequentia* alcanza inmediatamente su validez *per medium extrinsecum*.

2) "Quaedam tenet per medium intrinsecum immediate et mediate per medium extrinsecum respiciens generales conditiones propositionum, non veritatem nec falsitatem nec necessitatem nec impossibilitatem". Así, por ejemplo, (el mismo de IIa) la *consequentia* "Socrates non currit, igitur homo non currit" resulta mediatamente válida *per medium extrinsecum;* de ahí que sólo mediatamente es *consequentia formalis* y por tanto, sólo mediatamente alcanzan su validez.

b) *Materialis:* "quando tenet ratione terminorum praecise, et non ratione alicuius medii extrinseci respicientis praecise generales conditiones propositionum". Esto es, la *consequentia materialis* obtiene su validez, no por ser una instancia de regla general (lógica), sino a través de los términos que en ella intervienen. La proposición condicional correspondiente a la *consequentia formalis* resulta verdadera con independencia de la verdad o falsedad de las proposiciones "atómicas" que la componen. En cambio, la verdad de la proposición condicional correspondiente a la *consequentia materialis* depende de la verdad de las proposiciones "atómicas" intervinientes. Esto significa que constituye una proposición implicativa, entendida la implicación en sentido material. Así, los dos ejemplos de *consequentia materialis* aducidos por Ockham: "Si homo currit, Deus est" y "Homo est asinus, igitur Deus non est" responden a la caracterización de la verdad de la implicación material: a) cuando el consecuente es verdadero (en el 1er ejemplo: "Deus est") o b) cuando el antecedente es falso (en el 2º ejemplo: "Homo est asinus"). Y son estas dos estipulaciones precisamente las que dan lugar a la formulación de las once reglas básicas que Ockham aduce en el último capítulo sobre la teoría de las *consequentia*[161]:

(1) ex vero numquam sequitur falsum.

(2) ex falsis potest sequi verum.

(3) si aliqua consequentia sit bona, ex opposito consequentis sequitur oppositum totius antecedentis.

(4) quidquid sequitur ad consequens, sequitur ad antecedens.

(5) quidquid antecedit antecedens, antecedit consequens.

(6) quidquid stat cum antecedente, stat cum consequente.

(7) quidquid repugnat consequenti repugnat antecedenti.

(8) ex necessario non sequitur contingens.

(9) ex possibile non sequitur impossibile.

(10) ex impossibile sequitur quodlibet.

(11) necessarium sequitur ad quodlibet.

De éstas, las siete primeras constituyen reglas (o leyes en forma de proposición condicional) del cálculo proposicional elemental. A ellas hay que añadir otras que aparecen diseminadas por la obra de Ockham; por ejemplo, las llamadas "leyes de De Morgan" son formuladas por Ockham como sigue:

(12) opposita contradictoria copulativae est una disiunctiva composita ex contradictoriis partium copulativae[162].

(13) opposita contradictoria disiunctivae est una copulativa composita ex contradictoris partium illius disiunctivae[163].

(14) semper a copulativa ad utramque partem est consequentia bona[164].

(15) ab altera parte disiunctivae ad totam disiunctivam est bonum argumentum[165].

(16) a disiunctiva cum negatione alterius partis ad alteram partem est bonum argumentum[166].

Moody[167] dedica unas veinte páginas de su libro a traducir a lenguaje simbólico actual todas las leyes que aparecen más o menos sistematizadas o bien desperdigadas en los textos de lógica del siglo XIV, y que constituyen una buena muestra del alto grado de desarrollo que en ese siglo alcanzó la lógica proposicional, y al cual se llegó, según tesis de Moody, por influencia de los estoicos,ejercida a través de Boecio y Abelardo.

---

161 *Summa logicae*, III, 3, cap. 37.
162 *Ibidem*, II, cap. 32.
163 *Ibidem*, II, cap. 33.
164 *Ibidem*, II, cap. 32.
165 *Ibidem*, II, cap. 33.
166 *Ibidem*, II, cap. 33.

[167] E. A. Moody, *Truth and consequence in medieval logic*, ed. cit. § 15.

BIBLIOGRAFIA

Alessio, F., "Prospetive e problemi della storia della logica medievale", en *Atti del Convegno di storia della logica"*. Liviana, Padua, 1974, pp. 37-59.

Ashworth, A., *Language and logic in post-medieval period*. Ridel, Dordrecht, 1974.

Bochenski, J. M., "De consequentiis scholasticorum earumque origine", en *Angelicum*, 15 (1938), pp. 92-109.

Boehner, Ph., *Medieval logic*. Manchester Univ. Press., 1952.

Bottin, F., "Per una definizione di 'consequentia'", en *Logica e Semantica e altri saggi*. Edición C. Giacon. Antenore, Padua, 1975, pp. 17-36.

Dürr, K., "Aussagenlogik im Mittelalter", en *Erkenntnis*, 7, (1938).

Dürr, D., "Alte und neue Logik", en *Jahrbuch der schweizerischen Philosophischen Gesellschaft*, 2 (1942), pp. 104-122.

Ferrater Mora, J., "De Boecio a Alberto de Sajonia. Un fragmento de historia de la lógica", en *Imago Mundi* (Buenos Aires) 1, (1954), pp. 3-22.

Grabmann, M., *Handschriftliche Forschungen und Funde zu den philosophischen Schriften des Petrus Hispanus des späteren Papstes Johannes XXI, en Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Munich, 1936, pp. 31 y ss.

Grabmann, M., "Bearbeitungen und Auslegungen der Aristotelichen Logik aus der Zeit von Peter Abaelard bis Petrus Hispanus", en *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Berlín, 1937.

Grabmann, M., *Mittelalterliches Geistesleben*, 2 vols. Munich, 1926-1936.

Henry, D. P., *Medieval Logic and Metaphisics. A modern introduction*. Hutchinson, Londres, 1972.

Hubien, H., "Logiciens Mediévaux et logique d'aujourd'hui", en *Revue philosophique de Louvain*, 75 (1977), pp. 219-232.

Maierù, A., *Terminologia logica della tarda scolastica*. Edizioni dell'Ateneo, Roma, 1972.

Minio-Paluelo, L., *Twelfth-Century Logic*, 2 vols., Roma 1956-8.

Moody, E. A., *Truth and Consquence in medieval logic*. North-Holland, Amsterdam, 1953.

Moody, E. A., *Studies in Medieval Philosophy, science and logic. Collected papers 1939-1969*. Univ. of California Press. Berkeley, 1975.

Moreno, A., "Lógica Medieval", en *Sapientia*, 16, 1961, pp. 246-263.

Perreiah, A. R., "Approaches to supposition teory", en *The New scholasticism*, 45 (1971), pp. 341-408.

Preti, G., "Studi sulla logica formale nel Medioevo", en *Rivista Crítica di storia della filosofia*, 8 (1953), pp. 346-373; 680-697.

Price, R., "William of Ockham and'suppositio personalis'", en *Frasciscan studies* 30 (1970), pp. 131-140.

Rijk, L. M., "The development of suppositio naturalis in Mediaeval logic", en *Vivarium*, 9 (1971), p. 71-107; y 11 (1973), pp. 43-79.

Rijk, L. M., *Logica modernorum*. 2 vols. Van Gorcum. Assem, 1962, 1967.

Salamucha, J., "Die Aussagenlogik bei Wilhelm Ockham", en *Franziskanische studiem*, 32 (1950), pp. 87-134.

Spade, P. V., "Recent research on medieval logic", en *Synthese*, 40 (1979), pp. 3-18.

VII. Ramón Llull (1232-1315)

El *ars* luliana difiere esencialmente de la lógica escolástica codificada en los grandes manuales del siglo XIII: las *summulae* de Pedro Hispano y las *Introductiones* de Guillermo Shyreswood.

Llull es el primero que, en Europa, utiliza y domina la lengua materna como lenguaje científico y filosófico, lo cual le obliga a crear un vocabulario lógico y filosófico siguiendo en una dirección hispano-árabe-judía en la que se concede gran importancia a las palabras y a los nombres, puesto que en esa línea -que alcanza a Fray Luis de León- la cuestión de los nombres (*los nombres de Cristo* de Fray Luis, *los cent noms de Deu* de Llull) es una cuestión de ideas.

Ramón Llull es descendiente de los conquistadores ennoblecidos de Mallorca. Estuvo casado con Blanca Picany, que le dio dos hijos, Magdalena y Doménec, hasta su conversión a Dios (1263). A partir de entonces su propósito fue: prepararse para el martirio, escribir libros para convertir a los infieles y fundar monasterios para formar hombres sabios y letrados capaces de predicar la verdad católica a los infieles. Esto le obligó a aprender el árabe y a estudiar la filosofía y la teología musulmanas, buscando un método de convicción para la conversión. Y, así, él mismo compendia en árabe y traduce luego al catalán la lógica de Algazel, obra que le sirve de base para la elaboración de su primer *ars* (el *Art abreujada d'atrobar veritat*, su *Ars magna* primitiva). Del pensamiento árabe toma, asimismo, el realismo que da a las "dignidades" o atributos divinos, y el afán de aducir "razones necesarias" *(logicales)* en todas las cuestiones (incluso en los Artículos de la Fe). De los judíos asume, entre otros, elementos específicos de la Cábala hebrea: la representación de las ideas por medio de letras y las combinaciones de letras (representantes de ideas) en figuras. Hay en la Cábala elementos racionales y aprovechables. La cábala, despojada de elementos "irracionales" (alquimia, quiromancia, etc.), contribuye con sus técnicas de interpretación y de combinación afinadas durante siglos al estudio científico del lenguaje. Estas técnicas quedan reflejadas en el *ars* luliana.

A los diez años de su conversión tiene Llull (hacia 1273) una iluminación en el monte Randa: de repente vio -dice- todos los principios de las cosas y su entramado. Al punto descendió del monte, dirigiéndose al convento real de San Bernardo, donde puso en orden y por escrito su iluminación, componiendo el primer modelo de su *ars:* el *Art abreujada d'atrobar veritat*, mejor conocida por el título latino de *Ars compendiosa inveniendi veritatem. Ars magna et maior*. Desde esta primera formulación hasta su última y definitiva: *Ars generalis ultima* Llull busca insistentemente una simplificación de su arte y la aplicación de sus principios a todas las ciencias, apareciendo en este contexto la lógica como una disciplina particular. En efecto, la lógica aristotélico-escolástica es una lógica formal y de "segunda intención" que no permite demostrar ninguna verdad trascendente. La *logica nova* es, en cambio, una lógica natural y de "primera intención": busca unir las intenciones reales (el aspecto natural de las cosas) con la intención lógica (formal). La *logica nova* es una extensión y aplicación de su *ars* a todas las ciencias, de las que forma parte la lógica formal (aristotélica). El *ars* engloba, pues, a la lógica como una disciplina particular.

El Arte luliana, entendida por su autor en sentido amplio, es una "facultad" general, a la que cabe denominar, indiscriminadamente, "ciencia" y "arte".

Ciencia

Es ciencia (la ciencia general), porque procede a partir de principios "primeros, generalísimos, verdaderos y necesarios". Y todas las otras ciencias poseen principios subartenados a los suyos; de ahí la necesidad del *ars generalis* para acceder a las demás ciencias:

> "Quoniam intellectus humanus est valde plus in opinione, quam in scientia constitutus, eo quia quaelibet scientia habet sua principia propria, & diversa a principiis aliarum scientiarum; idirco requirit, & appetit intellectus, quod sit una scientia generalis, cum suis principiis generalibus, sub quibus principia aliarum

> scientiarum contineantur, sicut particulare in universali. Ratio huius est ut cum ipsis principiis generalibus alia principia sint subalternata, ordinata, & regulata; & ut intellectus in ipsis scientiis quiescat per verum intelligere, & ab opinionibus falsis removeatur. Per hanc quidem scientiam possunt aliae scientiae acquiri: principia enim particularia in generalibus huius artis apparent, & relucent; ac etiam applicantur, sicut pars applicatur suo toti"[1].

De esta ciencia general extraen, pues, sus principios las restantes ciencias particulares: la lógica, la filosofía natural, la metafísica, etc., tal como Llull se apresta a mostrar, por ejemplo en la *Logica nova* y el *Arbre de ciencia*.

Por eso, según Llull[2], quien domina el *Ars generalis* supera, sin duda, al lógico, pues el lógico deduce la conclusión de dos premisas verdaderas, y a veces incluso de una de ellas falsa, y también de ambas falsas. El artista, en cambio, deduce la conclusión de la combinación de los principios generales y de las reglas, que constituyen el verdadero centro y soporte del *Ars generalis*, y de cuyo centro o soporte, como de un medio general, se deducen todas las proposiciones verdaderas, como las partes de su todo en el que están implicadas y contenidas.

De lo anterior queda de manifiesto la máxima fecundidad del *Ars generalis* para resolver cualquier problema propuesto o cuestión dudosa, como Llull se apresura a mostrar en la Parte II del *Ars Magna* (discurriendo por cada una de las cuestiones y sus especies de todas las materias y sus cientos de formas), indicando siempre la solución, y de manera más organizada en el *Arbre de ciencia*, obra de madurez, en la que Llull estructura una enciclopedia de las ciencias de aquella época.

Arte

Esta "Facultad general" es también arte, porque todos los susodichos principios y reglas son dispuestos de forma artificiosa y se combinan en alfabeto, figuras y tablas. El arte luliana es un arte de combinar y de comparar términos, que partiendo de los principios generales y de las razones "necesarias" o"naturales", permite, mediante reglas necesarias, la obtención de verdades en los ámbitos de las ciencias particulares; es, por ello, este arte "scientiarum omnium janua" y "unica ars inveniendi medium". Ella debe regular todo el proceso de adquisición de verdades, por encima incluso del criterio de autoridad: las autoridades que no siguen y se atienen a los principios y reglas de este arte deben ser rechazadas. Y, finalmente, este arte, partiendo de la combinación de principios generales y de reglas, posee gran fecundidad para resolver cualquier problema propuesto o cuestión dudosa, ya que la cuestión o proposición dudosa contiene los extremos y por medio puede tomarse cualquier principio general del arte contraído a las condiciones de los extremos y asimismo combinarlo con otros principios y todas las reglas, todo lo cual proporciona al artista innumerables "rationes", de manera que este arte, al suministrar muchos términos medios, multiplica los silogismos y aventaja a la lógica peripatética que sólo dispone en el silogismo de un único término medio. Sin embargo, para un uso más firme del arte hay que atender siempre a las condiciones de los términos extremos de la cuestión a resolver, a fin de que se conserven sus diferencias y no se pierda su concordancia, mediante la que se condicionan mutuamente. Por eso enseña Llull[3] "Quod medium non debet esse generalissimum, nec specialissimum; sed medium inter omnino generale, et omnino speciale". Y por eso, también, las cuestiones a tratar mediante este arte -Las nueve materias propuestas en el *Ars Magna*- deben ser tratadas con cuatro condiciones que presenta Llull en el *Ars Brevis*[4], y mediante las cuales se regula el intelecto. Son éstas cuatro:

a) Que cualquier sujeto (materia) tenga su definición propia, con la cual sea diferente de cualquier otro. De manera que si se pregunta algo de ese sujeto, quepa responder de tal modo, afirmativa o negativamente, que las definiciones de los principios, y las reglas y las especies de éstas, concuerden con la definición del sujeto.

b) Que en el juicio y en el proceso del discurrir se conserven las diferencias de los sujetos, como por ejemplo, *Dios*, que difiere del *ángel*, por cuanto que Dios es infinito y eterno; el ángel, en cambio, es finito y con principio en el tiempo.

c) Que la concordancia que hay entre uno y otro sujeto no se destruya, como por ejemplo, *Dios* y *ángel*, que concuerdan en la espiritualidad; *ángel*, y *cielo* en la incorruptibilidad; *cielo* y lo *sublunar* en la corporeidad; *hombre* y *león* en la animalidad; y así sucesivamente.

d) Que si un sujeto es más alto y noble que otro, se le atribuyan más altos y nobles principios y reglas, como por ejemplo, *Dios*, que es más noble que el *ángel*; el *ángel* más que el *hombre*; y el *hombre*

---

[1] "Proaemium", *Ars Magna*, num. 1.
[2] *Ars magna*, Part. 10, cap. 14, art. 87, núm. 157.
[3] En *Ars magna*, part. 7, cap. 5, pág. 99.
[4] *Ars Brevis*, part. 9

más que el *león;* el *león* más que el *árbol*. Por lo tanto, los principios generales y las reglas descienden a los sujetos singulares y quedan condicionados por las condiciones de los sujetos; a los que, por tanto, es preciso atender siempre. En caso contrario, no habrá uso, sino abuso del arte.

Estructura y evolución del ars luliana

La primera formulación del *ars* es el *Ars Magna et maior*, sirviéndose para ello del compendio (especie de cuaderno de notas) sobre la *Lógica de Algazel* y de *Libre de contemplació en Dèu*, en los que utiliza procedimientos -las letras representativas de conceptos, las figuras geométricas y los árboles- que luego quedan incorporados y son desarrollados en el *Ars Magna*. Obra en la que Llull cree recoger, por inspiración divina, una nueva arte accesible a todos los hombres, que contiene en germen la ciencia universal y que sirve para resolver con infalibilidad matemática cuestiones de todo orden.

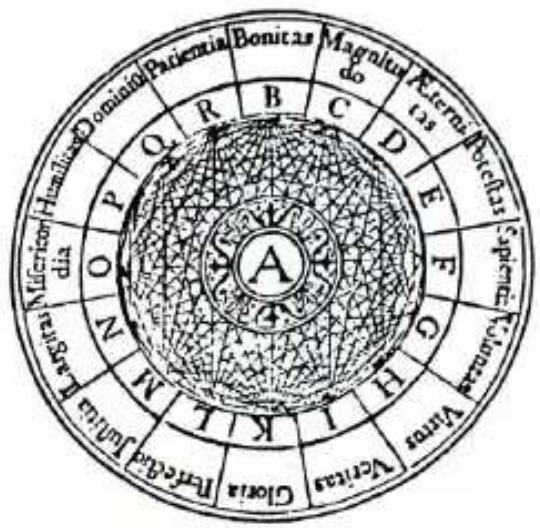
El planteamiento inicial es buscar las combinaciones posibles de los términos en sus funciones de sujeto o predicado en la proposición; esto es, dado un sujeto, encontrar todos los predicados; y viceversa: dado un predicado, buscarle todos los sujetos posibles. Para ello representa cada término (o concepto) por una letra, y por medio de combinaciones (binarias, ternarias, etc.) de las letras representativas, establece relaciones necesarias entre los términos de un juicio o de varios juicios entre sí. Según esto, fijados previamente los términos (o conceptos) de cualquier cuestión, mediante este procedimiento (arte) el entendimiento hallará por "razones necesarias" (por combinatoria) la solución adecuada. Y a esta operación de agrupar términos mediante combinaciones binarias, ternarias, etc. llama Llull "hacer cámaras": las cámaras son llenadas con proposiciones y soluciones y el llenado de las cámaras comprende siete "figuras" y dieciséis "modos". Todo ello elaborado con recursos plásticos y gráficos y uso de colores, que poseen su simbología.

El *Ars Magna et maior* se divide en tres "Distinciones":

Primera Distinción

En ella se exponen las figuras y su aplicación. Hay siete figuras designadas, respectivamente, con las letras A, S, T, V, X, Y, Z. Las cinco primeras y "principales" tienen su dibujo correspondiente en forma de círculo. Las dos últimas son "auxiliares": sirven para controlar el uso de las cinco principales.

La 1ª figura, A, trata de Dios y las dignidades divinas... (cuestiones teológicas)



La letra A, que simboliza a Dios, está en el centro del círculo, rodeada de 16 "cámaras", designadas por letras, que representan las "dignidades" o atributos divinos. B (Bondad), C (Grandeza), D (Eternidad), E (Poder), F (Sabiduría), G (Voluntad), H (Virtud), I (Verdad), K (Gloria), L (Perfección), M (Justicia), N (Largueza), O (Misericordia), P (Humildad), Q (Dominio) y R (Paciencia).

Las combinaciones binarias de estos 16 atributos divinos dan lugar a 120 "cámaras"[5], esto es, son posibles 120 relaciones necesarias entre los términos, relaciones que permiten al artista proponer y resolver todas las cuestiones teológicas, mediante la atribución a cada atributo divino, puesto como sujeto, los restantes atributos considerados como predicado. Así, cabe proponer, por razones necesarias, las siguientes proposiciones: B es C, B es D, ... B es R, esto es: la Bondad (divina) es Grandeza, la Bondad es Eternidad, ..., la Bondad es Paciencia.

La 2ª figura, S, trata del alma racional y sus potencias (cuestiones psicológicas). Está formada por un círculo con cuatro cuadrados (cada uno de un color) superpuestos, y dieciséis cámaras, correspondientes a los dieciséis ángulos de los cuatro cuadrados. Los cuadra-

[5] La fórmula combinatoria, en efecto, es: $C^2_{16} = \frac{16!}{2!\,(16-2)!} = \frac{16!}{2!\,14!} = \frac{14! \times 15 \times 16}{14! \times 2!} = \frac{15 \times 16}{2} = 120$

dos son las especies o potencias del alma, designadas con las letras E, I, N, R, puestas en uno de sus ángulos, y representando las otras tres letras en los otros tres ángulos de cada cuadrado los individuos o actos propios de cada especie o potencia. Así, por ejemplo, el cuadrado (la potencia) E (de color azul) tiene como actos: B (Memoria recordante), C (Entendimiento inteligente) y D (Voluntad volente).

La 3ª figura, T, trata de los principios y los significados (cuestiones lógicas). Está formada por cinco triángulos equiláteros (cada uno de un color) superpuestos e inscritos en un círculo y quince cámaras correspondientes a los quince ángulos de los cinco triángulos.

La 4ª figura, V, trata de las virtudes y los vicios (cuestiones morales). Está formada por un círculo con catorce cámaras: siete para las virtudes en fondo, y enlazadas por líneas, de color azul, y siete para los vicios, en fondo, y unidos por líneas, de color rojo.

La 5ª figura, X, trata de los opuestos o de la predestinación (cuestiones metafísicas). Está formada por un círculo con dieciséis cámaras, en cada una de las cuales aparece un concepto (representado por una letra) que tiene en el siguiente su opuesto, y, mediante combinaciones binarias, se forman 120 cámaras mediante las cuales el alma (figura S) adquiere el conocimiento de la predestinación cuando las concuerda con las figuras A, T, V (parte azul) e Y (de la verdad). A estas cinco figuras se añaden la figura Y, (sobre la verdad) y la figura Z (sobre el error) que sirven para controlar el uso de las figuras principales.

Segunda Distinción

Comprende dos partes: la primera trata de los 16 modos generales de los que derivan otros *muchos modos* y cuestiones y también las *condiciones* y las *reglas*. Cada modo es enunciado por una expresión general que anuda varias cuestiones (de la 1ª y 2ª intención, de la disputa, de la significación, de la potencia y la actualidad...) La *condición* es la conexión lógica entre dos o más términos. Y la *regla* es el uso correcto de las 7 figuras anteriormente representadas, tanto cada una de ellas en sí considerada como conexionadas entre sí.

En la segunda parte de esta Distinción se aplican los procedimientos del arte a los 16 modos y son planteados y resueltos, a modo de ejemplo, 7 cuestiones principales que constituyen un programa de conversión de los infieles, especialmente de judíos y musulmanes.

Tercera Distinción

Comprende también dos partes: la primera trata de los 30 "modos especiales", así llamados porque vienen especialmente determinados por 7 figuras, y de los 16 modos generales; conciernen a la acción y vienen expresados por verbos: ayudar, asociar, habituarse, concordar... En la segunda parte son planteadas y resueltas con la aplicación del arte 60 cuestiones de diversa índole: teológicas, morales, naturales, etc.

Completan el *Ars Magna* las *Reglas del Arte*, que definen el uso de cada una de las 7 figuras, y las *Definiciones de los principios del Arte*, referidas a los términos de las figuras, a los 16 modos generales y los 30 modos especiales.

A partir del *Ars Magna* Llull prosigue desarrollando su arte en dos direcciones: la primera, intentando perfeccionar y simplificar el artificio lógico con el fin de que resultase un instrumento infalible y a la vez de fácil manejo; la segunda, intentando aplicar el arte general a cada una las ciencias particulares. En la primera dirección llega a componer el *Ars Demonstrativa* (1274). Aunque presentada como un perfeccionamiento del *Ars Magna*, es, de hecho, más complicada y reproduce la mayoría de las figuras. Sin embargo, hay algunas diferencias notables entre ambas. A las figuras que ya aparecen en el *Ars Magna* se añaden en el *Ars Demonstrativa* una figura doble "elemental" (de los cuatro elementos) y otra, también doble, "demostrativa". También en el *Ars Demonstrativa* adopta un alfabeto de 23 letras con significaciones precisas, lo que tiene por objeto abreviar el esfuerzo del artista.

Durante algunos años (1277-1283) Llull considera su *Ars Demonstrativa* como una obra definitiva, por lo que sólo escribirá obras destinadas a hacer más accesible esta obra o a desarrollar especialmente algunas de sus partes. En todas ellas, como en ésta, Llull muestra predilección por un arte combinatoria basada en un ritmo cuaternario, que tiene su origen en la teoría tradicional de los cuatro elementos. Construyendo su arte a imagen del mundo material, emprende Llull la tarea de demostrar la verdad de los principios generales de su arte por analogía con los objetos naturales representados en los cuatro elementos. Y, puesto que los judíos y los musulmanes admitían la teoría de los cuatro elementos, cabe, sobre esta base común, reconducirlos a la verdad cristiana.

Con todo, la figura T (de los principios) es construida sobre una base ternaria; y ello para reproducir "la unidad y la trinidad que Dios ha puesto en las criaturas para significar su trinidad y su unidad".

Este arte general no resultó tan manejable como Llull había imaginado ni para los iletrados ni para los doctos, como él mismo comprobó al presentarla a los profesores y estudiantes de la Sorbona durante su estancia en París. Por ello Llull hace nuevos esfuerzos por simplificar y perfeccionar su arte: Se retira a Montpellier y escribe, en 1289, el *Ars inventiva veritatis*; y, tras su primera misión fallida a Túnez, en 1293, comienza la redacción de la *Taula general*. Ambas obras son fruto del

esfuerzo de Llull para la simplificación y perfeccionamiento de su arte; esfuerzos que se traducen en los siguientes resultados:

1) Reducción del número de figuras a 4.
2) Reducción de los atributos (dignidades) divinos a 9.
3) Reducción del alfabeto a 9 letras: B, C, D, E, F, G, H, I, K. Cada una de ellas representa un cierto número de principios.
4) Composición de una tabla de 24 columnas formadas por las diversas combinaciones de las letras. Constituye un instrumento lógico que permite descubrir las soluciones de las diversas cuestiones formuladas, con sólo fijarse en las significaciones de las letras del alfabeto y aplicarlas a la proposición, afirmando, negando o concordando los principios y las reglas.
5) Clasificación de las cuestiones, mediante el agrupamiento en torno a "9 sujetos", escala y compendio de los seres del universo: Dios, ángel, cielo, hombre, imaginativo, sensitivo, vegetativo, elementativo e instrumentativo.

Todos estos recursos hacen que el arte luliana resulte más formal y más matematizada, y son recapitulados por su autor, en un último y extraordinario esfuerzo por mostrar el valor de su arte, en el *Ars Generalis Ultima* (1305) y el *Ars Brevis* (1308). Esta última, compuesta a modo de compendio de, y de iniciación a, el arte, es una de las obras de Llull que mayor difusión ha tenido, y resume fielmente el *Ars Generalis Ultima*. Esta viene dividida en 13 partes: El alfabeto, las figuras, las definiciones, las reglas, la tabla, la "evacuatio" de la 3ª figura, y la "multiplicatio" de la 4ª figura, la combinación de los principios y las reglas, los nueve "sujetos", la aplicación del arte, las cuestiones particulares, el manejo del arte y el modo de enseñarla.

Los *principios* generales de esta arte son 18: los 9 primeros (absolutos) son: Bondad, Grandeza, Eternidad, Poder, Sabiduría, Voluntad, Virtud, Verdad y Gloria. Los otros nueve (relativos) son: Diferencia, Concordia, Contrariedad, Principio, Medio, Fin, Mayoridad, Igualdad, Minoridad.

El *alfabeto* comprende 9 letras: B, C, D, E, F, G, H, I, K, cada una de las cuales tiene 6 significados, puesto que representa: un principio absoluto, uno relativo, una cuestión general, un "sujeto", una virtud y un vicio. Por ejemplo, B = Bondad, Diferencia, Utrum, Dios, Justicia, Avaricia. Los tres primeros significados son teológicos y lógicos, en tanto que los tres últimos son metafísicos y morales; muestra de la preocupación de Llull por construir un arte que sirva, a la vez, para conocer la verdad y para comportarse bien.

Las *figuras* son 4. Así, por ejemplo, la 3ª figura está compuesta de la primera (designada por la letra A, en forma de círculo dividido en 9 sectores y referida a los 9 principios absolutos) y de la segunda (designada por la letra T, se compone de 3 triángulos inscritos en un círculo, y se refiere a los principios relativos). De manera que una letra vale, según sea de la 1ª o de la 2ª figura.

Consta de 36 cámaras dispuestas de la manera siguiente:

BC	CD	DE	EF	FG	GH	HI	IK
BD	CE	DF	EG	FH	GI	HK	
BE	CF	DG	EH	FI	GK		
BF	CG	DH	EI	FK			
BG	CH	DI	EK				
BH	CI	DK					
BI	CK						
BK							

Las dos letras contenidas en cada cámara indican el sujeto y el predicado, y la tarea del artista consiste en buscar el término medio que pueda unirlos y concluir con la proposición. Así, por ej., en la primera cámara están B C, siendo B = Bondad y C = Grandeza (ambas en la 1ª figura) y C = Concordancia (en la 2ª figura), cabe concluir que la Bondad y la Grandeza están unidas (término medio) por la Concordancia.

Las *definiciones* lo son de, y sirven para conocer, los principios generales. Así, por ejemplo, *Poder* es aquello por razón de lo cual la bondad, la grandeza, etc., pueden existir y obrar.

Las *reglas* son las 10 cuestiones generales incluidas en el alfabeto. Gracias a ellas se aclara el sentido de toda cuestión particular. Y son las siguientes: *Utrum* (de la posibilidad), *Quid* (de la esencia), *De quo* (de la materialidad), *Quare* (de la causalidad), *Quantum* (de la cantidad), *Quale* (de la cualidad), *Quando* (del tiempo), *Ubi* (del lugar), *Quomodo* (del modo), *Cum quo* (del instrumento).

La *tabla* está compuesta de 84 columnas, resultantes de hacer girar los círculos segundo y tercero de la cuarta figura de donde resultan combinaciones de 9 elementos (el alfabeto) de grado 3, esto es:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 84$$

Estas 84 combinaciones ternarias encabezan igual número de columnas, teniendo en cuenta que en esas combinaciones ternarias, las letras pueden ser de la 1ª figura (representativas de los principios absolutos) o de la 2ª figura (representativas de los principios relativos), caben

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = 20 \text{ combinaciones en cada columna}$$

que multiplicadas por las 84 columnas arrojan un total

COMPLUTENSE

de 1.680 cámaras. La letra *t* sirve para señalar que las letras que le preceden son de la 1ª figura y las que la siguen son de la 2ª figura. Así, por ejemplo en BCtB, tenemos que B y C, por ser de la 1ª figura, significan *Bondad* y *Grandeza*, respectivamente, en tanto que la última B, por ser de la 2ª figura, significa *Diferencia*. La traducción lógica de esta cámara es, pues, (tal como la da Llull): Cuestión: si existe alguna *bondad* tan *grande* que contenga en sí cosas *diferentes* y a ella coesenciales. Solución: afirmativa.

De manera que la tabla es un instrumento mediante el cual, en opinión del autor, son buscadas y encontradas sin dificultad las soluciones de cuestiones importantes. Llull traduce y pone ejemplos de las 20 primeras cámaras (de la 1ª columna).

El resto del *Ars Generalis ultima* comprende consideraciones más especiales.

La parte VI está dedicada a la "evacuación de la 3ª figura". Evacuar es extraer las proposiciones, las cuestiones y las soluciones contenidas en cada una de las 36 cámaras en que está dividida esta figura. Es, en suma, hacer explícitas todas las operaciones posibles, y constituye, por tanto, la parte "inventiva" o analítica del arte.

La parte VII, en cambio, dedicada a la "multiplicación de la 4ª figura", constituye la parte raciocinativa del arte: la "multiplicación" produce por rotación de los círculos móviles las 84 columnas y las 1.680 cámaras que antes hemos señalado. Pero la novedad de esta parte consiste en el intento de automatizar el silogismo mediante el descubrimiento "natural" del término medio contenido en el círculo mediano. El artista hallará mecánicamente el término medio en el círculo mediano. Así, por ejemplo, en la cámara BCD, resultante de la adecuada disposición de los tres círculos, C sería el término medio. Se puede, pues, formar el siguiente silogismo: Todo C es B; todo D es C; luego todo D es B (habida cuenta de las significaciones de estas letras dentro del alfabeto).

Por ejemplo, con las significaciones de la 1ª figura, tendríamos: Toda *Grandeza* es *Bondad;* toda *Duración* es Grandeza; luego toda Duración es Bondad; con las significaciones de la 2ª figura, en cambio, tendríamos: Toda *Concordancia* lo es entre *Diferentes;* ninguna *Contrariedad* es Concordancia; luego ninguna Contrariedad es estricta Diferencia.

Gracias, pues, a esta cuarta figura, puede el artista descubrir muchos términos medios, y, en consecuencia, puede acceder más fácilmente a las demás ciencias. El arte aparece, así, como la ciencia universal, que tiene principios y reglas generalísimas, en tanto que las demás ciencias tienen principios subalternados, y por eso en ellas el término medio es imperfecto; se hace preciso formar cámara en la que F (el término medio) funcione como tal en las tesis de dichas ciencias particulares.

El árbol de la Ciencia

La aplicación del arte a las ciencias particulares constituye la segunda dirección (antes señalada) en la que se desarrolla el arte luliana. Llull, fiel a su propósito inicial de hacer de su arte un *ars solvendi quaestiones de omni re scibili*, escribe en Roma, entre 1295 y 1296 (en un momento de profunda crisis espiritual, tras comprobar la indiferencia con la que Bonifacio VIII y sus cardenales recibieron sus proyectos de cruzadas y sus libros), el *Arbre de Sciencia (Arbor Scientiae)*. En esta obra emprende Llull el camino del realismo platónico-agustiniano. El simbolismo metafísico relega a un segundo plano las consideraciones específicamente lógicas y se busca la unificación del saber como representación de una concepción jerárquica del universo, adoptando como símbolo el árbol.

La obra, este árbol de la ciencia universal, está dividida en 16 partes o árboles. Los 14 primeros tienen un contenido propio, en tanto que los últimos son simplemente sus auxiliares. Estos 16 árboles son:

(1) Arbol "elemental": trata de la naturaleza de los elementos y sus propiedades físicas, cosmológicas y metafísicas. (Física, Cosmología y Metafísica).

(2) Arbol "vegetal" o de las plantas; es un tratado de botánica, con sus aplicaciones a la medicina (Botánica).

(3) Arbol "sensual" o de los animales; trata de los seres sensibles (Biología).

(4) Arbol "imaginal", concerniente a una facultad (imaginación) común al animal (ser sensible) y al hombre (ser racional) (Artes).

(5) Arbol "humanal": es una Antropología y una Psicología.

(6) Arbol "moral": estudia las virtudes y los vicios (Etica).

(7) Arbol "imperial": trata del régimen de los príncipes y de las personas políticas (Filosofía política).

(8) Arbol "apostolical", concerniente al gobierno eclesiástico y a la organización de la cristiandad. (Eclesiología).

(9) Arbol "celestial": trata de la naturaleza de los cuerpos celestes y de sus influencias sobre los seres terrenales (Astronomía y Astrología).

(10) Arbol "angelical", concerniente a los ángeles y la ayuda que prestan a los hombres (Angeología).

(11) Arbol "eviternal": trata de la inmortalidad, del paraíso y el infierno (Escatología).

(12) Arbol "maternal", sobre la Virgen María (Ma-

(13) Arbol "divinal-humanal", sobre Jesucristo (Cristología).
(14) Arbol "divinal": es un tratado de Teología.
(15) Arbol "ejemplifical": recoge ejemplos y proverbios útiles para la predicación.
(16) Arbol "cuestional": el más voluminoso; contiene 4.000 cuestiones, las cuales, con sus soluciones, constituyen un ejercicio indispensable para el arte de la controversia.

Cada uno de estos árboles se divide, por su contenido, en siete partes: raíces, tronco, brazos, ramas, hojas, flores, y frutos. Las raíces son los principios; el tronco, la conjunción de estos principios; los brazos, las ramas y las hojas son los géneros y las especies; las flores y los frutos son los individuos o los actos y fines.

En contraste con la forma estática, lógico-matemática del *Arte*, aparece en el *Arbol* un dinamismo interno expresado mediante el término "proceso" indicador de la savia vivificadora del árbol, según el cual no hay yuxtaposición entre las diferentes partes, sino nexos vitales de jerarquía natural: los diferentes árboles están jerarquizados; participan los superiores de los inferiores; y, de esta manera, en un movimiento ascendente, construye Llull un sistema del universo y de los conocimientos humanos agrupados en torno a tres temas centrales: el mundo, el hombre y Dios.

Esta obra pretende ser, no sólo una simple enciclopedia de las ciencias medievales, sino un esfuerzo de síntesis del saber de su época y un intento consciente de unificar el conjunto del saber humano. Con independencia de sus resultados este ideal de la unificación del saber formulado por Llull, aparecerá una y otra vez en la historia del pensamiento (con gran fuerza en el siglo XVII) como elemento propulsor del desarrollo científico, pero también como orientación y condicionamiento de dicho desarrollo.

La lógica *nova*

El arte luliana no es propiamente lógica, al menos en el sentido en el que venía desarrollándose la lógica escolástica. El arte aparece como un instrumento a la vez que como un sistema de conceptos básicos de todas las ciencias de las que la lógica forma parte. Y la especificación del arte en esta disciplina particular, en la lógica, es la *logica nova* (1303)[6]. Dice Llull que escribe esta nueva lógica para evitar los defectos de la antigua (la escolástica) que resulta prolija, vacilante y difícil de manejar. La nueva lógica, por el contrario, será simple, rigurosa y de fácil manejo. Tiene también, por objeto la indagación de lo verdadero y de lo falso, pero se diferencia de la aristotélica-escolástica en que esta última es una lógica formal, de "segunda intención", en tanto que la nueva lógica, vivificada por el arte general y del que es rama, es una lógica natural, de "primera intención". El sistema lógico de Llull, como luego el de Leibniz, es planteado como un sistema metafísico, no como un mero sistema convencional al modo del de Hilbert. Por eso, afirma Llull, planteamos, definimos y demostramos las cuestiones procediendo natural y lógicamente.

La *logica nova* está dividida en 7 distinciones: 1) Arbol natural y lógico; 2) Los predicables (o universales); 3) Las categorías; 4) Las definiciones; 5) El silogismo; 6) Aplicación de la lógica a otras ciencias; 7) Las cuestiones. Todas ellas, como se ve, constituyen materias específicas de la lógica tradicional. Pero algunas de ellas reciben un planteamiento novedoso en virtud del Arte general. Cabe destacar, a este respecto:

La terminología

Parte de la cual es tomada de la lógica escolástica, pero Llull trabaja también en el proyecto de construcción de un léxico filosófico universal, (la construcción de una *characteristica universalis*, en términos de Leibniz o de una *Gramática lógica pura*, en términos de Husserl). Llull busca la definición real de la cosa, la cual se alcanza discerniendo, dentro de un concepto general dado, las determinaciones esenciales que lo integran y expresando todas esas operaciones lógico-metafísicas añadiendo a la raíz común los sufijos correspondientes. Así: del concepto general *substantia*, derivan *substantiare*, *substantiale* y *substantiatum*, que son sus partes coesenciales; de *quantitas: quantificativitatem*, *quantificabilitatem* y *quantificare*, etc. y cada uno de los 9 principios absolutos (del Arte) tiene también sus correlativos esenciales. Así *Bondad* contiene lo *bonificante*, lo *bonificado* y *bonificar; Grandeza:* lo *grandificante*, lo *grandificado* y *grandificar*, etc. Aplicando este procedimiento establece Llull que el *Entendimiento* tiene como correlativos esenciales: *intelectivo*, *inteligible*, y *entender;* que *Natura* tiene como correlativos: *naturati-*

[6] Así como también otras obras: *Ars inveniendi particulari in universalibus* (1277?); *Liber de significatione* (1303); *Liber de ascensu et descensu intellectus* (1304); *Liber de demonstratione per aequiparantiam* (1304); *Liber de novis fallaciis* (1308); *Liber de* [illegible] *accidentis et compositi* (1308); *Tractatus de conversione subiecti et praedicati per medi-*

Liber de benatione substanciae, accidentis et compendium totius logicae nostrae, *Liber de demonstratione per aequiparantiam*, *Liber de ascensu et descensu intellectus*, *Liber de quinque sapientibus*, *Liber de quinque scalis*, *Liber de quinque essentiis*, *Liber de auditu kabbalistico*, *Liber de lectura Artis*, *Liber de Trinitate et Incarnatione*, *Liber de Deo et anima*, *Liber de Deo et mundo*, *Liber de Deo et homine*, *Liber de Deo et creaturis

BIBLIOGRAFIA

Ediciones principales de las obras de R. Llull

Opera omnia, 10 vols., ed. I. Salzinger. Maguncia, 1721-40.

Obres de R. Llull, Edició original, 21 vols., ed., M. Obrador, M. Ferrá, S. Galmés, M. Tous, R. Ginard. Palma, 1905-50.

Obras principales de Lógica

Art abreujada d'atrobar veritat (Ars compendiosa inveniendi veritatem seu Ars magna et maior) .Mallorca, 1271.

Art demostrativa (Ars demonstrativa). Montpellier, 1274.

Art inventiva (Ars inventiva veritatis seu Ars intellectiva veri). Montpellier, 1289.

Taula general (Tabula generalis ad omnes scientias applicabilis). Túnez-Nápoles, 1293-94.

Arbre de Sciencia (Arbor Scientiae). Roma, 1296.

Logica nova (Liber de nova logica). Génova, 1303.

Logica brevis et nova (Logica abbreviata) s. l., s. d.

Liber de ascensu et descensu intellectus. Montpellier, 1304.

Art breu (Ars brevis quae est imago artis generalis). Pisa, 1308.

Ars generalis ultima o *Ars magna generalis ultima*. Lyon, 1305 - Pisa, 1308.

Estudios sobre R. Llull

Pasqual, A. R., *Vindiciae lullianae*, 4 vols. Aviñón, 1778.

Littré, E - Hauréau, B., "Raymond Lulle", en *Histoire littéraire de la France*, XXIX. París, 1885, pp. 1-386; 567-568.

Carreras Artau, T. y J., "El escolasticismo popular: Ramon Llull (Raimundo Lulio)", en *Historia de la filosofía española. Filosofía cristiana de los siglos XIII al XV*, I, Madrid, 1939, pp. 231-640. Y "Esbozo de una historia filosófica del lulismo". *Ibidem*, II, Ma-drid, 1943, pp. 7-437.

Platzeck, E., *Raimund Llull: sein Leben, seine Werke, die Grundlagen seines Denkens (Prinzipienlehre)*. 2 vols. Roma-Düsseldorf, 1962-64.

Platzeck, E., "La combinatoria luliana. Un nuevo ensayo de exposición e interpretación de la misma a la luz de la filosofía general europea" (I), en *Revista de Occidente*, 47, 1953 y (II) *Ibidem*, 195, pp. 125-165.

Llinares, A., *Raymond Lulle, philosophe de l'action*. París, 1963.

Gandillac, M. de, "Le rêve logique de Raymond Lulle", en *Revue Philosophique de la France et de l'Etranger*, 157 (1967), pp. 187-221.

Cruz Hernández, M., *El pensamiento de Ramón Llull*. Ma-drid, 1977.

Rossi, P., *Clavis universalis: Arti mnemoniche e logica combinatoria da Lullo a Leibniz*, Milán, 1960.

Saiz Barberá, *Raimundo Lulio. Genio de la filosofía y mística española*, E. P. E. S. A., Madrid, 1963.

Casadessus, J., *El "Arte Magna" de R. L.*, Barcelona, 1917.

VIII. Humanistas y Cartesianos

1. Humanistas

Los humanistas de los siglos XV y XVI cambian la Lógica por la Retórica, Aristóteles por Cicerón y Quintiliano. La lógica se convierte en una disciplina propedéutica al servicio de las demás artes, y la demostración es sustituida por la argumentación, técnica más útil para las polémicas religiosas, para formar predicadores defensores de la Reforma o de la vieja fe. A ella acuden tanto los católicos, Vives, Latomus y Titelmans, como los protestantes, Melanton, Sturm y Ramus. Pero la reforma de la Lógica propuesta por los humanistas prendió con más fuerza en los ambientes intelectuales reformados que propugnaban una nueva cultura más pragmática y activista que la vieja escolástica. El mismo Lutero creía que la reforma de la Iglesia iba ligada a una reforma de la Lógica y de la Filosofía y que era preciso liberar a los espíritus tanto de la autoridad de Aristóteles como de la del Papa:

> "Credo quod impossibile sit Ecclesiam reformari, nisi funditus canones, decretales, scolastica theologia, philosophia, logica, ut nunc habentur erradicentur et alia instituantur" (En *Opera*. Ed. de Wette, T. I., p. 64).

Lorenzo Valla (1405-1457)

En sus *Dialecticae disputationes* (1439) trata a la Lógica como una parte de la Retórica. "Nam quid aliud est dialectica quam species confirmationis et confutationis? Hae ipsae sunt partes inventionis; inventio una ex quinque rethoricae partibus. Dialectici est syllogismo uti. Quid non orator eodem utitur? Immo utitur, nec eo solo, verum etiam enthymemate et epicheremate, adde etiam inductionem. Sed vide, quid interest: dialecticus utitur nudo, ut sic loquar, syllogismo, orator autem vestito"[1].

Los árbitros del lenguaje son los retóricos y los gramáticos, y si violan las reglas del lenguaje común éste resulta falso. De ello acusa Valla a Aristóteles y a sus seguidores, quienes creando palabras tales como *entitas, ecceitas, unum, bonum*, etc., y haciendo abstracción de lo singular han dado realidad metafísica a algo que de hecho no existe. Han falsificado, así, el pensamiento, por contravenir el lenguaje ordinario y por ignorar los preceptos de los gramáticos y de los retóricos. Se hace necesario, pues, eliminar de la Lógica (de la Dialéctica) cualquier contenido metafísico y hacer de ella una extensión de la Retórica, entendida ésta al modo quintilianeo: no como simple arte de persuasión, sino como ciencia comprehensiva de la expresión humana. La Lógica, reducida a parte de la Retórica resultaba para Valla, "brevis prorsus et facilis"[2], no sólo para el orador, sino también para el científico y el filósofo. La complicada lógica terminística con su estéril formalismo debía ser sustituida por una dialéctica simple y esencial, atenta a las formas del discurso lógico que se mueve, no sobre un plano apodíctico, sino sobre el plano de la posibilidad y de la probabilidad, con una función más bien argumentativa que demostrativa. Y por eso Valla cita toda la 5ª *Intitutio oratoria* (capítulo 10) de Quintiliano como la mejor fuente para la discusión de la demostración[3].

Rodolfo Agrícola (1443-1485)

Su obra *De inventione dialectica* alcanzó gran difusión en la 1ª mitad del siglo XVI y constituyó la fuente común para los lógicos humanistas, en especial para los del Norte (flamencos y alemanes): Melanton, Latomus, Caesarius, Sturm y Ramus.

---

1 En *Opera*. ed. cit., p. 693.

2 *Ibidem*, p. 693.

3 Quid sint argumenta, unde conficiuntur argumentationes, cognoscamus. De qua re cum nihil ego novi excogitare possim, ero nimirum praeceptis Quintiliani contentus". *Ibidem*, p. 760.

En cambio los humanistas italianos se mostraron más reacios a la influencia de Agrícola, prefiriendo a Valla y a Trebisonda (Trapezuntius). La Europa septentrional, más abierta a la Reforma, acogía mejor la reforma de la Lógica diseñada ya en buena medida por Agrícola y culminada por Ramus.

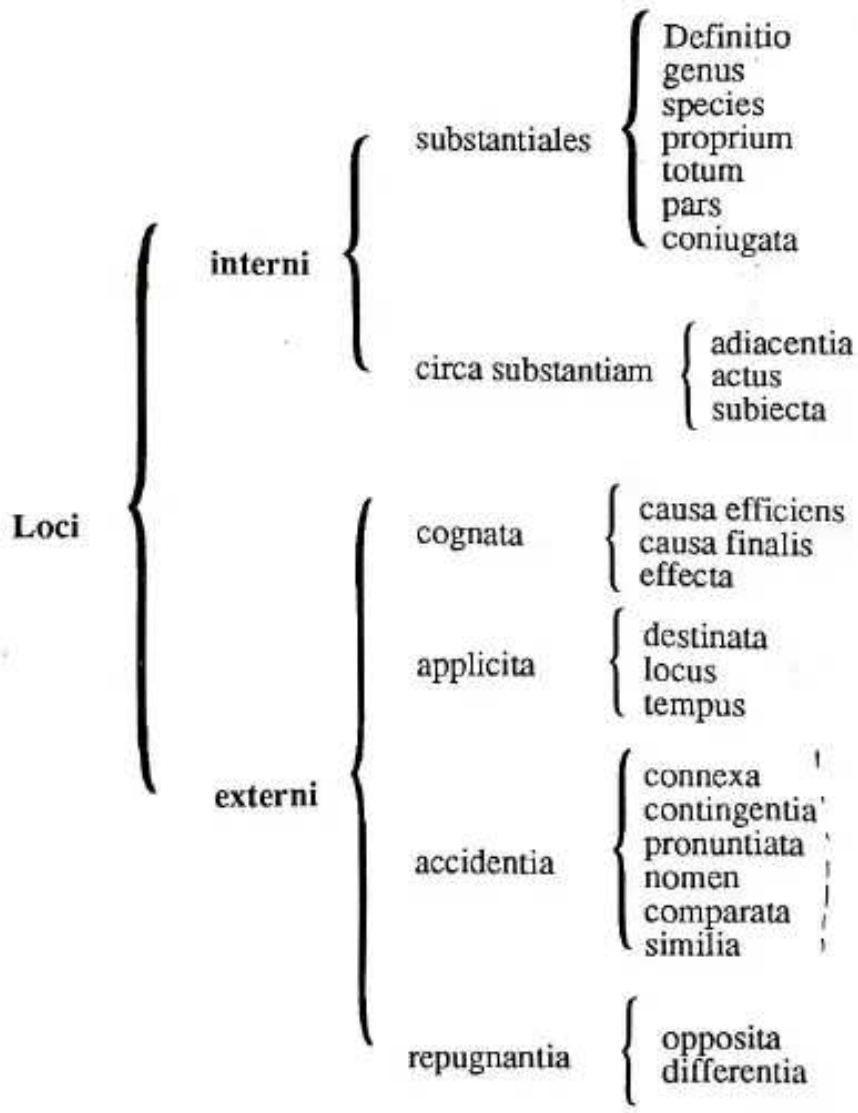
Agrícola, como antes Valla, acude al *Orator* de Cicerón para determinar el objeto de la Retórica y de la Lógica, así como las relaciones entre ambas. De las tres funciones que, según Cicerón, competen al *Orator (docere, delectare, permovere)*, Valla asigna sólo una *(docere)* a la Lógica, quedando ésta como parte subsidiaria de la Retórica. Agrícola, en cambio, considera que la función fundamental de todo discurso es el *docere;* en tanto que las otras dos sólo se requieren en circunstancias especiales. El discurso didáctico *(oratio docens)* tiene dos partes: exposición y argumentación. La Lógica tiene como objeto esta segunda parte de la *oratio docens* y comprende dos procesos distintos: la invención y el juicio. El primero lo extrae Agrícola de la Retórica, y constituye el fundamento de la nueva Lógica humanista; el segundo queda para recoger, de manera simplificada (tal como hará la *Isagoge dialectica* de Trebisonda), la lógica tradicional.

El *De inventione dialectica* constituye la nueva dialéctica humanística que, dejando de lado los procedimientos apodícticos y formales, pone su punto de apoyo en la *inventio* de los argumentos y los *loci seu sedes argumentorum*. La Lógica abandonaba, así, los métodos formales de la demostración por los métodos probables de la argumentación; dejaba de ser una disciplina de exactitud formal (como habían propugnado los grandes maestros del siglo XIV) para convertirse en una disciplina propedéutica que recoge un sistema de referencias "locales" como instrumento o como método para poner orden en la inmensa selva de nociones que el lógico debe recoger, discernir y coordinar.

> "Non ergo aliud est locus quam communis quaedam rei nota, cuius admonitu quid in quaque re probabile sit potest inveniri". *(De inventione dialectica*. Libr. I, cap. 2. Edic. de Colonia, 1539, p. 9).

Como maestros de la teoría de los *loci* cita a Aristóteles ("Scripsit de locis octo libros erudite et diserte, sicut omnia, sed angustius videtur eorum conclusisse materiam"), a Boecio, a Cicerón y a Temistio.

El confecciona la siguiente "tabula divisionis locurum". *(Ibidem*, p. 33):



Y también para Agrícola, como para Valla, el maestro por excelencia en el arte de tratar los *loci* como instrumentos o sedes de los argumentos es Quintiliano[4].

Johann Sturm (1507-1587)

Fue el gran difusor por Lovaina, París y Estrasburgo de la doctrina lógica de Agrícola, y ejerció una gran influencia en la Europa protestante, a través de su magisterio y de relaciones de amistad con Erasmo, Lefèvre, Melanton, Calvino, Ramus, etc.

Su manual de Lógica, apareció publicado por primera vez en París (1539) bajo el título *Partitionum dialecticarum libri duo*, en los que trataba, respectivamente, de la *inventio* y del *analysis dialectica*. En 2ª edición (Estrasburgo, 1543) añade un tercer libro, dedicado a la *demonstratio*, y en la edición de 1554 (también en Estrasburgo) lo completa con un cuarto libro dedicado a los sofismas.

Sturm diseñó su Lógica siguiendo las directrices de Agrícola, distinguiendo su dialéctica, como técnica de la argumentación, de la lógica apodíctica. La dialéctica "quae earum rerum est, quae dubitationem atque haesitationem habent, et probabilia argumenta ad utramque partem secum adferunt, quorum maior in omni disquisitione copia existit, iisque philosophi plurimum sunt usi, quae causa fuit ut eamdem rationem et logicen et dialecticen appellarint"[5]. Este arte de disertar de manera "probabiliter" y aplicable a cualquier disciplina consiste, en efecto, "in inveniendo, iudicando et collocando", esto es, sus tres partes son: la *inventio*, el *iudicium* y la *collocatio*. Y, siguiendo a Agrícola, Sturm coloca en primer lugar y en el puesto principal a la *inventio argumentorum*, enumerando los *loci* y las *quaestiones*, que, recogidos en Aristóteles (reduciendo sus categorías a simples *loci* generales de invención dialéctica) y en los demás dialécticos, pueden ser empleados en todas las artes y, por lo tanto, resultan útiles para todos los dominios del saber. En su lista de *loci* inserta no sólo los predicables sino también los predicamentos distinguidos por Aristóteles, cosa a la que ni Cicerón ni Agrícola se habían atrevido. Las "categorías" quedan, así, reducidas a simples *loci* generales de la invención dialéctica: su valor es meramente *lógico-sermocinalis*, *loci* que contiene todos los objetos en su más desnuda y esencial naturaleza.

El segundo libro de sus *Dialecticae partitiones* está dedicado a la teoría del *iudicium*, entendido como el arte de disponer y ordenar los argumentos del modo que quepa extraer una conclusión cierta o altamente probable. Y define la *ratiocinatio* como "oratio quae ex rebus aut probabilibus aut minus dubiis aut perceptis et affirmatis, id quod dubitabatur efficit"[6].

En el libro III, dedicado a la demostración, Sturm define ésta como la "disciplinalis propriaque doctrinae conclusio confecta ex necessariis"[7]. La demostración es el procedimiento lógico que parte siempre de principios evidentes y necesarios. Estos principios pueden ser, bien comunes a todas las formas del saber, bien específicos de cada una de ellas; pero, en cualquier caso, constituyen siempre el fundamento de un procedimiento lógico ejercitado mediante la división y la definición. La división y, guiada por ésta, la definición son los procedimientos metodológicos de la dialéctica más adecuados para la adquisición de cualquier disciplina:

> "A definitionibus plerumque in tradendis disciplinis faciendum exordium est, sed inspiciendum genus materiaque cuiusque doctrinae et considerandum quid simplex sit, quid compositum, quid multiplex, quid unicum, quid commune et generale, quid ad certam formam reductum aut singulare"[8].

Sturm hace de la división *(diairesis)* el principal de los tres métodos o vías de enseñanza; en su otra obra *In partitiones oratorias Ciceronis dialogi quattuor* (Argentorati, 1549, p. 3) distingue, siguiendo a Hermógenes de Tarsus[9] tres métodos o *rationes* de enseñanza: a) La que procede "a minimis simplicissimisque rebus", llamada *systasis* o *ratio* συστατική; b) la que va de lo complejo a lo simple, llamada *analysis* o *ratio* ἀναλυτική; y c) la que divide y distingue las definiciones en sus partes, la *diairesis* o *ratio* διαιρετική. Sturm se inspiró para hacer esta tripartición del método en la definición de los métodos o vías de enseñanza expuesta por Galeno en su *Ars Medica*[10]: el análisis (o *resolutio)*, la síntesis (o *compositio)* y la diairesis (o *partitio)*, si bien llama al segundo de los métodos *systasis*, en vez de *synthesis*, siguiendo a

---

4 *Ibidem*, p. 214: Rationem tractandi locos unus Quintilianus conatus est explicare et ostendere, quomodo inveniendum sit ex ipsis".

5 *Partitionum dialecticarum libri quattuor*. Argentorati, 1549, fol. 2 r-v.

6 *Ibidem*, fol. 101 v.

7 *Ibidem*, fol. 173 r.

8 *Ibidem*, fol. 196 r.

9 Retórico griego del siglo II. Principal representante de la tradición retórica bizantina. En su obra *Sobre el Status* (περὶ στάσεων) defiende la *diairesis* (división) como la más útil para el arte de la Retórica. Sturm tradujo sus obras al latín. La Edición moderna de las *Opera* de Hermógenes se debe a H. Rabe, en *Teubner, Leipzig*, 1913; reimprs. Stuttgart, 1969.

10 En *Opera*. Ed. Kühn, vol. I, pp. 305-306.

Ammonius (quien en su comentario a la *Isagogé* de Porfirio contrapone la *systatiké*, como método, a la *diairetiké)*. Y, en segundo lugar, Sturm presta la mayor atención al método de la *diairesis*, como el procedimiento dialéctico de mayor importancia, citando como autoridades, no sólo a Galeno y a los médicos, sino sobre todo, a Hermógenes y a Platón, recordando que los platónicos fundamentaron su lógica sobre la *diairesis*: "eam pro argumentatione atque conclusione usurparunt". Y si bien es consciente, como ya Aristóteles había denunciado, de que la diairesis no es demostración, insiste, sin embargo, en su utilidad para la búsqueda de la definición. La división es necesaria "ad investigandum, non ad demonstrandum".

También en la teoría sobre el método, introduce Sturm una distinción que hará luego fortuna en la obra de Ramus bajo la dualidad método de doctrina/método de prudencia; sólo que Sturm llama al primero método natural, y al segundo método del juicio o del artifice, pero las funciones que ambos autores asignan a cada uno de estos métodos coinciden: el primero ordena el material para la enseñanza; el segundo, para la argumentación: "Itaque cum duplex sit collocandi ratio, altera naturae, altera iudicii atque artificis"[11].

Con este tratamiento de la metodología (que pronto constituirá el tema central de filósofos y científicos) Sturm hace de la *collocatio* retórica, la tercera parte de la lógica humanista poniéndola al mismo nivel que las otras diseñadas y desarrolladas por Agrícola: la *inventio* y el *iudicium*.

Petrus Ramus (1515-1572)

Pierre de la Ramée (Petrus Ramus) fue discípulo de Sturm en París, a donde éste había llegado, en 1529, difundiendo las doctrinas y los métodos lógicos de Agrícola. Estos habían alcanzado ya bastante difusión en los ambientes humanísticos renanos, flamencos y alemanes; con Sturm penetran también en Francia. Ramus se encarga de completar la reforma de los métodos lógicos propuesta en el *De inventione dialectica* por Agrícola.

En sus *Aristotelicae animadversiones* y *Dialecticae partitiones* (ambas obras publicadas en 1543), ataca la lógica de Aristóteles, a la que tacha de oscura y confusa. En las *Dialecticae partitiones* trata de sustituir la lógica de la Escuela por una lógica más simple y más clara, y, siguiendo el método de Agrícola, extrae los elementos para su construcción de Platón, Cicerón y Quintiliano. Su hostilidad hacia Aristóteles y hacia la escolástica la pagó con su vida la noche de San Bartolomé, siendo asesinado por un fanático peripatético, Charpentier.

Con intención de sustituir en Francia la complicada e inútil lógica de la Escuela por otra que compendiase las enseñanzas de sus maestros los humanistas, publica Ramus en francés, en 1555, su *Dialectique*, que aumentada y completada edita al año siguiente en latín. La *Dialectique* es la primera obra de Lógica escrita en francés, y su autor consiguió el fin propuesto, ya que gozó de gran popularidad en los siglos XVI y XVII, hasta el punto de que a finales del siglo XVI los lógicos se agrupaban en aristotélicos y ramistas. Uno de los principales criterios para tal agrupación fue el método de la división dicotómica, que los ramistas, olvidando los orígenes antiguos griegos e inmediatos humanistas, atribuyeron como propio a Ramus, y le hizo famoso.

Por lo demás, Ramus estructura su *Dialectique* al modo de Agrícola y Sturm:

> "Las partes de la dialéctica son dos, invención y juicio. La primera declara las partes separadas de las que toda sentencia está compuesta; la segunda muestra las maneras y las especies de disponerlas, del mismo modo que la primera parte de la gramática enseña las partes de la oración, y la sintaxis describe su construcción"[12].

En la primera parte, concerniente a la teoría de la *inventio*, Ramus sigue a su maestro Sturm en la reducción de las categorías aristotélicas a simples *loci* de la invención dialéctica, en los cuales cabe encontrar los medios para la argumentación y la disputa, objeto de la Dialéctica (="art de bien disputer"); enumera los nueve *loci* generales siguientes: la causa, el efecto, el sujeto, la adjunción (o atributo), la oposición, la comparación, el nombre, la definición y la división. Todos ellos dan lugar a múltiples divisiones y subdivisiones dicotómicas, con ejemplos extraídos principalmente de los poetas y los oradores clásicos latinos.

En la segunda parte de su *Dialectique* trata Ramus la teoría del *iudicium* o disposición de las partes del discurso:

> "Juicio es la segunda parte de la lógica, que muestra las vías y los medios para bien juzgar mediante ciertas reglas de disposición... La disposición lógica tiene tres especies: enunciación *(enuntiatio seu axioma)*, silogismo, método"[13].

---

[11] *In partitiones oratorias...*, ed. cit., p. 78.

[12] *Dialectique*, ed. cit., p. 4.
[13] *Ibidem*, p. 134.

El silogismo es un tipo de argumentación "firme y necesaria"; consta de tres partes, que Ramus llama *propositio* (la premisa mayor), *assumptio* (premisa menor) y *complexio* (conclusión); y se divide en simple (cuyas partes son enunciaciones simples) y compuesto (cuyas partes, todas o alguna, son enunciaciones complejas). Los silogismos compuestos son de cuatro especies: *copulatus, relatus, connexus, disiunctus*. Los de las dos primeras especies se conforman con las leyes de los simples. El *conexus* (hipotético) y el *disiunctus* (disyunto exclusivamente) tienen reglas propias (Ramus recuerda las ya conocidas por los escolásticos).

Donde más fama alcanzó Ramus fue en la teoría del método y en particular por su distinción entre *methodus doctrinae* y *methodus prudentiae;* distinción que, sin embargo, como antes mencionamos, no es nueva y que el propio Ramus pone en Platón: "Orationis vis duplex est: altera certam scientiam veritatis, altera fidei persuasionem afferet, qua de re Plato... in Timaeo nos admonuit"[14].

El primero de los métodos es el propio de la lógica apodíctica, de la silogística; el segundo es el que usa la Dialéctica y transcurre por el terreno de la probabilidad y de la prudencia. Ramus, como fiel discípulo de los humanistas, escoge el segundo, advirtiendo, además, que para dominar las reglas de este método hay que acudir, no a las sutilezas de los escolásticos, sino a los poetas, oradores y filósofos clásicos; prefiriendo de estos últimos, por supuesto, a Platón, preceptor en la técnica que Ramus toma como dogma: la *diairesis*: La división y la definición constituyen las bases de la metafísica platónica y, asimismo, la vía más útil para la Dialéctica, ya que "res nil nisi definitur, distribuitur, confirmatur, quae secundi iudicii via est"[15].

Jacobo Zabarella (1532-1589)

Aunque bajo el influjo de los humanistas (más bajo el de Valla que bajo el de Agrícola), Zabarella sigue defendiendo a Aristóteles y su lógica. Siguiendo la doctrina peripatética, considera a la Lógica y también a la Retórica partes e instrumentos de la Filosofía. La segunda tiene como función principal enseñar *(docere)*, y constituye un instrumento del *homo civilis*, desempeñando en cuanto tal una función política; posee, ciertamente, un contenido argumentativo, y por ello Zabarella le reserva una buena parte en su sistema de Lógica.

La Lógica es entendida en sentido psicologista como una disciplina instrumental, no una ciencia, generada por un *habitus* que fabrica las segundas intenciones en los conceptos:

> "Est enim logica habitus intellectualis instrumentalis seu disciplina instrumentalis a philosophis ex philosophiae habitu genita, quae secundas notiones in conceptibus rerum fingit et fabricat, ut sint instrumenta, quibus in omni re verum cognoscatur et a falso discernatur"[16].

Y aún acentúa más el sentido psicologista al distinguir una *logica naturalis* y una *logica artificiosa*. Define la primera como "quidam naturalis instinctus et vis quaedam nullo humano studio comparata". A partir de ella, y observando un método y el uso que otros han hecho de ella, cabe confeccionar la lógica artificiosa; tal hizo Aristóteles.

También el método -cuya doctrina dio más fama a Zabarella, influyendo en Galileo y Leibniz- es entendido como *habitus intellectualis*, el cual "a mente nostra fit scientiam rerum investigante". Entendido en sentido amplio, el método se divide en[17]: a) *orden*, que no establece ilación alguna entre las cosas, sino que sólo dispone aquéllas tomadas en consideración; b) *Método*, que no sólo dispone las partes de la ciencia, sino que posee además fuerza ilativa; es un proceso silogístico que tiene necesidad ilativa.

Tanto los órdenes como los métodos se dividen en *compositivos* y *resolutivos*. Esta división dice Zabarella extraerla de Aristóteles y ser doctrina firme. En efecto, Aristóteles distingue[18] el orden de la naturaleza de las cosas (τῷ ὄντι) del orden de nuestros conocimientos (πρός ἡμᾶς). En correspondencia, Zabarella establece estos dos órdenes:

> "Duo igitur soli ordines dantur, qui ex ipsa rerum congnoscendarum natura, prout a nobis cognoscendae sunt, deducuntur, unus est compositivus... alter est resolutivus"[19].

El primero es propio de las disciplinas teóricas (Metafísica, Matemáticas, Física); procede yendo de los primeros principios hacia las consecuencias. El segundo se emplea en las disciplinas prácticas que buscan un fin; va del fin propuesto hacia la investigación

[14] *Dialecticae institutiones*. ed. cit., fol. 31. v.
[15] *Dialecticae institutiones*, ed. cit., fol. 30 r.
[16] *De natura logicae*, en *Opera logica*, edic. de Colonia, 1597, p. 52.
[17] *De methodis*, en *Opera logica*, ed. cit., p. 139.
[18] *Primeros Analíticos*, I, 18.
[19] *De methodis*, en *Opera logica*, ed. cit., p. 180.

de los primeros principios. Estos dos, son, asimismo, las especies de métodos, sólo que añadiendo a los órdenes la necesidad ilativa de la que aquéllos carecen:

> "Duae igitur scientificae methodi oriuntur, non plures, nec pauciores, altera per excellentiam demonstrativa methodus dicitur, quam... demonstrationem propter quid appellare consueverunt, altera quae ab effectu ad causam progreditur resolutiva nominatur, huius modi enim progressus resolutio est, sicuti a causa ad effectum dicitur compositio... Has duas methodos in Aristotelis diciplina reperio, demonstrativam et resolutivam, alias nec posuit Aristoteles, nec ratio videtur admittere"[20].

Si la doctrina del método de Ramus, extraída de poetas y retóricos, fue ignorada por los cinetíficos modernos, la de Zabarella, en cambio, inspirada en los matemáticos (Pappus de Alejandría) tuvo fuerte influencia en Galileo y Leibniz y resultó fértil en la ciencia moderna.

2. Cartesianos

Descartes

En la época moderna, sobre todo a partir de la revolución científica de Galileo, la Lógica como auxiliar de las ciencias es suplantada por la Matemática. Descartes[21] no pone a la Lógica entre las ciencias ya inventadas que contienen conocimientos ciertos e indubitables. El motivo es que la Lógica resulta inútil e ineficaz para la búsqueda de la verdad, esto es, no sirve de *método*, de "recherche", para el que Descartes fija estos dos objetivos[22]: a) evitar el error, que no nos induzca a tomar como verdadero lo que es falso; y b) asegurar que el espíritu llegue al conocimiento de todo lo que sea capaz de alcanzar. Y, tal como Descartes la concibe, la lógica peripatética no puede satisfacer estos objetivos; ni el primero, porque la sola forma sólo puede garantizar, a lo sumo, la implicación de una conclusión desde una suposición, pero no la verdad de la suposición; ni el segundo, porque la lógica

> "nihil omnino conferre ad cognitionem veritatis... nullum posse Dialecticos syllogismum arte formare, qui verum concludat nisi prius eiusdem materiam habuerint, id est, nisi eamdem veritatem, quae in illo deducitur, iam ante cognoverint"[23].

La lógica como instrumento de "recherche" es, no sólo inútil, sino también un obstáculo, "porque no puede añadir nada a la pura luz de la razón que no lo oscurezca de algún modo"[24]. El símil, recogido luego por la *Logique* de Part-Royal, es éste: considerar que la función de la Lógica (dialéctica) es dirigir la razón humana prescribiéndole ciertas formas de discurrir, es similar a considerar que un niño aprende a andar aprendiendo las reglas del movimiento y del equilibrio (la Mecánica). Si no sabe andar, no aprenderá jamás aprendiendo mecánica; y, cuando anda, la reflexión sobre las leyes de la Mecánica y el esfuerzo dedicado a su observación disminuirá, sin duda, la seguridad y el rendimiento de sus movimientos. Similarmente, la observancia de las reglas de la Lógica no sólo no ayudará a bien discurrir, sino que puede incluso perturbar la buena marcha de la razón natural. El sometimiento a las reglas y preceptos de la Lógica puede degenerar en charlas y juicios sobre cosas que se ignoran. Por todo ello, Descartes contrapone al formalismo lógico su método material: en la "recherche de la verité" no basta, ni sirve la deducción formal; es preciso la intuición intelectual; y sólo apoyada en ésta puede funcionar aquélla; sólo cuando hay intuición de las ideas claras y distintas y éstas constituyen el punto de partida de la deducción es posible alcanzar la verdad, no sólo formal sino también materialmente. El método exige asegurar, al mismo tiempo, la certeza absoluta y la aplicabilidad a la realidad; no basta adormecer el espíritu con la falsa seguridad de las reglas, sino que es preciso estar vigilante y acrecentar la luz natural de la razón. Por eso, no se trata de escribir un tratado del *Método* cual recetario disponible para el discurrir, sino de un *Discurso* exhortativo al ejercicio y a la práctica, puesto que el método consiste más en una acción que en una teoría; más en un hábito intelectual que en el aprendizaje de libros. Por eso la recomendación de Descartes es: dejemos los libros y consultemos la razón y aprendamos a bien pensar, puesto que la razón aplicada con sinceridad y naturalmente a las cosas que se le presentan puede sacar por sí misma un sistema de verdades encadenadas que reproduzcan el mundo en lo que tiene de real e inteligible. Y, si la razón tiene tal potencia, el mayor o menor desarrollo de la ciencia obedece a las diferencias de métodos. La "nueva" filosofía exige un "nuevo" método, que Descartes extrae de las Matemáticas, "a causa de la certeza y de la evidencia de sus razonamientos". Y para no embrollar al espíritu con un gran número de preceptos (como hace la Lógica),

---

[20] *Ibidem*, p. 230
[21] *Regulae*. Edic. Adam-Tannery, vol. XI, p. 363. Citamos por esta edición.
[22] *Ibidem*, p. 372.
[23] *Ibidem*, p. 406.

[24] *Ibidem*, p. 372.

Descartes reduce a cuatro todos los preceptos de su método[25]:

1. "No aceptar nunca como verdadera ninguna cosa que no conociese con evidencia que lo era; es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención; y no comprender en mis juicios nada más que aquello que se presentaba tan claro y tan distinto a mi espíritu que no tuviese ocasión alguna de ponerlo en duda".
2. "Dividir cada una de las dificultades que examinase en tantas partes como fuera posible y como requiriese su mejor solución".
3. "Conducir por orden mis pensamientos, comenzando por los objetos más sencillos y más fáciles de conocer, para ascender poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más compuestos, e incluso suponiendo un orden entre los que no se preceden naturalmente".
4. "Hacer en todo enumeraciones tan completas y revisiones tan generales, que estuviese seguro de no omitir nada".

Estos cuatro preceptos poseen en el pensamiento de Descartes un sentido muy preciso. El primero rechaza la autoridad, afirma la independencia absoluta de la razón y coloca la *evidencia* como criterio de verdad. Para que haya evidencia es necesario que la razón, despojada de toda influencia de los sentidos y de la imaginación perciba con *claridad* y *distinción*. Se trata, pues, de una evidencia racional, no sensible. Y el acto de la razón que percibe directamente la verdad es la *intuición*. "Evidencia", "intuición" y "luz natural" son todos conceptos que hacen referencia a un estado, a una disposición del sujeto, del espíritu ("un espíritu sano y atento"), no a normas o reglas (lógicas), ya que "ninguna definición lógica" enseñaría la verdad, "si no se la conociera por naturaleza"[26].

El precepto 2 recoge la regla V de sus *Regulae*, recomendando que para resolver una cuestión hay que ir de lo desconocido a lo conocido; lo cual no es posible más que si lo desconocido tiene alguna relación definida con lo conocido. Hay que retrotraer las cosas compuestas a las simples; las relativas a las absolutas; las difíciles a las fáciles: tal es el *análisis* cartesiano. Se puede construir el mundo con unas pocas ideas claras y distintas (extensión, figura, movimiento, etc.) que se encuentran en todas las cosas y que hay que saber discernir.

Tras haber descubierto mediante el análisis las naturalezas simples, los principios inteligibles, se hace necesario, siguiendo el precepto 4, ascender *sintéticamente*, combinando las ideas simples, hacia el todo y recrear la realidad. Es preciso que la razón busque no sólo los elementos simples, sino también la necesidad de sus relaciones; necesidad que la razón descubre por intuición. Mas, como se dan muchas partes, la intuición no puede ser inmediata, única, sino que ha de alargarse temporalmente y dividirse; deviene, entonces, *deducción*. La deducción es una intuición sucesiva, fragmentaria que no podemos abarcar de una sola vez, sino que viene paso a paso "como por grados" y "suponiendo un orden", porque el orden constituye "el gran secreto" del método.

El precepto 4 es una consecuencia de los otros tres: el proceso a seguir indicado por los tres primeros preceptos ha de discurrir con orden y con enumeración exacta de todas las circunstancias de aquello que se busca, a fin de que todos los términos estén rigurosamente encadenados.

Con todo, antes de poner en funcionamiento este método es necesario purificar el espíritu, despojar a la razón de prejuicios dejándola en su estado natural, para que, luego, la aplicación de los preceptos del método resulte oportuna y útil. El método es, en definitiva, una terapia intelectual para llegar al descubrimiento sistemático de la verdad y a la eliminación del error. Los lógicos de Port-Royal se esfuerzan por insuflar este nuevo espíritu metodológico en la Lógica.

La lógica de Port-Royal

Concepto de la lógica

La logique ou l'art de penser apareció anónimamente en 1662; es obra de los jansenistas Antoine Arnauld (1612-1694) y Pierre Nicole (1625-1695); alcanzó gran fortuna, siendo el texto en el que durante dos siglos se formaron en los estudios de Lógica, y no sólo en Francia, gran número de generaciones. Sólo en Francia aparecen en los dos siglos siguientes a su publicación más de 50 ediciones, a la vez que múltiples traducciones al latín, al inglés, al español, etc., destinadas a la enseñanza de la Lógica en los principales centros de enseñanza de Europa. La obra ocupa, pues, una posición clave en la historia de la Lógica; Es, además, una de las pocas obras de la Edad renacentista y moderna en la que se expone con vigor la lógica formal tradicional penetrada, al mismo tiempo, del espíritu cartesiano, en un período en el que aún resonaban las críticas de Descartes (y también de Bacon) a la lógica formal o de la Escuela.

[25] *Discours de la Méthode*. Ed. Adam-Tannery, vol. VI, p. 18.
[26] Carta a Mersenne de 16-X-1639, en Adam-Tannery, vol. XII, p. 76.

Arnauld y Nicole, cartesianos acérrimos y polemistas incansables, se vanagloriaban de haber compuesto *La logique* en cinco días, por motivo de una apuesta y destinada a iniciar al duquesito Henry Chevreuse en los misterios de la ciencia peripatética. Esta concepción inicial explica, en gran parte, el carácter de la obra: la lógica no es un cuerpo de reglas, sino un conjunto de "reflexiones que los hombres han hecho sobre las cuatro operaciones principales de su espíritu, concebir, juzgar, razonar y ordenar..., todo lo cual se hace naturalmente, y a veces mejor por aquellos que no han aprendido ninguna regla de Lógica que por aquellos que las han aprendido"[27]. La lógica no nos enseña, pues, a pensar; pensamos naturalmente. Mas dado que la naturaleza está corrompida y disociada de la razón, hay que esforzarse por reformarla humanamente y hacerla disponible para la gracia. Por influencia directa de Pascal (los *Pensamientos)* e indirecta de la tradición platónico-agustiniana injertada en el jansenismo, es la justeza del espíritu lo necesario para encontrar la verdad de las ciencias. Porque el fin último de la Lógica no son éstas, sino la vida eterna; si bien el fin próximo es el arte de formar el juicio. Hay que conseguir un perfeccionamiento del espíritu, y para ello es necesario disponer de algún método o sistema, porque los hombres con ideas claras escasean ("el sentido común no es una cualidad tan común como se piensa"), y la mayoría se deja arrastrar por la opinión, cayendo en el error y resultanto difícil hallar la verdad. Las causas generales de nuestros errores pueden reducirse a dos[28]: una interior, que es el desarreglo de la voluntad, que turba y confunde al juicio; otra exterior, consistente en que los objetos que se juzgan engañan a nuestro espíritu con una falsa apariencia. La mayoría de las veces los falsos juicios se deben a la precipitación y a la falta de atención que nos lleva a juzgar temerariamente sobre cosas que sólo conocemos confusamente. Y ante las dos actitudes opuestas: la del dogmático, que prefiere ser crédulo antes que confesar la propia ignorancia, y la del escéptico, que prefiere dudar de todo antes que molestarse en examinar cada caso con atención, los autores proponen el esfuerzo y la atención constante a nuestros juicios y razonamientos. Sólo así alcanzaremos la verdad, la cual se da a conocer a sí misma; cuando se la encuentra, es inconfundible, porque, como decía Descartes, es autoevidente. No se llega a ella mediante el aprendizaje de recetas y la aplicación de reglas, sino juzgando sanamente. Y el error de los hombres no consiste en dejarse engañar por malas consecuencias, sino en que "se dejan llevar a falsos juicios y, por tanto, sacan malas consecuencias". Hasta el momento -dicen- la Lógica se ha ocupado preferentemente de los razonamientos, de la argumentación, de los silogismos. Este enfoque adolece de dos defectos principalmente: a) que los casos que estudia son ejemplos *ad hoc*, totalmente artificiales e incluso banales, que tienen difícil aplicación a los problemas que los hombres encuentran en su vida cotidiana; y b) se han confeccionado unos sistemas de reglas y preceptos, tan complicados, tan difíciles de seguir e incluso de retener en la memoria, que a la postre resultan prácticamente inútiles.

Ante esta situación, los autores, sin querer abandonar el estudio de los razonamientos, llaman la atención sobre el estudio de las *ideas* y de los *juicios*. Lo importante, insisten, es enseñar a los hombres, no tanto a razonar correctamente, cuanto a juzgar sanamente. El arte de razonar debe estar subordinado al arte de pensar. Como su título indica, la lógica es un arte, no una ciencia. Y es un arte, no de combinar palabras o fórmulas, sino por el que se aprende, mediante fórmulas verbales, a pensar mejor. Es una disciplina práctica, ejercicio de nuestro juicio para hacerlo más seguro, no sólo para la ciencia, sino para todas las circunstancias en las que hay que usar nuestra razón. De ahí el acudir constantemente a ejemplos. Imbuidos del espíritu cartesiano, por una parte, apelan constantemente a las ideas claras y distintas, a las luces naturales, al "buen sentido"; y, por otra, desprecian las enseñanzas de la Escuela: hay que examinar la solidez de un razonamiento por la luz natural más que por las formas. Las reglas, que profusamente exhiben los manuales de Lógica, si no son inútiles, no garantizan el buen juicio, objeto primordial de la Lógica. Con todo, los autores señalan (en el "Discurso primero") qué cosas han incluido, (sacadas de los manuales de Lógica de su tiempo) y cuáles no y por qué.

En primer lugar, han incluido lo verdaderamente útil: las reglas de las figuras, las divisiones de los términos y de las ideas, algunas reflexiones sobre las proposiciones y también "cosas inútiles", pero porque eran cortas, fáciles, y comunes; aunque advirtiendo que no debe concedérseles más utilidad de la que tienen: por ejemplo, las categorías y los tópicos.

Más dudosa ha resultado la inclusión de "materias espinosas, difíciles y poco útiles", como la conversión de las proposiciones, la demostración de las reglas de las figuras, etc.

[27] *Introducción*, ed. cit., p. 38.
[28] Parte III, cap. XX.

Y, finalmente, han omitido "un gran número de cuestiones que aparecen en las lógicas ordinarias, como aquellas que se tratan en los prolegómenos, el universal *a parte rei*, las relaciones y otras muchas similares, debido a que estas cuestiones pertenecen más a la Metafísica que a la Lógica, si bien no es este el motivo principal, pues cualquier cosa que resulte útil para formar el juicio, sin necesidad de reparar en saber a qué ciencia pertenece, es parte de la Lógica: "Tout ce qui sert à la Logique lui appartient"[29]. De ahí lo ridículos que son los intentos de Ramus y de los ramistas de establecer la jurisdicción de cada ciencia.

Estructura de la Lógica

"La lógica es el arte de conducir bien la razón en el conocimiento de las cosas tanto para instruirse a sí mismo, como para instruir a los demás. Y este arte consiste en las reflexiones que los hombres han hecho sobre las cuatro operaciones principales de su espíritu: concebir, juzgar, razonar y ordenar"[30].

Todas estas operaciones del espíritu se hacen "naturalmente". Sin embargo, los hombres cometen errores en estas operaciones, por lo que el reflexinar sobre ellas puede resultar útil en tres aspectos: a) aseguramos de que usamos bien la razón; b) descubrir más fácilmente los errores que podamos cometer; y c) conocer mejor la naturaleza de nuestro espíritu por medio de la reflexión sobre nuestras acciones; como los pensamientos parecen ir ligados a las palabras, en Lógica es necesario considerar las palabras unidas a las ideas y viceversa.

A partir de estos presupuestos, los autores dividen su lógica en cuatro partes: 1) sobre las *ideas;* 2) sobre los *juicios;* 3) sobre el *razonamiento;* 4) sobre el *método*.

Sobre las Ideas

En esta primera parte los autores siguen la teoría cartesiana sobre las ideas, incluyendo (debido al cambio terminológico) los temas que en la lógica tradicional caían bajo el dominio del *concepto*. Sobre la naturaleza y origen de las ideas los lógicos de Port-Royal siguen a Descartes.

La idea no debe confundirse con la imagen: hay cosas que conocemos sin provenir de imágenes (el pensamiento, el ser, Dios). Reconozcamos, pues, que "nuestra alma posee la facultad de formar ciertas ideas a partir de sí misma..." Los objetos de nuestras ideas son, o sustancias (cuerpo) o modos, cualidades (redondez), o cualidades y sustancias en su conexión (cuerpo redondo). En el lenguaje, las sustancias son designadas por sustantivos (tierra, sol); los modos, por sustantivos abstractos (dureza). Sobre la distinción entre modos, y sustancias reproducen la regla cartesiana: el modo no puede ser concebido claramente sin la idea de una sustancia a la que pertenezca; la sustancia, en cambio, puede ser conocida sin el modo; dos sustancias son distintas cuando se puede tener una idea clara y distinta de la una sin pensar en la otra (extensión, pensamiento). Así mismo oponen[31] a las diez categorías de Aristóteles las categorías del cartesiano Regius:

Mens, mensura, quies, positura, figura,
sunt cum materia cunctarum exordia rerum,

especificando que se puede dar razón de toda la naturaleza con sólo considerar en ella estas siete cosas o modos: 1º *Mens*, el espíritu o la sustancia que piensa; 2ª *Materia*, el cuerpo o la sustancia extensa; 3º *Mensura*, la magnitud o la pequeñez de cada parte de la materia; 4º *Positura*, su situación en relación unos con otros; 5º *Figura*, su figura; 6º *Motus*, su movimiento; 7º *Quies*, su reposo o menor movimiento.

En el cap. VI introducen una de las distinciones que más relevancia tendrá en la historia de la Lógica: la distinción, en las ideas generales, entre *comprensión* y *extensión*. La distinción no es, en sí misma, nueva; pero sí lo es el término *comprensión* como designativo de esa noción y en cuanto opuesto a extensión. Hay una confusión en la determinación de estas nociones.

Primero definen[32] la *comprensión* de una idea como "los atributos que ella encierra en sí, y que no se le pueden quitar sin destruirla, como por ejemplo, la comprensión de la idea de triángulo encierra extensión, figura, tres líneas, tres ángulos y la igualdad de estos tres ángulos a dos rectos, etc". Y la *extensión* de una idea, como "los sujetos a los que esta idea conviene, aquello que se llama también los inferiores de un término general, que en relación con ellos es llamado superior, como por ejemplo, la idea de triángulo en general se extiende a todas las diversas especies de triángulos".

Mas, luego, al explicar estas definiciones, dicen que "hay, sin embargo, esta diferencia entre los atributos que la idea comprende (comprensión) y los sujetos a los que se extiende (extensión): que no se le puede quitar ninguno de sus atributos sin destruirla, como ya hemos

[29] *Discurso primero*, ed. cit., p. 24.
[30] *Introducción*, ed. cit., p. 37.
[31] Parte I, cap. III.
[32] Parte I, cap. VII, p. 59.

dicho, al contrario de lo que sucede en cuanto a su extensión, que puede no aplicarse a algunos de los sujetos a los que conviene sin que por ello se la destruya".

Esta última caracterización de la extensión no concuerda con la primera (tal como es ejemplificada). En la primera, los inferiores, son *especies* (las distintas especies de triángulos); y, así entendidos los inferiores, no cabe decir (caraterización segunda) que "puede no aplicarse a algunos de los sujetos (= a alguna de las especies) sin que por ello se la destruya. Para que sea posible la segunda caracterización, los inferiores han de ser entendidos, no como especies, sino como *individuos*. Mas aún estaba lejos una aportación fundamental de Peano que precisa (introduciendo los signos pertinentes: $\in$ y $\subset$) las relaciones de pertenencia (de un individuo a una clase, género) y de inclusión (de una clase o especie en otra clase o género).

También siguiendo a Descartes, distinguen los lógicos de Port-Royal entre ideas claras y oscuras, distintas y confusas. Las ideas claras son aquellas que tenemos de nosotros mismos, de nuestras facultades, de la extensión y de sus determinaciones esenciales (figura, movimiento, etc.), del ser, de la duración, del número y de Dios. Las ideas oscuras son aquellas que tenemos de las cualidades sensibles, colores, sonidos, o también ideas de la moral, los prejuicios, las ilusiones etc. Las causas de esta oscuridad son múltiples.Una muy importante es que muchas veces las palabras (necesarias como signos para entendernos) no responden a la idea principal, sino que suscitan ideas accesorias y oscuras. El remedio está en la aplicación correcta de la definición nominal *(definito nominis)*, que hay que distinguir de la definición real *(definitio rei)*. Tenemos derecho a fijar el sentido de las palabras de las que nos servimos. Y estas definiciones nominales se caracterizan porque son arbitrarias, incontestables y pueden servir de principios; en lo cual difieren de la definición real, que ya no es arbitraria y puede dar lugar a discusión. A las definiciones nominales se aplican estas dos reglas: 1) no dejar ninguno de los términos un tanto oscuros o equívocos sin definir; 2) no emplear en las definiciones más que términos perfectamente conocidos o ya explicados. La definición real, en cambio, no depende de nosotros, sino de aquello que está encerrado en la verdadera idea de una cosa.

La caracterización que los lógicos de Port-Royal hacen de la definición nominal difiere de la *definitio nominalis* de los escolásticos; ésta no es más que la explicación de lo que una palabra significa según el uso ordinario del lenguaje, con lo cual se producirá, luego, cierta confusión, según se utilice la distinción escolástica o la de los lógicos de Port-Royal. Será Leibniz quien precisa, en un nuevo sentido, la distinción *(Nuevos Ensayos*, III, cap. III, 15 y 19) y también Espinosa (Carta a Simon Vries, *Opera*, II, edic. Gebhardt, p. 352).

Sobre los juicios

En esta parte se discuten cuestiones como las siguientes: las palabras en relación con las proposiciones, las proposiciones y sus clases, la definición y la conversión de las proposiciones. Se resumen las teorías tradicionales de la Escolástica sobre la oposición, conversión, modalidad, etc., y los autores prestan atención a consideraciones de orden más estrictamente gramatical, asociando estrechamente el análisis lógico al análisis gramatical hasta el punto de borrar el límite de ambos dominios; y, así, no distinguen entre "juicio", "proposición" u "oración", ya que "importa poco examinar si es a la Gramática o a la Lógica a quien corresponde tratar esto; baste decir que todo lo que es útil al fin de cada arte le pertenece"[33]. Esta "confusión" de la Lógica con la Gramática es producto de la tradición racionalista que hunde sus raíces en algunas tesis de Aristóteles y, después de Port-Royal, seguirá fructificando en el logicismo moderno y en el generativismo de Chomsky. En esa tradición el lenguaje deriva de la razón, y por eso tiene una estructura similar a la de la razón. El hombre es, ante todo, sustancia espiritual, y una propiedad de esa sustancia es el pensamiento que es anterior al lenguaje y lo posibilita: "el nombre es un signo de las cosas a través del pensamiento"[34].

Bajo esta perspectiva se explica que pasen a esta parte de la *Logique* capítulos enteros de la *Grammaire* de Port-Royal, compuesta por Arnauld y Lancelot y que apareció dos años antes que la *Logique*. Como innovaciones en esta segunda parte cabría reseñar las siguientes:

Tras exponer la clásica división de las proposiciones (A, E, I, O) y las oposiciones que se dan entre ellas, pasan a caracterizar los tres tipos de proposiciones siguientes atendiendo a su composición:

1. Proposiciones simples: las que sólo tienen un sujeto y un atributo.
2. Proposiciones compuestas: las que tiene más de un sujeto o más de un atributo. Por ej.: "Los bienes y los males vienen del Señor".
3. Proposiciones complejas: aquellas cuyo sujeto o atributo es un término complejo que encierra otras proposiciones que podemos llamar "incidentes", por cuanto que son sólo parte del sujeto o del atributo, al que van unidas por el pronombre

[33] Parte II, cap. 1, ed. cit., p. 103.
[34] *Ibidem*.

relativo, "que" o "el que". Por ej.: "Aquel *que* haga la voluntad de mi Padre *que* está en el cielo, entrará en el reino de los cielos". El sujeto de esta proposición contiene dos proposiciones, ya que contiene dos verbos, introducidos por el "que".

Y a continuación hacen una observación que parece anticipar la teoría de las descripciones de Russell: todas las proposiciones con verbos activos o de su clase, pueden ser llamadas complejas, ya que encierran, de alguna manera, dos proposiciones. Por ejemplo, "Bruto ha matado a un tirano" contiene: "Bruto ha matado a alguien" y "el que ha matado era tirano". De donde resulta que dicha proposición puede ser contradicha de dos maneras: "Bruto no ha matado a nadie" o "el que ha matado no era tirano".

Otra observación interesante, que los autores hacen en los capítulos XVII, XIX, concierne a lo que con Hamilton se vulgarizó como "cuantificación del predicado". Si bien los lógicos de Port-Royal no han perseguido la idea de asignar, de manera sistemática, a los predicados de todos los tipos de proposiciones una cuantificación determinada, sin embargo, al aplicar las reglas de la Escuela a la conversión de las proposiciones, las hacen depender de la cantidad del predicado, en las proposiciones afirmativas y negativas, demostrando cuál debe ser esa cantidad en estas dos clases de proposiciones. De donde cabe extraer para las proposiciones afirmativas, estos dos axiomas[35]:

1) El atributo de una proposición afirmativa no es afirmado según toda su extensión, si ella es por sí misma más grande que la del sujeto.
2) La extensión del atributo está restringida por la del sujeto, de tal manera que aquél no significa más que la parte de su extensión que conviene al sujeto. Por ejemplo, cuando se dice que los hombres son animales, la palabra animal no significa *todos* los animales, sino solamente los animales que son hombres.

Y con esto, las dos reglas clásicas sobre la conversión de las proposiciones afirmativas pueden quedar reducidas a la siguiente[36].

Al estar el atributo restringido por el sujeto en todas las proposiciones afirmativas, si se le quiere poner de sujeto, hay que conservar su restricción, y, por consiguiente, darle una marca de particularidad, tanto si el primer sujeto era universal como si era particular.

Y con respecto a las proposiciones negativas, en las que la idea del atributo es separada según toda su extensión del sujeto, cabe sacar este axioma[37]:

El atributo de una proposición negativa es siempre tomado generalmente o expresado más distintamente:

Todos los sujetos de una idea que es negada de otra son también negados de esta otra idea.

Sobre el razonamiento

En esta parte son tratados los silogismos, los tópicos y los sofismas. Por lo que hace a la silogística, los autores, aunque recomiendan examinar la solidez de los razonamientos más por la luz natural que por las formas, resumen y exponen de manera muy clara y precisa todo el formalismo y reglas tradicionales sobre la silogística. Animados por ese espíritu cartesiano de simplificación, los autores buscan un principio general que permita reconocer la bondad o el defecto de todo tipo de silogismos, sin necesidad de recurrir a los modos concluyentes, y llegan a la siguiente conclusión[38]: no es difícil mostrar que todas las reglas exhibidas anteriormente no sirven más que para hacer ver que la conclusión está contenida en una de las primeras proposiciones, y que la otra lo hace ver... Se puede, pues, juzgar sobre la bondad o el defecto de cualquier silogismo, sin considerar si es simple o compuesto, complejo o incomplejo, sin mirar a las figuras ni a los modos, por sólo este principio general: que una de las proposiciones debe contener la conclusión y la otra hacer ver que la contiene.

La formulación de este principio, por su generalidad, lo hace superfluo; bajo la forma de regla general expresa la naturaleza misma del silogismo, y la aplicación a los casos particulares conduce necesariamente a una serie de reglas particulares. Esta regla general es similar a una teoría moral que reduce todos sus preceptos a éste: "Portaros bien". Pese a su inutilidad no ha resultado estéril: en ella está el embrión de la teoría de Mill: a) el psicologismo, que reduce el proceso silogístico a procesos subjetivos, psicológicos ("hacer ver al sujeto") y b) el desprecio por el silogismo, en cuanto que la conclusión está ya contenida en las premisas, y por lo tanto, constituye un círculo vicioso o petición de principio.

Sobre el método

Esta parte es, según los autores, una de las más útiles e importantes. En ella incluyen todo lo concer-

---

35 Parte II, cap. XVII, ed. cit., p. 170.
36 Parte II, cap. XVIII, ed. cit., p. 172.
37 Parte II, cap. XIX, ed. cit., p. 173.
38 Parte III, cap. X, ed. cit., p. 212.

niente a la demostración, en cuanto que ésta tiene por finalidad la ciencia. Bajo la influencia del racionalismo cartesiano toman la Geometría como paradigma de ciencia. Y, así, tras distinguir dos clases de métodos, el análisis y la síntesis, exponen en qué consiste el análisis que practican los geómetras, repitiendo las cuatro famosas reglas de Descartes, y advirtiendo que el análisis consiste más bien en el juicio y en la dirección del espíritu que en reglas particulares.

El método de la síntesis o de composición es, según ellos, el más importante, porque nos sirve para explicar todas las ciencias. Consiste en comenzar por las cosas más generales y más simples para pasar a las menos generales y más compuestas. Los geómetras, teniendo como fin no avanzar nada que sea convincente han creído -dicen- poder lograrlo observando tres cosas en general[39]:

1) No dejar ninguna ambigüedad en los términos, para lo cual usan las definiciones de palabras (las definiciones nominales de las que ya se habló).

2) No establecer sus razonamientos más que sobre principios claros y evidentes.

3) Probar demostrativamente todas las conclusiones que enuncian. Reglas éstas calcadas a las puestas por Pascal en su *De l'art de persuader*[40], en donde el orden lógico es el orden geométrico y el método aplicable a todas las ciencias es el método, aquí y en *De l'esprit géométrique* expuesto, para la Geometría. La condición impuesta a las proposiciones primitivas o axiomas es la de que sean evidentes, y para conseguirlo se echa mano de las definiciones nominales, porque para Pascal "todas las definiciones en Geometría son definiciones de palabras"[41].

[39] Parte IV, cap. III, ed. cit., p. 307

[40] En *Oeuvres*, edic. Ch. Bossut. La Haya, 1779. Tomo IX, p. 279.

[41] *De l'esprit géométrique*, en *Oeuvres*, ed. cit., p. 242.

BIBLIOGRAFIA

Textos

Ramus, Petrus (1515-1572), *Dialecticae institutiones*. París, 1543.
•*Dialectique*, París 1555. Trad. lat. *Dialecticae libri duo*. París, 1556.
•*Aristotelicae animadversiones*, París, 1543.
•*Scholae in liberales artes*. Basel, 1569.

Agricola, Rodolfo (1443-1485), De *inventione dialectica libri tres*. s. l., 1528.

Nebrija, Antonio de, (+1522), *Introductiones latinae*. Salamanca, 1481.
•*Grammatica*. Salamanca, 1486.
•*Artis Rhetoricae compendiosa coaptatio ex Aristotele, Cicerone et Quintiliano*. Alcalá, 1515.

Valla, Lorenzo (1405-1457), *Dialecticae disputationes contra aristotelicos*, 1439. Reimpres. en *Opera omnia*. 2 vols. Edic. de E. Garin. Turín, 1962.

Vives, Luis (1492-1540), *In Pseudo-Dialecticos*. Selestat, 1520.
•*De causis corruptarum artium*. Amberes, 1531.

Zabarella, Jacobo (1532-1589), *Opera lógica*. Venecia, 1578; aumentada en Colonia, 1597. Reimpres. Minerva, Francfurt, 1968.

Descartes, René (1596-1650) *Oeuvres*. Ed. Adam-Tannery, 12 volúmenes. París, 1897-1910.

Arnauld, A., Nicole, P., *La logique ou l'art de penser* (1662). Edic. crítica de P. Clair y Fr. Girbal, P. U. F., París, 1965.

Estudios

Risse, W., *Die Logik der Neuzeit*, 2 vols. Stuttgart-Bad Cannstatt, 1964-1970.

Solana, M., *Historia de la filosofía española. Epoca del Renacimiento (siglo XVI)*. 3 vols. Madrid, 1941.

Ashworth, E. J., *Language and Logic in the post-medieval Period*. Reidel, Dordrecht, 1974.

Schrecker, P., "La méthode cartésienne et la logique", en *Revie Philosophique*, CXXIII (1937), pp. 336-367.

Vasoli, C. L., *La dialettica e la retorica dell'Umanesimo*. Milán, 1968.

Gilbert, N. W., *Renaissance Concepts of Method*. Nueva York, 1960.

Ong, W., *Ramus, Method and the Decay of Dialogue*. Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1958.

•*Ramus and Talon Inventory*. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1958.

Pozzi, L., *Da Ramus a Kant: Il dibattito sulla silogistica*. Milán, 1981.

Waddington, Ch., *Ramus*. París, 1855.

Rossi, P., "Ramismo, logica, retorica nei secoli XVI e XVII", en *Rivista critica di storia della filosofia*, XII (1957), pp. 357-365.

U. P., Paris, 1965.

IX. Leibniz

1. Vida y Obra[1]

Godofredo Guillermo Leibniz nació en Leipzig el 1 de julio de 1646. El apellido de su padre, de origen eslavo, se escribía originariamente *Lubenicz*, cuya transcripción fonética al alemán habría de dar *Leibnitz*; de ahí que la mayoría de los editores, biógrafos o traductores de nuestro autor de antaño escribiesen Leibnitz. Mas fue él mismo quien se decidió por la fórmula Leibniz, firmando así sus escritos. Su padre, Federico, era jurisconsulto, luterano y profesor de moral en la universidad de Leipzig; prestó mucha atención a la formación del niño, enseñándole e induciéndole a la lectura de temas bíblicos y profanos en la biblioteca que lega a su hijo al morir, cuando éste tenía 6 años. En esa biblioteca pasa Leibniz muchas horas de su niñez. Por otra parte, su madre, Catalina Schmuck, hija del renombrado jurisconsulto Schmuck y profesor, asimismo, de aquella universidad, se entregó por entero a la formación cultural de su hijo.

Tuvo Leibniz como primeros maestros en el colegio Nicolai a Juan Hornschuch, Tilemann Bachusius y Jakob Tomasius, de quienes aprende los primeros rudimentos de latín y griego. A los 8 años se aplica a entender los clásicos latinos, siendo Tito Livio su autor preferido. Entre los poetas latinos, presta especial atención a Virgilio, a quien, aún en su vejez, recordaba casi por entero de memoria. Tanta familiaridad tomó con los clásicos, que a los 12 años compone un poema de 300 versos sin la mínima elisión. En la biblioteca paterna encuentra también Leibniz libros de Filosofía y Jurisprudencia. A los 13 años comienza a leer a Aristóteles, Santo Tomás, Fonseca, Suárez, Zabarella, etc. ; y conoce la silogística aristotélica y concibe la idea de buscar una clasificación para las proposiciones similar a la que Aristóteles había establecido para las categorías. A los 15 años pasa a leer a los "modernos": Bacon, Campanella, Kepler, Galileo, Descartes... En 1662 se traslada a la universidad de Jena, donde tiene como maestros a Erhard Weigel en Matemáticas y a Cristóbal Falkener en Leyes. Vuelve a su ciudad natal, donde, inducido por Tomasius de nuevo, se aplica al estudio de los filósofos griegos y de la filosofía escolástica, recogiendo sus reflexiones en *Conciliationem Philosophiae Platonicae & Aristotelicae*. Obtiene el grado de Bachiller en la Facultad de Filosofía con la tesis *De principio individui* (1664) dirigida por Tomasius, y es nombrado maestro de Filosofía en dicha Facultad.

Ese mismo año muere su madre, lo que obliga a Leibniz a buscar recursos para su carrera universitaria. En el año 1666 tiene una disputa para acceder a una cátedra vacante en la Facultad de Filosofía. La disertación, impresa luego, llevaba por título *Disputatio Arithmetica de complexionibus*; y, completando y ampliando el tema de esta *Disputatio*, publica, ese mismo año, la *Dissertatio de Arte combinatoria*, a la que añade una demostración *Existentiae Dei ad mathematicam certitudinem exactae*.

Luego, se presenta Leibniz al doctorado en Leyes, pero ciertas intrigas en la universidad le obligan a trasladarse a la Universidad de Altdorf (junto a Nuremberg), donde obtiene el doctorado en leyes, el 22 de febrero de 1667, con la tesis titulada *De casibus perplexis in iure*.

De Altdorf se traslada a Nuremberg, donde entra en contacto con los alquimistas pertenecientes a la sociedad *Lapis Philosophorum*. Conoce también allí a J. Christian Boineburg, ministro de la Corte Maguntina, quien admirado del ingenio y erudición de Leibniz, le brinda su

---

[1] Entre las mejores biografías de Leibniz, tenemos:
I. F. Lamprecht: *Leben des Freyherren Gottfried Wilhelm von Leibniz*. Berlín, 1740.
G. E. Guhrauer: *Gottfried Wilhelm von Leibniz*, (2 vols.). Breslau, 1842.
K. Müller y G. Krönert: *Leben undWerk von G. W. Leibniz*. Frankfurt Main, 1969.

protección; Leibniz la acepta y pasa de Nuremberg a Frankfurt y, luego, de aquí a Maguncia, entrando al servicio del príncipe elector, Juan Felipe Schönborn. Por medio de estos dos protectores y amigos entra Leibniz en contacto con varios de los más doctos europeos de entonces: Conring, Kircher, Oldenburg.

En 1672 es enviado por Boineburg a París, con la misión diplomática de disuadir a Luis XIV de sus planes de declarar la guerra a Holanda y de su expansión por Alemania, proponiéndole como alternativa la conquista de Egipto. Francia, aliada con Inglaterra y Suecia, declaró la guerra a Holanda el mismo año en que Leibniz llegó a París; al año siguiente, 1673, pasa a Inglaterra, junto con el embajador de Maguncia, también con la misión diplomática de apartar a Inglaterra de Francia. Tampoco tiene éxito y vuelve a París, donde permanece hasta 1676. Durante estos cuatro años de su estancia en París, Leibniz completa su formación intelectual y entra en contacto con una serie de insignes científicos, matemáticos y filósofos.Trata con los cartesianos, como Malebranche y Arnauld; con los defensores del atomismo, al estilo de Gassendi y Hobbes; con científicos y matemáticos, como Mariotte, Prestet, Tschirnhaus y Huygens, con el que traba estrecha amistad.

En su viaje a Inglaterra frecuenta los círculos de la Royal Society y conoce las teorías de Boyle y Newton (entra en contacto con él a través de Oldenburg). Es en París donde Leibniz descubre el cálculo infinitesimal y donde construye su máquina aritmética (que mejora la de Pascal) y que presenta a la Academia de Ciencias de París; hace, además, otros descubrimientos matemáticos. Su protector, Boineburg, muere en diciembre de 1672, por lo que Leibniz ofrece sus servicios al ministro Colbert, buscando entrar, a la muerte de Roberval, en la Academia de Ciencias de París. Pero no logra su propósito y se ve obligado a aceptar el puesto de bibliotecario que le ofrece el duque de Hannover, Juan Francisco de Brunswick-Luneburgo. En 1676 abandona París, pasando por Inglaterra y Holanda. En Londres mantiene conversaciones con profesores de geometría, principalmente. En Amsterdam se entrevista con el matemático Hudden y en La Haya visita a Espinosa, con quien mantiene largas conversaciones, que luego se traslucen en su Teodicea. Y llega, finalmente, a Hannover en septiembre de 1676. Allí permanece, salvo viajes esporádicos en misiones diplomáticas, hasta su muerte, fiel a la casa Brunswick, cumpliendo sus funciones de bibliotecario e historiógrafo de esta casa. Pero no abandona sus auténticas aficiones a cualquier saber nuevo y manteniendo un ingente comercio epistolar con todos los doctos europeos.

En 1678 muere el duque, su protector, y le sucede su hermano en el gobierno, Ernesto Augusto, obispo de Osnabrüg, quien se convierte asimismo en mecenas de Leibniz.

En el año 1682 el famoso profesor O. Mecken instaura en Leipzig una sociedad de letras, que bajo su dirección comenzó a compilar *Acta Eruditorum*. Leibniz toma con estusiasmo parte en la empresa, publicando en ella diversos trabajos sobre Jurisprudencia, Filosofía y Matemáticas.

Entre tanto, para cumplir el encargo del Duque referente a la historia de la casa de Brunswick, organiza un viaje, que dura hasta 1686, por Francia, Baviera, Austria y otras partes de Alemania, buscando en bibliotecas, monasterios, sepulcros, etc., materiales para su trabajo. De Alemania pasa a Italia en 1687, para averiguar los lazos de la casa de su señor duque con las familias de Toscana. Pero no pierde el contacto con Alemania. Así, aun estando de viaje por Italia, recibe las *Acta Eruditorum* en las que aparecen (en el nº del mes de junio de 1688) el *De principiis mathematicis philosophiae naturalis* de Newton. Aquí aparecerían expresadas varias proposiciones en las que tiempo atrás habría pensado también Leibniz. Por lo que para ofrecer a los lectores punto de comparación con el de Newton, publicó ese mismo año en dichas *Acta* tres trabajos que tratan *De lineis opticis, De resistentia media, De motu proiectorum gravium in medio resistente, et de motuum coelestium caussis.* Y en el año 1689 resuelve él mismo el *problema de linea isochroma* que había propuesto al abate Catelan. Retorna, en 1696, a Hannover provisto de abundante documentación.

En el año siguiente es cuando Juan Bernoulli propone a Leibniz un problema sobre la línea catenaria. Este encuentra la solución, mas, según hace constar en las *Acta*, retiene durante un año su publicación para dar ocasión a que otros ejerciten su ingenio. Y, efectivamente, un hermano menor de Juan, a saber, Santiago Bernoulli, encuentra la solución y se apresura a enviarla a las *Acta* de Leipzig. Las soluciones de Leibniz y Bernoulli aparecen juntas en las *Acta* de junio de 1690.

Para entonces Leibniz había alcanzado gran fama entre doctos y entre príncipes. Antonio Ulrico, duque de Wolfenbutlel, uno de los príncipes más inteligentes de su tiempo, le nombró consejero y bibliotecario suyo. Y Domingo Guglielmini, profesor de Matemáticas en Bolonia, le elige árbitro en la controversia habida entre él y Dionisio Rapín, profesor, asimismo, de Matemáticas en Marburgo.

En el año 1692 la casa de Brunswick-Luneburgo obtiene el Electorado y Leibniz es el encargado, primero, de poner por escrito las excelencias de tal dignidad y, luego, en 1694, de defender el título para la casa de su señor contra las pretensiones de la corte del duque de Würtemberg. En pago de estos servicios, el 1696,

Ernesto Augusto le nombra consejero secreto de justicia e historiógrafo.

Ese mismo año comienza a publicarse en Berlín el *Journal des Savans*, y Leibniz apoya la empresa y publica en él su *Système nouveau de la nature, & de la communication des substances aussi bien que de l'union qu'il y a entre l'ame & le corps.*

Por este tiempo lee el *Ensayo sobre el entendimiento humano* de Locke y, tras varias tentativas frustradas de entrar en contacto con el autor, Leibniz decide poner sus objeciones y su reinterpretación del tema por escrito, si bien la redacción de sus *Nuevos Ensayos sobre el entendimiento humano* la acaba años más tarde, en 1703.

También ese mismo año de 1696 el Marqués de l'Hôpital publica un *Analyse des infiniment petits*, donde expone con toda claridad y orden la manera de calcular inventada por Leibniz.

En 1698 de nuevo pierde Leibniz a su Mecenas: muere el duque Ernesto Augusto.

Por los años 90 comienza Leibniz a hacer públicas varias réplicas a las críticas formuladas sobre su teoría de la armonía preestablecida: Foucher le había dirigido varias objeciones, y Bayle le había criticado en su *Diccionario histórico* (art. Rorarius). Interviene también en la controversia surgida entre Cristóbal Sturn y Gunter Cristóbal Schelhammer en torno a los términos *natura* y *meccanismo*, escribiendo su posición en las *Acta Eruditorum* bajo el título: *Specimen de ipsa natura, sive de vi insita actionibus creaturarum, pro Dynamicis suis confirmandis illustrandisque.*

En 1699 la Academia de Ciencias de París lo adscribe a su sociedad tras haber establecido por decreto particular que puede concederse tal honor también a los extranjeros. Leibniz trata de crear sociedades semejantes a ésta de París; con tal propósito se encamina a Berlín, en mayo de ese mismo año. Su propuesta al Príncipe Federico, gobernante en la Prusia y el Brandeburgo, fue acogida con éxito y él mismo fue encargado de reglamentar la Academia de Ciencias de Berlín, de la que fue presidente perpetuo. Una propuesta similar hace al rey de Polonia, Augusto II. Pero la propuesta, acogida favorablemente, no pudo llevarse a término debido a las turbulencias habidas en aquel reino.

Con Federico I de Prusia (coronado rey en 1701) se había casado Sofía Carlota, detentadora del electorado de Hannover. Con esta bella y sabia princesa mantiene Leibniz una estrecha amistad y muchas conversaciones. También mantiene un intenso comercio epistolar, tratando cuestiones elevadas de diversas materias científicas.

En 1703 publica Leibniz su *Aritmetica binaria*, memoria que había enviado a la Academia de Ciencias de París en 1701. En ella da explicación a los signos hasta entonces indescifrables, que desde China le había enviado el misionero Juan Bouvet, con quien Leibniz se carteaba interesándose por la "cuestión china" que podría ayudarle en su proyecto de lengua universal, sobre la que ensaya varias tentativas.

En 1704 muere la reina de Prusia, Sofía Carlota, y ello causa a Leibniz una profunda aflición y dolor, de los que procura recuperarse entregándose al estudio y al acabamiento de sus trabajos emprendidos. Ese mismo año aparecía en las *Acta Eruditorum* el tratado de Newton *De speciebus & magnitudine curvilinearum*. También se adjuntaba una nota que decía que Leibniz había sido el inventor del cálculo diferencial. Esta observación no fue del agrado de Newton, quien pretendía que el cálculo leibniciano había sido tomado de su cálculo *Fluxionum*. Por tanto, lo tomó como una injuria, y tanto él como sus partidarios promovieron una polémica en torno a la invención del cálculo diferencial.

Para cumplir con sus obligaciones, contraídas con la casa Brunswick, publica en tres partes (en 1707, en 1710 y en 1711) la obra *Scriptorum Brunsvicentium*, a la que debía seguir la *Historia* de esa misma casa, pero que nunca vio la luz, quedando un ingente material sobre el tema entre sus manuscritos.

En 1710 publica su *Essais de Theodicée*, la obra de filosofía más acabada que Leibniz dio a luz en vida.

En 1711 el zar de Moscovia, Pedro I el Grande, se encontraba en Torgau para gestionar el matrimonio de su heredero con la princesa de Wolfenbuttel, Carlota Cristina Sofía. Y Leibniz se dirige a Torgau, con propuestas de fundación de la Academia de sabios de su país. El zar le hace magníficos regalos y poco después le nombra consejero secreto de justicia, asignándole una pensión de 1000 táleros albertinos. A este honor le sigue otro no menos alto y agradable: el Emperador Carlor VI le nombra consejero áulico con una asignación de 2000 florines y le concede el título de Barón del S. R. I.

En 1712 Leibniz se siente por algún tiempo aquejado de podagra. No obstante, al año siguiente va a Viena para agradecer al Emperador los honores recibidos y gestionar en misión diplomática la alianza entre el Emperador de Austria y el zar de Rusia contra Francia. Asimismo intentaba proponerle la instauración en Viena de una Academia Imperial. El príncipe Eugenio de Saboya apoya abiertamente el proyecto de Leibniz. Mas la peste que por aquel entonces invadió Viena y de nuevo la podagra le impidieron proseguir personalmente la empresa, torpedeada por otra parte, por los jesuitas. Durante su estancia en la capital imperial (1712-1714) trabaja a petición de Remond en un "esclarecimiento sobre las Mónadas"; esclarecimiento que da lugar a dos obras: la primera de ellas escrita para el príncipe Eugenio, los *Principes de la nature et de la grâce;* y la segunda es la que luego será conocida bajo el título de *Monadología*.

Durante ese tiempo muere la reina Ana de Inglaterra y el Elector de Hannover, Jorge, como legítimo sucesor, fue llamado a ser coronado rey de Inglaterra como Jorge I. Con tal motivo Leibniz es llamado a Hannover, a donde llega en septiembre de 1714. Pero el rey ya había partido para Inglaterra. Las relaciones entre Leibniz y la casa de Brunswick se habrían deteriorado a partir de la muerte de la princesa Sofía en 1714. Leibniz se vio aquejado de gota y otras varias indisposiciones, que no le impidieron, sin embargo, proseguir su trabajo intelectual. Y así, en 1715, entabla una controversia con Samuel Clarke, que dura hasta el año siguiente, sobre el atributo que Leibniz había dado a Dios, al llamarle *Intelligentiam supra mun danam*, de donde inferían sus adversarios que con ello se excluía a Dios del gobierno del mundo.

En el año 1716 se recupera un tanto de su enfermedad de gota y viaja hasta Pyrmont para visitar de nuevo al zar Pedro I. De Pyrmont volvió a Hannover aparentemente restablecido de dicha enfermedad, por lo que emprende otro viaje a Hale para entrevistarse con Wolff. De Hale va a Brunswick, donde tiene audiencia en la Corte, y, finalmente retorna a Hannover. En el mes de noviembre le sorprende con mayor fuerza la gota y muere el 14 de noviembre de 1716. A sus honras fúnebres no asistió ningún representante ni criado de la casa de Hannover. Sólo su ayudante de biblioteca, Eckhart, acompañó su cadáver a la tumba. Los ministros de Hannover ordenaron recoger todos sus escritos y guardarlos en la biblioteca electoral. Es en esa biblioteca, convertida luego en Biblioteca Nacional, donde se hallan actualmente los manuscritos de Leibniz. En su estudio, clasificación y edición han trabajado eminentes investigadores, sin que actualmente haya sido agotado ese inmenso tesoro. Los manuscritos de Leibniz, conservados en la Biblioteca de Hannover, fueron clasificados por E. Bodemann: *Die Leibniz-Handschriften der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover*. Hannover-Leipzig, 1895.

2. Redescubrimiento de Leibniz

Heinrich Scholz, en su *Geschichte der logik* (Berlín 1931, p. 48), habla de la "vida nueva" de la lógica iniciada con Leibniz. Pero esta vida nueva de la lógica no se desarrolló sino 200 años más tarde, en Inglaterra, con Augustus de Morgan y George Boole, sin referencia, ni directa ni indirecta, a los propios orígenes. En el tiempo transcurrido entre Leibniz y estos lógicos ingleses fueron escasas las contribuciones a la nueva lógica simbólica, debidas esencialmente a Johann Heinrich Lambert y a Gottfried Ploucquet. Wolff y su escuela (a excepción de Ploucquet, que estuvo influenciado en su concepción metafísica por Wolff) no siguieron esta dirección del pensamiento de Leibniz. Un testimonio singular nos lo ofrece el mismo Lambert al comienzo de una de sus investigaciones de lógica simbólica, publicada en las *Nova Acta Eruditorum* de Leipzig el año 1765 (pp. 441-473), *De universaliori calculi idea*. Después de haber propugnado la idea de un cálculo más universal que el cálculo aritmético, y de haber recordado a Leibniz como aquel que "primero introduce la propuesta del *calculus situs*, del *ars combinatoria maxime universalis*, de la *characteristica*, de la *speciosa generalis*", Lambert afirma que:

> "son pocas las mentes que en tales argumentos han avanzado. Es más, si se repasan las obras de Wolff, de Bilfinger, de Baumgarten y de los demás seguidores de la filosofía leibniciana, no se encontrará ninguna que contribuya al descubrimiento de tales dominios, exceptuadas aquellas definiciones que puedan llamarse nominales".

El desinterés del racionalismo dogmático por las ideas de Leibniz sobre la lógica formal, aunque problemático de explicar, tiene orígenes teóricos y no puede atribuirse simplemente al hecho de que buena parte de los escritos leibnicianos sobre el tema yacían aún inéditos y desconocidos en la biblioteca de Hannover.

Giovanni Vailati, en su artículo "Sul carattere del contributo apportato dal Leibniz allo sviluppo della logica formale", en *Rivista di filosofia e scienze affini*, 12 (1905), pp. 338-344, observa (p. 344) que la falta en Wolff,

> "y todavía más en la mayor parte de los seguidores de la filosofía leibniciana, de aquel profundo conocimiento del espíritu de los métodos matemáticos al cual las concepciones leibnicianas habían estado atentas, parece haber impedido recoger su parte más íntima y substancial".

Una razón opuesta:

> "la escasez de cultura filosófica y psicológica en los continuadores de la obra matemática de Leibniz... no fueron menos eficaces para impedir que pudieran fructificar en el campo de las ciencias matemáticas, donde no iban a comenzar a fructificar más que un siglo y medio más tarde, por obra del genio de Hermann Grassmann, *Ausdehnungslehre* (1844)".

En cuanto al hecho de que incluso las tentativas de los pocos seguidores de las innovaciones lógicas leibnicianas, como Lambert y Ploucquet, tuvieran escasa resonancia, Vailati repite la afirmación de John Venn (*Symbolic logic*, p. xxxv):

> "por mi parte confieso la penosa sospecha de que cuanto más grande pueda haber sido la influencia be-

y el escuela (a excepción de Ploucquet, que estuvo in

Y en cartas sucesivas a Santiago y a Juan no faltan las referencias a la *Dissert. de Arte Combinatoria* y a los proyectos de característica, puesto que:

> "para convencer a los hombres en los argumentos metafísicos sería preciso otro género de escritura, cuya forma más que expresa, ya he concebido mentalmente"[3].

Pero estos reclamos no encuentran respuesta. Lo que sorprende aún más en el caso de los Bernoulli, porque no les resultaban extraños los intereses de una reflexión sobre procedimientos matemáticos y sobre su conexión con la metodología lógica. Antes de entrar en contacto con Leibniz habían publicado, en 1685, un *Parallelismus ratiocinii logici e algebrici*, en el que indagaban la correspondencia entre las operaciones fundamentales del álgebra y las constantes lógicas; entre el procedimiento deductivo algebraico y el silogístico. La conclusión a que llegaban era que el paralelismo tenía límites bastante estrechos en todo el proceso de la silogística, que puede ser considerada como el caso más simple de la deducción matemática, ya que

> "hay más ingenio y juicio en la resolución de la más simple ecuación algebraica, que cuanto nos es preciso en los demás raciocinios, por lo demás obvios en el uso cotidiano de la vida".

Y en esto concordaban con Malebranche *(De la recherche de la vérité)*, para quien:

> "el álgebra es la lógica verdaderamente útil para descubrir la verdad y para dar a la mente toda la extensión de la que es capaz".

Esta tentativa de *matematización* de la nueva ciencia, frente a la *esterilidad* del instrumento lógico tradicional, es una perspectiva opuesta a la de Leibniz, quien tiende a una *logicización* de la matemática y ve en ésta no sólo el aspecto cuantitativo, sino también el estructural y formal, englobando en la *matemática universal* tanto la matemática como la lógica tradicional, haciendo de ella aquella "ciencia de las formas", que es una genial anticipación de la "matemática pura" que fue delineándose en el s. XIX.

Pero no son suficientes estas aplicaciones de oposición de perspectivas para dar cuenta de los oídos sordos que encuentra Leibniz en hombres como los hermanos Bernoulli, abiertos como estaban a las mismas preocupaciones metodológicas. El "olvido" de las ideas leibnicianas, tanto por parte de los matemáticos como por parte de los filósofos, es debido en gran medida al rechazo (no ignorancia) de la trama filosófica que sostiene la lógica propugnada por Leibniz. Es su concepción metafísica, como visión del mundo -en la que la combinatoria y la característica no son tan sólo instrumentos *formales*, sino que son instrumentos *reales* de la construcción del mundo y del conocimiento del mismo-, la que es rechazada por el iluminismo como exponente superado de construcción apriorística. El mismo wolffismo contribuye a ver en las tentativas lógicas esencialmente la elaboración de una llave para la penetración de la naturaleza.

El wolffismo que ha sido frecuentemente, un poco sumariamente, considerado como el heredero del leibnicianismo -hasta el punto de hablarse de la *philosophia leibnitio-wolfiana*- constituye un testimonio evidente del desinterés en el siglo XVIII por la lógica leibniciana. Buena parte de la responsabilidad corresponde al propio Wolff, que de las ideas leibnicianas, incluso en los casos más felices, sigue más la letra que el espíritu. Y en el caso de la lógica no se puede efectivamente decir que se trate de un caso feliz. El método matemático es para Wolff un revestimiento exterior, con una función esencialmente didáctica.

Desde esta perspectiva pueden aclararse también las imputaciones dirigidas a Kant a propósito de su influjo negativo en las confrontaciones de la lógica. El afianzamiento del criticismo pone en un segundo plano los intereses de Leibniz y, en consecuencia, también los intereses por sus indagaciones lógicas; la oposición de la lógica transcendental a la lógica formal impidió una justa valoración de la novedad y riqueza de las que es capaz la nueva lógica formal. La explícita posición de Kant, tanto en sus escritos precríticos como en la *Crítica de la Razón Pura*, no está tomada contra el aspecto lógico formal de las tentativas leibnicianas, sino contra las pretensiones metafísicas en las que se apoyan.

El *descubrimiento* de la lógica leibniciana es relativamente reciente. Y las condiciones del mismo no son reducibles al siempre más vasto conocimiento de los cientos de apuntes y anotaciones publicados (incluso en la actualidad parcialmente) en las sucesivas ediciones de Raspe, Dutens, Guhrauer, Erdmann, Gerhardt, Bodemann, Couturat y la Academia Prusiana de las Ciencias.

Tal descubrimiento depende, en buena medida, de la fundación de la lógica simbólica en el siglo XIX, que originó la exigencia histórica de una búsqueda de los aspectos del pensamiento leibniciano que puedieran ser considerados como intuiciones anticipadoras del desarrollo contemporáneo.

---

[3] *Ibid.*, p. 47.

Ibid., p. 47.

No es casual que las obras que en los albores de nuestro siglo llamaron y popularizaron la atención sobre la actividad lógica de Leibniz, se deban a Bertrand Russell y Louis Couturat, esto es, dos de las figuras más significativas de la lógica simbólica moderna; y de que Edmund Husserl, en sus reflexiones sobre los métodos lógicos y matemáticos, afirmase, casi al mismo tiempo, la paternidad espiritual de Leibniz en los desarrollos de la moderna matemática formal[4].

Husserl subraya la centralidad en el pensamiento Leibniciano de la idea del cálculo lógico, de la lógica de lo probable, de la *matemática universal* y ve en ella, no sólo la genial anticipación de la moderna matemática formal, sino también los gérmenes de la nueva *lógica pura* o *teoría de las posibles formas teóricas* que él andaba rastreando.

Russell acentúa de modo aún más radical la omnipresencia de los intereses lógicos leibnicianos, hasta tal punto que le lleva a defender la posibilidad de reconstruir axiomáticamente su concepción del mundo como un sistema matemático, y a considerar también su metafísica monadológica cual tentativa de representar deductivamente toda la realidad sobre el modelo del mundo conceptual lógico. Russell señala, ciertamente, en el sistema lógico-metafísico de Leibniz una fractura y una inconsistencia insuperable debido a que el esquema lógico presupuesto es el de la estructura proposicional sujeto-predicado; pero la crítica de fondo no afecta al reconocimiento de la validez de la hipótesis general, que para Russell es conforme al espíritu de aquella universal ciencia logística que él andaba por entonces sistematizando sobre la base de las numerosas contribuciones del 800 al campo lógico-matemático.

El mismo ideal logicista condiciona también la perspectiva en que es concebida y escrita la *Logique de Leibniz* por Couturat (1901). Respecto de Russell, Couturat acentúa aún más la afinidad entre tales ideales y la realización leibniciana, convencido de la intercambiabilidad del tratamiento extensional e intensional de la lógica. El analiticismo, según esto, de Leibniz, queda intacto; lleva en sí un núcleo que, despojado del revestimiento intensional, muestra ya todos los rasgos de la renovación de la lógica del 800. La reivindicación de la lógica de Leibniz vista como única fuente, tanto de su metafísica como de su actividad de científico y de organizador de sociedades de doctos y de proyectos enciclopédicos, se basa para Couturat en el examen de muchos escritos hasta entonces sepultados en los archivos de la Biblioteca de Hannover. Gran parte de ellos fueron publicados por el mismo Couturat en 1903, en *Opuscules et fragments inédits*.

Para Couturat:

> "la filosofía de Leibniz aparece como la expresión más completa y más sitemática del racionalismo intelectualista. Hay en ella un perfecto acuerdo entre el pensamiento y las cosas; entre la naturaleza y el espíritu; la realidad está enteramente penetrada de razón. Para caracterizar a esta metafísica es suficiente con una sola palabra: es un *panlogismo*. Basta esta palabra para indicar el puesto capital que la lógica debe ocupar en el sistema de Leibniz. Esta conclusión no era por nuestra parte ni buscada ni prevista; hemos llegado a ella sin quererlo y casi a nuestro pesar. Nos proponíamos solamente estudiar en Leibniz al precursor de la lógica algorítmica moderna, analizar su *Cálculo lógico* y su *Cálculo geométrico*, y reconstruir la idea de su *característica universal*. Pero, cuando quisimos remontarnos a los principios filosóficos de estas teorías, nos hemos percatado, por una parte, de que ellos procedían de la concepción original que Leibniz se formaba de la Matemática universal y de su invención juvenil de la Combinatoria; por otra parte, de que ellos quedaban estrechamente ligados a sus ensayos de lengua universal y a su gran proyecto de Enciclopedia demostrativa que le ocupó toda la vida. En fin, que él deducía todas sus tesis filosóficas de los principios de su "Ciencia general", es decir, de su Metodología. Así es como hemos llegado a descubrir que su lógica era, no sólo el corazón y el alma de su sistema, sino el centro de su actividad intelectual y la fuente de todas sus invenciones, y a reconocer en ella el foco de fuego oscuro o al menos oculto de donde irradiarían tan luminosas *fulguraciones*".

Según Barone *(Introduc. a Leinbniz. Scritti di Logica)* es dudoso que la reconstrucción del sistema leibniciano sobre bases lógicas se deba a hilos proporcionados por los manuscritos inéditos. En todo caso, ello vale sólo para Couturat, porque la aguda observación de Husserl y la interpretación de Russell fueron hechas tan sólo sobre la base del patrimonio ya conocido de antaño.

La interpretación logicista, a principios de siglo, del pensamiento lógico y matemático de Leibniz constituye una tentativa por encontrar un centro unitario de lectura de Leibniz, pero que encuentra su fuerza esencialmente en la posición teórica de los autores que la inspiran. Es el valor especulativo concedido por Husserl a la "lógica pura" y por Russell y Couturat a

[4] B. Russell: *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*, Cambridge, 1900.
L. Couturat: *La logique de Leibniz d'après des documents inédites*, París, 1901.
E. Husserl: *Logische Untersuchungen I*. Halle, 1900, pp. 219-222.

la "lógica matemática", lo que vuelve actual el pensamiento leibniciano y exige, al menos, en los dos últimos, su reconstrucción.

Con la interpretación logicista la *Leibnizforschung* sale de la vía de la pura búsqueda historiográfica, rompe con los esquemas alternativos de interpretaciones, sugeridas por orientaciones filosóficas diversas, pero coexistentes, para entrar en un complejo de problemas teóricos que cuestionan la posibilidad misma de la investigación filosófica: un complejo de problemas que con su tensión extrema y aún no resuelta constituyen el origen vivo del pensamiento contemporáneo.

Por eso el *caso* Leibniz asume un valor ejemplar, porque en él se hallan los elementos problemáticos tópicos del presente: la conexión de las investigaciones lógicas y matemáticas y la cuestión de la relación entre lógica y filosofía. Analizar y organizar las soluciones leibnicianas puede ayudar a desvelar el modo de analizar y organizar otras respuestas.

La misma interpretación logicista con su exigencia de encontrar un centro para la comprensión de la rica temática de Leibniz ha contribuido a estimular las búsquedas historiográficas en una multiplicidad de direcciones: desde las relaciones de Leibniz con las tendencias platónico-pitagórico-cabalísticas hasta las mantenidas con la escolástica protestante y católica; desde el significado místico-religioso de sus proyectos hasta las instancias individualístico-personalísticas de su metafísica.

En otros términos, han cambiado muchas de las características especulativas, históricas y teóricas que acompañaron a la interpretación logicista de Leibniz a principios de siglo. Ya no es posible ahora interpretar la lógica leibniciana como el fundamento único y exclusivo de su sistema monadológico.

No obstante el interés de estos pensadores está plenamente justificado, puesto que una rápida ojeada a algunas afirmaciones lógicas de Leibniz permite notar una singular afinidad con los temas fundamentales de la lógica formal constituida en el siglo XIX y, en particular, con el álgebra de la lógica fundada por Boole.

Así, por ejemplo, cuando se lee en Leibniz:

> "el cálculo no es otra cosa que una operación por medio de signos, que tiene lugar, no sólo en la cantidad, sino en cualquier otro razonamiento"[5]

o

> "el arte combinatoria es para mí aquella ciencia... en la que se trata de las formas o fórmulas de las cosas... y que se distingue del álgebra, que trata de las fórmulas aplicadas a la cantidad, esto es, de lo igual y lo desigual"[6]

y se compara con lo que escribe el fundador de la moderna lógica formal, Boole, en su *The mathematical analysis of logic* (pp. 3-4):

> "La validez de los procesos del análisis no depende de la interpretación de los símbolos empleados, sino sólo de las leyes de su combinación"

y

> "el hecho de que se dé a las formas existentes del análisis una interpretación cuantitativa, es el resultado de las circunstancias en que estas formas fueron determinadas y no debe ser considerado como una condición universal del Análisis"

no se puede ignorar la genial intuición anticipadora del pensador alemán.

El retorno a Leibniz y el reconocimiento como precursor suponen, no obstante, el desarrollo del siglo XIX que, como observa Husserl *(Formale und transzendentale logik)*

> "no ha nacido de reflexiones filosóficas sobre el significado y la necesidad de una *mathesis universalis*, sino de la exigencia de la técnica teorética deductiva de la ciencia matemática".

En esta nueva perspectiva, el

> "silencio del racionalismo del siglo XVIII sobre las intuiciones leibnicianas adquiere un significado bastante más importante que aquel que poseería al ser considerado como simple función de la "ignorancia de los documentos".

En realidad, un documento fundamental de la postura leibniciana estaba al alcance directo de los contemporáneos y de los inmediatos seguidores: la *Dissertatio de arte combinatoria*, que el joven Leibniz había publicado en Leipzig en 1666, a los veinte años, y que fue reeditada, en vida, en 1690. En esta obra se hallan los temas fundamentales de los desarrollos sucesivos encontrados en los manuscritos. Si los contemporáneos miraron a la *Dissertatio* con un interés poco proporcionado a la importancia que su autor le atribuía, era porque la veían inspirada -para utilizar una expresión de Husserl- en "reflexiones filosóficas" sobre la necesidad de la *mathesis universalis*. En el ámbito de tales reflexiones, el

[5] Gerhardt, *Math. IV*, p. 462.
[6] Gerhardt, *Philos. VII*, pp. 297-8.

ingenio matemático de Leibniz intuía nuevos horizontes de relevancia y significado científicos que sólo pueden ser apreciados por los modernos racionalistas, para quienes estos horizontes se abren a un fértil y consolidado campo de investigación. Para los racionalistas del s. XVIII, en cambio, las reflexiones filosóficas sobre la base de tentativas lógicas aparecían poco consonantes con el espíritu del racionalismo por ellos aceptado.

3. Presupuestos Metafísicos

Los estudios historiográficos sobre el ambiente, la formación, las fuentes y los autores preferidos del joven Leibniz, han contribuido al esclarecimiento de las concepciones sobre las que se apoya el componente "metafísico-real" de la lógica leibniciana.

El ambiente en el que se forma el joven Leibniz en la universidad de Leipzig a partir del año 1661, y por algún tiempo en el 1663 en Jena, es aquel complejo y vario de la Alemania barroca, en el que se confunden tradiciones del pensamiento escolástico antiguo y reciente, motivos de la cultura renacentista y exigencias de apertura a la nueva ciencia y a la nueva filosofía.

Entregado a los estudios de filosofía, derecho y matemáticas, dominado por un deseo ilimitado de saber, Leibniz bebe de todas las fuentes del saber, esforzándose en armonizarlas. A partir de 1665 opta, en oposición a las doctrinas de las "formas substanciales", por una filosofía natural atomístico-mecanicista; que se desarrollará luego, después de la teoría hobbesiana del *conatus* y de las leves del choque de Wren y Huygens, en una concepción matemática de la física, pero unida, sin embargo, a una interpretación metafísica por el significado espiritual dado al *conatus*.

Pero para tales opciones está ya preparado con el conocimiento de la escolástica aristotélica y nominalista, adquirido de sus maestros de Leipzig, Thomasius y Scherzer; y, por otra parte, con la profunda impresión que suscitó en él -especialmente a través de Weigel, su maestro de matemáticas en Jena y a través de las obras de Bisterfeld- la concepción platónico-pitagórica de la matemática como instrumento de penetración en los entresijos más íntimos de la realidad, en cuanto que es constitutiva ónticamente de su estructura.

Por un lado, el joven Leibniz encontraba en el estudio del aristotelismo y de la escolástica el estímulo y afición a las investigaciones lógicas, y a las teorías gnoseológico-metafísicas suarecianas, que rechazaban el realismo externo de los universales, la existencia de las formas substanciales, pero que se inclinaban por un realismo moderado, según el cual la existencia pertenece tan sólo a los individuos, pero el universal no es un mero ente de razón sin fundamento óntico.

Por otro lado, encontraba en las doctrinas platónico-pitagóricas de la matemática (ligadas a la metafísica kepleriana de la armonía y también a una más amplia tradición del pensamiento que arranca de los ideales de pansofía y atraviesa las artes mnemotécnicas y las reformas renacentistas de la lógica, y llegan a la combinatoria y a la cabalística lulianas) algunos temas fundamentales que le permitían precisar el sentido del realismo moderado, por cuanto que situaban en la estructura matemática y en la proporción de las relaciones el fundamento ideal inserto en lo real y la justificación del procedimiento abstracto y discursivo. Son éstas las ideas que inspiran el primer escrito leibniciano: La *Disputatio metaphysica de principio individui* publicada en 1663 para acceder al grado de lincenciatura en Filosofía en Leipzig. Aflora allí ya su convicción firme de que la sustancialidad concierne sólo a los entes individuales y que en la realidad existen tan sólo las substancias individuales, que poseen un soporte óntico y carácter matemático: "La esencia de las cosas son como los números"; y "la esencia de las cosas no son eternas sino en cuanto son en Dios".

En la *Dissertatio de arte combinatoria* funda y reelabora la *Disputatio arithmetica de complexionibus* -presentada el mismo año en la facultad lipziense para obtener la docencia- y representa realmente la *summa* de las concepciones elaboradas en los años de juventud. En esta obra se hallan *in nuce* los temas fundamentales de los desarrollos porteriores, que aparecen en sus numerosos manuscritos.

Ya el subtítulo revela el programa ambicioso:

> "En ella a partir de fundamentos artiméticos se establece con nuevos preceptos, la doctrina de las *Complicaciones* y de las *Transposiciones*, y se muestra la utilidad de ambas para la totalidad de las ciencias y se echan los nuevos cimientos del Arte de Meditar, o sea, de la Lógica de la invención".

La obra está articulada sobre dos temas fundamentales: los *problemata* y los *usus*. La parte de los problemas es la más estrictamente matemática y concierne a la teoría de las combinaciones.

Leibniz se arroga la invención de la solución para determinar en particular, para un número dado de términos, los números de sus combinaciones de diversos exponentes (binarios, ternarios, etc). Para este problema: "Dato numero et exponente complexiones (combinationes) invenire", Leibniz propone dos modos de solucionarlo, uno más general, para las combinaciones de diverso exponente; y otro particular, para las binarias. Del primer modo de solución escribe: *generaliorem modum detexi-mus;* modo éste que se funda, al menos reductivamente, en las propiedades del triángulo aritmético, por lo que Leibniz se atribuye la invención de esta aplicación del triángulo aritmético al cálculo de las combinaciones.

Sin embargo, este triángulo es también llamado *triángulo de Pascal* precisamente porque fue éste el que lo estudió y sistematizó en su *Traité du triangle arithmetique*, cuya composición data de 1654, pero que no aparece publicado hasta 1664, dos años antes de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* de Leibniz. Más aún, el famoso triángulo había aparecido ya un siglo antes en el *General trattato di numeri et misure* (1556-60) de N. Tartaglia. Los historiadores señalan, incluso, otras fuentes anteriores a Tartaglia, así, M. Stifel (1486-1567) lo emplea en la *Aritmética integra* (1544). Y, aún antes, el chino Tchou Chi Ki (1303). Leibniz, pues, no parece conocer el *Traité du triangle arithmetique* de Pascal cuando compone su *De Arte Combinatoria*.

Es necesario advertir que en la terminología leibniciana *complexiones* significa *combinaciones; número* indica la cantidad de objetos que se combinan o permutan (que se suele representar por *m)* y *exponente* el número que expresa cuántos de ellos se combinan cada vez o permutan (y que suele representarse por *n*, siendo $m \geq n$).

Teniendo esto en cuenta, el problema general propuesto por Leibniz queda reformulado así: saber las posibles combinaciones de *m* objetos haciendo variar *n* desde 1 hasta *m*. La solución que ofrece es ésta:

"Si sumamos las complexiones del número precedente y exponente precedente con las del número precedente y exponente dado, la suma dará las complexiones buscadas"[7], es decir:

$$C_m^{(n)} = C_{m-1}^{(n-1)} + C_{m-1}^{(n)}$$

En virtud de este principio generador de las combinaciones, Leibniz construye una tabla, en la cual, a partir de la unidad, las columnas paralelas descendentes indican los números de las combinaciones de diverso exponente de los respectivos conjuntos de objetos, a partir también de la unidad; los números de cada columna resultan de la suma de los dos últimos de la columna anterior correspondientes a los exponentes del mismo grado y anterior del conjunto asimismo antecedente al de cada columna, tal como aparece en la tabla siguiente:

Tabla

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	1	2	3	4	5	6	7n	8u	9m	10c	11r	12i
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495
5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792
6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924
7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	495
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
*	0	1.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1023.	2047.	4095.
†	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.

Exponentes

Complexiones

El segundo problema viene enunciado así: "Dado el número, encontrar las combinaciones simplemente". Esto es, consiste en buscar todas las combinaciones posibles con *m* objetos, haciendo variar *n* de 1 a *m*, y es resuelto por Leibniz mediante una tabla de correspondencia biunívoca entre la serie de los números naturales y la serie de la progresión geométrica de razón 2, con la siguiente formulación: "se busca el término dado entre los exponentes de la progresión geométrica en base 2; el número o término de la progresión que corresponde a él directamente, disminuido en la unidad, será la *solución* del problema", esto es:

$$C_m = 2^m - 1$$

De los restantes problemas, el tercero trata de las combinaciones de clases con un número dado de elementos; el 4°, el 5° y el 6° de las permutaciones, de las permutaciones circulares y de las permutaciones con re-

[7] *De Arte Combinatoria*, edic. Gerhardt, *Phil.*, IV, p. 39.

petición; el 7°, el 8° y el 9° del cálculo de permutaciones de un conjunto dado de objetos, los cuales contienen una permutación dada *(caput)*; los tres últimos problemas, finalmente, tratan de las variaciones (permutaciones y combinaciones) útiles e inútiles. Con la determinación de las variaciones útiles, es decir, de las variaciones que pueden tener lugar *propter materiam subiectam*, se entra ya en el campo de las aplicaciones, como muestra la deducción de los cuatro elementos tradicionales de la combinación dos a dos de las 4 cualidades primarias: seco, frío, húmedo y cálido, cuya ilustración gráfica aparece también al principio de la obra.

Los *usus* de la combinatoria se extienden a todos los campos de lo *scibile*, y van desde el tratamiento combinatorio de la silogística hasta la distinción y repartición de los casos jurídicos; desde la construcción axiomática de la ciencia hasta las *iucundae contemplationes*, en las que se trata, bien de los anagramas y de las disposiciones de los huéspedes en torno a la mesa, bien del mar de las melodías que fluye de las permutaciones y de las notas musicales o de los juegos poéticos o de los versos próteos; y ello en virtud, precisamente, del presupuesto metafísico que está a la base de la combinatoria:

> "puesto que todas las cosas que son o pueden ser pensadas se componen en general de partes, reales o al menos conceptuales, es necesario que aquellas que son de especie diversa difieran o porque poseen partes diferentes o porque varían en disposición"[8].

Leibniz recuerda constantemente el substrato metafísico unitario de sus aparentes divagaciones: "todas las cosas vienen recavadas de la doctrina metafísica de la relación del ente con el ente"[9]. Nadie, dice Leibniz, podrá acusarle de haberse desviado del objetivo único, una vez que se haya percatado de que "todas las cosas surgen de la íntima doctrina de las variaciones, la cual por sí sóla guía el ánimo hacia esa meta como a través de todo el infinito; y, a la vez, abraza la armonía del mundo, la íntima estructura de las cosas, la serie de las formas; ésta es la única vía para penetrar *in arcana naturae*[10].

A este respecto llama Leibniz la atención sobre la doctrina de Juan Enrique Bisterfeld en su *Phosphorus Catholicus seu Epitome artis meditanti* (Leyden, 1657):

> "obra completamente fundada sobre la *inmeación* y περιχωρήσις (circulación) universal de todo en todo e igualmente sobre la semejanza y desemejanza de todo con todo; y cuyos principios son las relaciones"[11].

El fondo doctrinal y la visión del mundo que está a la base del proyecto del arte combinatoria es, pues, claro y sirve para ello como resumen las palabras que años más tarde (hacia 1680) escribe Leibniz en un ensayo al que Raspe dio el sugestivo título de *Historia et commendatio linguae charactericae universalis quae simul sit ars inveniendi et iudicandi*[12]:

> "Hay un dicho antiguo de que Dios había creado todas las cosas según el peso, la medida y el número. Pero hay cosas que no se pueden pesar, aquellas que no tienen ninguna fuerza ni potencia, y también las hay que, al estar privadas de partes, no son, pues, susceptibles de medida. Pero no hay ninguna que no esté subordinada al número. Por tanto, el número es algo así como una figura metafísica, y la Aritmética es una especie de Estática del universo, mediante la cual son investigadas las potencias de las cosas".

De manera que, sin caer en la futilidad y en la superstición de la Cábala popular, es preciso reinstaurar el sentido metafísico de la matemática que ya desde Pitágoras había surgido instalándose en el pensamiento occidental.

El punto de partida de las investigaciones de Leibniz es, pues, el matematicismo metafísico, que enraiza en la tradición platónico-pitagórica, pero la cual necesita clarificación y racionalización.

Con este presupuesto a la vista, resulta clara la estructuración de la *Dissertatio*. La parte técnica de los *problemata* y la base metafísica sobre la que se apoya, no son para Leibniz partes contrapuestas, sino más bien elementos integrantes una de otra.

También la metafísica del número se hace patente en la *Dissertatio*. El número sobre el que se apoya la teoría de las combinaciones y las permutaciones, pertenece a la metafísica, si por ésta se entiende la doctrina de "aquello que es común a todo género de entes". El número es algo *universalísimo*, "una cierta figura incorpórea nacida de la unión de estes cualesquiera", "todo abstracción de la unidad", etc. Expresiones, éstas, que pueden sugerir una interpretación nominalista de la teoría leibniciana de los universales, máxime porque la *Dissertatio* recuerda, a propósito del arte combinatoria, a "aquel profundísimo escrutador de los principios de to-

[8] Edic. Gerhardt. *Philos. IV*, p. 44.
[9] *Ibid.*, p. 70.
[10] *Ibid.*, p. 56.
[11] *Ibid.*, p. 70.
[12] Edic. Erdmann, pp. 162-4; edic. Gerhardt, *Phil. VII*, pp. 184-9.

das las cosas que fue Hobbes", y también su afirmación de que "toda la obra de nuestra mente es cálculo".

Mas, por otra parte, son abundantes las manifestaciones de la metafísica platónico-pitagórica; manifestaciones que no son exclusivas de la *Dissertatio*, sino que aparecen en otras obras (en la *Historia et commedatio linguae characteriсae*, ya citada), incluso en las de mayor madurez, por ejemplo en la *Monadología*, § 2.

Las expresiones que en la *Dissertatio* pueden sugerir una inclinación nominalista, sirven sólo para replantear la polémica contra la metafísica de las formas substanciales, ya presente en la *Disputatio* de 1663 y confirmada de nuevo explícitamente en el § 53 de la *Dissertatio*, donde la operación de abstraer y conceptualizar no es entendida en sentido nominalista. La no substancialidad de los géneros no los reduce a nombres; ellos poseen un fundamento óntico, que garantiza la validez de la conceptualización: es el *saber de Dios*, la eterna presencia de la esencia-idea, que es número, relación, proporción, al mismo tiempo que principio fundamentador del orden de la creación real y justificación metafísica de la computación aritmética.

El carácter no nominalista de las primitivas concepciones leibnicianas está confirmado en otros escritos juveniles, principalmente en el prefacio a la reedición del *De veris principiis et vera ratione philosophandi contra pseudophilosophos* de Mario Nizolio, escrito por Leibniz en 1670. Porque, si bien Nizolio es un nominalista (y en ese hecho se apoyan algunos para defender la inclinación de Leibniz hacia el nominalismo), el acuerdo de Leibniz con el humanista italiano llega sólo hasta la crítica a la concepción aristotélica del conocimiento; si el proceso cognoscitivo es un desarrollo natural y único a partir de la sensación[13] ¿cómo es posible el paso de las especies sensibles a las inteligibles? ¿cómo compaginar la afirmación de que la ciencia es de lo universal con el medio que se establece para alcanzarla? ¿no es precisamente la base de la doctrina aristotélica la admisión de las formas substanciales? Esta es la vía que conduce a Nizolio al nominalismo, para quien la realidad de los universales es una suposición arbitraria.

Pero el acuerdo de Leibniz con Nizolio no va más allá de las premisas básicas del nominalismo. Traspasar ese límite supone para él caer en el escepticismo. Así se comprende su declaración de que es insostenible la posición hobbesiana que reduce la verdad a nombres, porque en aritmética, como en otras ciencias, "la verdad permanece la misma, aunque se cambian los signos", y así se comprende también su precisa indicación de los *errores* de Nizolio, los cuales no atañen sólo a la interpretación de Aristóteles, a quien Nizolio atribuye, como la mayor parte de los humanistas, los desvaríos que son esencialmente de los aristotélicos, sino que son denunciados por Leibniz los concernientes a la concepción nizoliana del universal como *colectivo*. Porque si los universales no fuesen otra cosa que colecciones de individuos, la inducción misma -que para el empirismo y el nominalismo es el único procedimiento válido- no podría alcanzar, no sólo la certeza científica, sino tampoco la moral; precisa ésta de esos *adminicula rationis* que no dependen de la inducción, sino de la *razón universal;* en ésta y en la estructura matemática se apoya la perfecta certeza.

Además, no sólo la inducción no puede jamás justificar por sí misma proposiciones absolutamente universales, sino que tampoco puede justificarse a sí misma más que apoyándose sobre un principio universal que, por consiguiente, no podría ser inducido. De modo que el empirismo que arruina toda deducción no puede siquiera justificar la inducción ni, por ello, la ciencia, incluso la experimental. La ciencia en general no es, pues, posible más que si existen principios universales que no pueden ser más que *a priori*, no pudiendo inducción alguna engendrar una certeza perfecta[14]. De esta manera, aparece ya aquí, en cierto modo, prefigurada la famosa doctrina de las ideas y de las verdades innatas que Leibniz va a sostener años más tarde contra el empirismo de Locke. Hay ideas innatas, es decir, independientes de la experiencia, que son obtenidas por abstracción a partir de los datos sensibles; y hay verdades innatas, es decir, principios *a priori*, que no son obtenidos por una inducción fundada sobre los hechos de la experiencia. Tales son, en particular, los axiomas matemáticos, que los empiristas no pueden más que considerar como verdades de experiencia; esto les lleva a poner en duda la certeza de las matemáticas, como hace Hobbes (quien ha puesto en duda el Teorema de Pitágoras sobre el cuadrado de la hipotenusa); "quod ego non sine stupore legi", dice Leibniz[15].

De manera que por el solo hecho de admitir el valor objetivo de la ciencia y de la verdad y, en particular, la certeza de las Matemáticas, Leibniz se ve obligado a admitir ideas y verdades universales y necesarias, por tanto, innatas o *a priori*, y a romper con el nominalismo en general (no sólo con el nominalismo radical de Hobbes).

El fundamento matemático de la realidad, ya patente en la *Dissertatio*, no es tomado de una propiedad misteriosa de las esencias-números (al modo de la cábala vulgar), sino de aquélla de estructura, de aque-

---

[13] Cap. final de los *Segundos Analíticos*

[14] Cap. final de los *Segundos Analíticos*.
[15] Gerhardt. *Philos. IV*, 162.

llas tramas de relaciones que están en el centro de las consideraciones matemáticas.

Testimonios en este sentido son el *Dialogus de conexione inter res et verba et veritatis realitate* (1677) y su nota adjunta *Quid sit idea*[16], donde Leibniz se aparta de la consideración de la verdad y falsedad como "propiedad de las proposiciones o de los pensamientos", para volverse de nuevo al problema del valor objetivo de la verdad misma. Su examen le conduce a establecer una estrechísima conexión entre pensamiento y lenguaje; entre pensar y simbolizar. Y, si bien no siempre el acto de pensamiento se actúa en las palabras de las lenguas históricamente habladas, no puede actuarse fuera de toda expresión simbólica. Mas esto no supone la caída en un convencionalismo relativista, antes bien, Leibniz busca una orientación totalmente diversa:

> "observo, sin embargo, que si se pueden emplear los caracteres para el razonamiento, es porque hay en ellos cierta disposición compleja, cierto orden que conviene a las cosas, si no en las palabras por separado (aunque sería preferible que fuese también en éstas), al menos en su conexión y en su flexión. Y este orden aparece, no obstante, de algún modo, en todas las lenguas. Y esto me da la esperanza de salir de la dificultad.
>
> En efecto, si bien los caracteres son arbitrarios, no es menos cierto que su uso y su conexión tienen algo de no arbitrario; esto es, cierta proporción entre caracteres y cosas y las relaciones que poseen entre aquellos caracteres diversos que expresan la misma cosa. Y esta proporción o relación es el fundamento de la verdad. Ella es la que consigue que, bien que empleemos estos o aquellos caracteres, el resultado sea siempre idéntico o equivalente, o correspondiente en proporción. Aunque el empleo de caracteres sea siempre necesario para pensar".

La contraposición leibniciana entre el nominalismo de Hobbes y la concepción que garantiza la validez del simbolismo mediante su correspondencia *relacional* con el mundo, es análoga (salvada la distancia histórica) a la contraposición entre el radical convencionalismo lingüístico carnapiano y el realismo *lógico* de Wittgenstein.

La página citada del *Dialogus* está completamente de acuerdo con algunos aforismos centrales del *Tractatus* (como, p. e., el 2. 18 y 3. 21):

> "Lo que cada figura, de cualquier forma, debe tener en común con la realidad para poderla figurar por completo -justa o falsamente- es la forma lógica, esto es, la forma de la realidad" y "A la configuración de los signos simples en el signo proposicional, corresponde la configuración de los objetos en el estado de cosas".

4. La lógica clásica

Combinatoria y silogística

El tratamiento que Leibniz hace de la lógica clásica se enmarca en su proyecto general, ideado ya en la *Dissertatio*, de buscar en el *arte combinatoria* el *ars demonstrandi* o lógica demostrativa, de la que la silogística es un modelo, y el *ars invendi* o lógica inventiva (esbozo de un cálculo de conceptos) que constituye la contribución propiamente leibniciana al desarrollo y ampliación de la lógica.

Al tratamiento combinatorio de la silogística dedica el *usus* VI de la *Dissertatio*.

Por la teoría silogística siempre sintió Leibniz una gran admiración:

> "Mantengo que la invención de la forma de los silogismos es una de las más hermosas del espíritu humano, e incluso también una de las más considerables. Es una especie de *matemática universal* cuya importancia no es suficientemente conocida; se puede decir que en ello va implícito un *arte de infalibilidad*, siempre que se sepa y se pueda utilizar bien, lo cual no siempre está permitido"[17].

Mas esa admiración no fue óbice para que Leibniz considerase la obra de Aristóteles imperfecta y tratase de corregirla y complementarla, como hicieron los mismos escolásticos. Para ello se sirve de la combinatoria, en especial para el cálculo de los modos del silogismo categórico. Retoma Leibniz las ideas del lógico suizo Juan Hospinianus (1515-1575), quien en su *De syllogismi categorici modis* (1560) había calculado en 512 el número de modos útiles e inútiles y en 36 el número de modos útiles o concluyentes. Y, sirviéndose de la *admirable* técnica combinatoria, Leibniz busca desarrollar y completar la idea de Hospinianus. Y puesto que el modo y la forma de un silogismo depende de la cantidad y cualidad de las proposiciones que lo conforman, el número de modos, muy superior en Hospinianus y Leibniz en relación al admitido por la tradición, depende de que ellos reconocen, además de las dos cantidades tradicionales (universal y particular), también las cantidades indefinida y singular. De manera que se tienen cuatro tipos de proposiciones en virtud de la cantidad, cada uno de los cuales puede ser, en virtud de la cualidad, afirmativo o negativo; obtenemos, así, 8 tipos de proposiciones categóricas, representadas como sigue:

[16] Gerhardt, *Philos. VII*, pp. 190-3.
[17] *Nuevos Ensayos*. Trad. de J. Echevarría. Edit. Nacional, 1977

UA: Universal Afirmativa
UN: Universal Negativa
PA: Particular Afirmativa
PN: Particular Negativa
IA: Indefinida Afirmativa
IN: Indefinida Negativa
SA: Singular Afirmativa
SN: Singular Negativa

Leibniz combina las cantidades y las cualidades de las proposiciones tres a tres, en virtud de que 3 son las proposiciones de un silogismo. Con las permutaciones de las cantidades obtiene 64 (4^3) combinaciones diferentes en cantidad, de las cuales sólo 32 resultan útiles. Elimina las restantes en virtud de las reglas tradicionales: *Nihil seguitur geminis e particularibus unquam* y *peiorem seguitur semper conclusio partem*. Asimismo llega a 8 (2^3) combinaciones diferentes en cualidad, de las cuales sólo 3 resultan útiles. Y elimina las restantes por las dos reglas tradicionales: *Utraque si praemissa neget nihil inde sequitur* y *Peiorem sequitur semper conclusio partem*.

En resumen, el total de combinaciones de modos silogísticos, válidos e inválidos, resulta ser 512; esto es, 8^3 (8 tipos de proposiciones elevado a las tres proposiciones que entran en el silogismo, que son los modos imaginados por Hospiniamus). Este cálculo vale para cada una de las 4 figuras, y Leibniz, a diferencia de Hospinianus, reconoce como válida la 4ª figura, resultando de esta forma 2048 modos silogísticos posibles. Y prescindiendo de la figura, Leibniz examina la validez de los modos utilizando, como hemos dicho, las reglas clásicas, obteniendo, así, 96 (esto es, los 32 seleccionados sobre las reglas de la cantidad combinadas con los 3 seleccionados sobre las reglas de la cualidad: 32 x 3). De estos 96 modos rechaza Leibniz los 8 pertenecientes al tipo *Fisesmo*, que no son de ninguna figura, quedando 88 modos útiles, concluyentes.

Esta mayor cantidad de modos útiles respecto de Aristóteles y los escolásticos en Leibniz y Hospinianus, se debe a que éstos admiten 4 cantidades y no sólo 2 como los primeros. De ahí que muchos de ellos resultan especies o casos particulares de los clásicos. Por ejemplo, los subalternos que Hospinianus consideraba como distintos; así *Barbari* (por subalternación de la última *a* de *Barbara); Cesaro* (por subalternación de la última *e* de *Cesare);* etc.

Leibniz también admite estas distinciones, pero no sigue a Hospinianus en asimilar las proposiciones singulares a las particulares; por el contrario, muestra que son equivalentes a las universales, por cuanto que en ellas el sujeto está tomado en toda su extensión. Así mismo, las proposiciones indefinidas deben ser asimiladas a las particulares, tal como ya había hecho Aristóteles; con lo cual Leibniz vuelve a la admisión exclusiva de las 2 cantidades clásicas; universales y particulares. De manera que las 32 combinaciones de cantidades útiles quedan reducidas a las 4 siguientes: UUU UUP UPP PUP. Cada una de las cuatro engendra otras siete, cuando se reemplaza a U por S y a P por I; de manera que cada uno de estos 4 modos representa 8 modos de Hospinianus. Estos 4 modos combinados cada uno de ellos con los 3 modos cualitativos (útiles): AAA ANN NAN, dan lugar a 12 modos simples generales. Estos, a su vez, generan 24 modos figurados (habida cuenta de la diversidad de figuras; esto es, según la colocación del término medio en las premisas), repartidos de 6 en 6 en cada una de las cuatro figuras. Defendiendo Leibniz enérgicamente la 4ª figura contra sus críticos, como Hobbes, por ejemplo.

Establece finalmente las reglas especiales para cada figura:

1) En la 1ª y la 2ª la premisa mayor es siempre universal.
2) En la 1ª y la 3ª la premisa menor es siempre afirmativa.
3) En la 2ª la conclusión es siempre negativa; y en la 3ª es siempre particular.
4) En la 4ª la conclusión nunca es universal afirmativa; la premisa mayor nunca es particular negativa; y, si la menor es negativa, la mayor es universal afirmativa.

De la aplicación de estas reglas resulta que cada modo simple no es concluyente en cada figura, sino que los 12 modos simples no dan lugar más que a 24 modos figurados repartidos por las 4 figuras (según aparece en la tabla de la página siguiente).

El último modo simple (PA UN PN) no da origen a ningún modo de ninguna figura, por no cumplir las reglas antedichas.

La conclusión de este fatigoso camino es, pues, la añadidura de 5 modos válidos a los 19 modos tradicionales. Y, en realidad, los nuevos modos *(Barbari, Celaro, Cesaro, Camestrop, Fapesmo)* no son sino derivaciones obtenidas mediante la subalternación de la conclusión de los modos fundamentales: *Barbara, Celarent, Cesare, Camestres, Calerent*.

Bajo este aspecto, aun admirando la sutileza de Leibniz, la aplicación de la técnica combinatoria a la silogística no parece dar grandes frutos, resultando ser poco más que un ejercicio del cálculo de permutaciones, en el que el estudio propiamente lógico, en el sentido de las conexiones proposicionales, posee escasa novedad.

Sin embargo, a Leibniz esa simetría perfecta de 6 modos válidos en cada una de las 4 figuras le parece garantía de verdad, porque, dice, la naturaleza es regular en todas las cosas; y considera que este orden es tan digno de tener en cuenta como el número de cuerpos (poliedros) regulares. La *armonía de las figuras*, hasta ahora ignorada, no es sino una ilustración particular de esa *Harmonia mundi* que Leibniz toma como presupuesto para su combinatoria. Y no se trata de una

MODOS SIMPLES	FIGURA I	FIGURA II	FIGURA III	FIGURA IV
UA, UA, UA	*Barbara.*	—	—	—
UN, UA, UN	*Celarent.*	*Cesare.*	—	—
UA, UN, UN	—	*Camestres.*	—	*Calerent.*
UA, UA, PA	*Barbari.*	—	*Darapti.*	*Baralip.*
UN, UA, PN	*Celaro.*	*Cesaro.*	*Felapton.*	*Celanto.*
UA, UN, PN	—	*Camestros.*	—	*Fapesmo.*
UA, PA, PA	*Darii.*	—	*Datisi.*	—
UN, PA, PN	*Ferio.*	*Festino.*	*Ferison.*	*Fresison.*
UA, PN, PN	—	*Baroco.*	—	—
PA, UA, PA	—	—	*Disamis.*	*Ditabis.*
PN, UA, PN	—	—	*Bocardo.*	—
PA, UN, PN	—	—	—	—

apreciación momentánea. Treinta años después, en una carta de Wagner[18], recuerda Leibniz haber aportado en su juventud una contribución a los intereses de la lógica mostrando "científicamente que cada una de las 4 figuras posee tan sólo 6 modos válidos y que, por tanto (contra la lógica tradicional), el número de modos es igual en todas, porque la naturaleza es regular en todas las cosas; y considero esto no menos digno de atención que el nº de los cuerpos regulares".

Formulación axiomática

Otro aspecto del pensamiento lógico de Leibniz, relacionado con la conexión entre sí de los modos silogísticos, merece ser destacado. Se trata de la tentativa ensayada por Leibniz de organizar toda la silogística, incluyendo tanto la inferencia mediata (modos silogísticos) como la inferencia inmediata (subalternación, conversión de proposiciones), en un sistema deductivo, partiendo de los modos de la 1ª figura y de proposiciones idénticas tomados como axiomas, de los cuales se deducen los restantes modos y las subalternaciones.

El procedimiento, aunque marginal en el tratamiento combinatorio que de la silogísitica hace en la *Dissertatio* ["Conversionem posse demonstrari per syllogismun adiiciendo propositionem identicam"[19], es muestra de la tendencia que Leibniz retomará y profundizará en ensayos sucesivos: la construcción sistemática de la teoría silogística sobre la base de un mínimo número de principios, su constitución sobre el modelo de la geometría, mediante definiciones, axiomas y postulados. Así, en el ensayo *De formis syllogismorum mathematice definiendis*[20], que comienza con la declaración de la posibilidad de conducir "al rigor geométrico" la parte de la lógica que trata de las figuras y de los modos, las proposiciones idénticas ("Todo A es A" "Algún A es A") son usadas, además de para la prueba de las conversiones, también para demostrar silogísticamente la subalternación, una vez establecidos la 4 modos principales de la 1ª figura.

Así: la subalternación de la afirmativa se demuestra por *Darii*.

Todo A es B
Algún A es A
———————
Algún A es B

La subalternación de la negativa se demuestra por *Ferio*.

Ningún A es B
Algún A es A
———————
Algún A no es B

[18] Gerhardt, *Phil. VII*, 518.
[19] Gerhardt, *Phil. IV*, 55.
[20] Couturat, *Opuscules*, pp. 410-416.

[29] Coutural, *Opuscules*, pp.

Por medio de la subarternación se obtienen los otros dos modos de la 1ª figura: *Barbari* y *Celaro*.

Y, por lo que respecta a las conversiones:

a) La conversión *per accidens* de la universal afirmativa se demuestra por *Darapti*.

Todo A es A
Todo A es B

Algún B es A

b) La conversión *simplex* de la universal negativa se demuestra por *Cesare*.

Ningún A es B
Todo B es B

Ningún B es A

c) La conversión *simplex* de la particular afirmativa se demuestra por *Datisi*.

Todo A es A
Algún A es B

Algún B es A

d) La conversión *per accidens* de la universal negativa se demuestra por *Festino*.

Ningún A es B
Algún B es B

Algún B no es A

Todas las deducciones precedentes tienen por objeto, además, mostrar la utilidad de las proposiciones idénticas en el razonamiento y defenderlas contra el reproche de la insignificancia y esterilidad que les atribuían los lógicos empiristas:

> "Todo lo cual demuestra que las proposiciones idénticas más puras y que parecen más inútiles tienen un uso considerable en lo abstracto y general, lo cual nos puede servir para aprender a no despreciar ninguna verdad"[21].

Luego, busca reducir los modos de las restantes figuras a los de la 1ª utilizando un método que le había sugerido su maestro Jakob Thomasius, pero cuya invención se remonta a Ramus. Este método es denominado *methodus regressus*, y es un procedimiento de reducción al absurdo basado en la relación de consecuencia lógica: la verdad de las premisas es incompatible con la falsedad de la conclusión, de modo que si la conclusión y una de las premisas son, respectivamente, falsa y verdadera, la otra premisa debe ser falsa.

> "En mi juventud, cuando yo indagaba todas estas cosas, observé que todos los modos de la segunda y tercera figuras pueden deducirse de los de la primera mediante este método, suponiendo que el modo de la primera es bueno y que, por tanto, al ser falsa su conclusión (o al tener su contraria como verdadera) y al tomar por verdadera, asimismo, una de las premisas, es necesario que la contraria de la otra premisa sea verdadera. En las escuelas lógicas se prefiere utilizar las conversiones, para deducir las *figuras menos principales* de la primera, que es *la principal*, porque parece que eso es más cómodo para los escolares. Pero para quienen buscan las razones demostrativas, en las cuales hay que utilizar el mínimo de supuestos posibles, será preferible usar, en lugar de la conversión, un único principio explicativo, que es el de contradición, el cual no da nada por supuesto y basta para la demostración"[22].

Así, por ejemplo: dado el modo *Celarent*,

Ningún A es B
Todo C es A

Ningún C es B

del supuesto de que la conclusión es falsa y la premisa mayor es verdadera, cabe inferir la negación de la premisa menor, esto es, obtenemos otro modo, de la 2ª figura *(Festino)*:

Ningún A es B
Algún C es B

Algún C no es A

De manera que los 6 modos de la 1ª figura (los 4 principales más los dos probados por subalternación) engendran por regresión otros tantos modos de la 2ª y 3ª figuras. Si se toma como premisas la mayor de cada uno de ellos y la negación de su conclusión, se obtiene como conclusión la negación de su menor; y se llega, así, a los 6 modos de la segunda figura. Si se toma como premisas la menor y la negación de la conclusión, se obtiene como conclusión la negación de la mayor, y se llega, así, a los 6 modos de la 3ª figura. Tal como nos muestra la tabla siguiente.

---

[21] *Nouveaux essais*, IV, 2, edición citada, p. 439.

[22] *Nuevos Ensayos*, IV, 2, edic. cit., p. 437.

Barbara.	ACD	ABC	ABD	*Barbara.*	ACD	ABC	ABD
Regresus	ACD		OBD	Regresus		ABC	OBD
Ergo		OBC		Ergo	OCD		
Baroco.	ACD	OBD	OBC	*Bocardo.*	OBD	ABC	OCD
Celarent.	ECD	ABC	EBD	*Celarent.*	ECD	ABC	EBD
Regr.	ECD		IBD	Regr.		ABC	IBD
Ergo		OBC		Ergo	ICD		
Festino.	ECD	IBD	OBC	*Disamis.*	IBD	ABC	ICD
Darii.	ACD	IBC	IBD	*Darii.*	ACD	IBC	IBD
Regr.	ACD		EBD	Regr.		IBC	EBD
Ergo		EBC		Ergo	OCD		
Camestres.	ACD	EBD	EBC	*Ferison.*	EBD	IBC	OCD
Ferio.	ECD	IBC	OBD	*Ferio.*	ECD	IBC	OBD
Regr.	ECD		ABD	Regr.		IBC	ABD
Ergo		EBC		Ergo	ICD		
Cesare.	ECD	ABD	EBC	*Datisi.*	ABD	IBC	ICD
Barbari.	ACD	ABC	IBD	*Barbari.*	ACD	ABC	IBD
Regr.	ACD		EBD	Regr.		ABC	EBD
Ergo		OBC		Ergo	OCD		
Camestros.	ACD	EBD	OBC	*Felapton.*	EBD	ABC	OCD
Celaro.	ECD	ABC	OBD	*Celaro.*	ECD	ABC	OBD
Regr.	ECD		ABD	Regr.		ABC	ABD
Ergo		OBC		Ergo	ICD		
Cesaro.	ECD	ABD	OBC	*Darapti.*	ABD	ABC	ICD

De modo que para llegar a conseguir una construcción sistemática y unitaria de la silogística, le resta a Leibniz la deducción de los 6 modos de la 4ª figura y los 4 (principales) de la 1ª tomados como primitivos.

Por lo que respecta a los modos de la 4ª figura, Leibniz los demuestra retrotrayéndolos a los modos de las otras figuras por medio de la *conversión*. Así, por ejemplo: *Calerent* (4ª figura)

Todo A es B
Ningún B es C

Ningún C es A

por conversión *simplex* de la premisa menor y de la conclusión, da lugar a *Cesare* (2ª figura)

Ningún C es B
Todo A es B

Ningún A es C

En *Nuevos Ensayos*[23] se afirma que la 4ª figura debe ser extraída de la 1ª mediante las conversiones, "de modo que está alejada en un grado más que la segunda y la tercera, las cuales son del mismo nivel y están alejadas por igual de la primera, mientras que la cuarta precisa también de la segunda y la tercera para poder ser demostrada. Sucede precisamente que las conversiones que necesita utilizar se demuestran a partir de las figuras segunda y tercera, las cuales a su vez son demostrables independientemente de las conversiones".

Por lo que respecta a los 4 modos de la 1ª figura, Leibniz, en *De formis syllogismorum* (cit.), afirma que estos modos primitivos nacen inmediatamente del *fundamentum syllogisticum*, que Leibniz pone en la base de su construcción y que es la reformulación, desde el punto de vista extensional, del principio tradicional *dictum de omni et nullo;* lo formula así:

"Fundamentum syllogisticum hoc est: si totum aliquod C cadat intra aliquod D, vel si totum C cadat

[23] Libro IV, cap. II. Edic. cit., p. 437.

extra aliquod D, tunc etiam id quod inest ipsi C priore quindem casu cadet intra D, posteriore vero casu cadet extra D. Et hoc est quod vulgo vocant dictum de omni et nullo"[24].

De este principio se deduce inmediatamente, por una parte *(del dictum de omni)*, los dos modos afirmativos *Barbara* y *Darii;* y, por otra *(del dictum de nullo)*, los dos negativos *Celarent* y *Ferio*.

Esta preocupación por la construcción sistemática unitaria de la silogística constituye una constante del pensamiento leibniciano. Aparece no sólo en los escritos ya citados, sino en otros pertenecientes al período de madurez. Así, en *Definitiones logicae*[25] y en *Mathesis rationis*[26], que son posteriores a 1710, también aparece.

La exigencia leibniciana es, en último análisis, la de *axiomatización* de la lógica, y por ello se convierte Leibniz en precursor de uno de los distintivos más vigorosos de la lógica formal moderna. De manera que Leibniz, aunque restrigiéndose a la silogística tradicional introduce en el estudio de la lógica los temas formales de la investigación matemática.

Interpretación extensional-intensional

En el apartado anterior hemos visto cómo Leibniz funda los principios del silogismo, *Dictum de omni et nullo*, en la consideración extensional. Pero hay otros escritos en los que funda los principios silogísticos en la consideración de la comprensión (o intensión) de los conceptos. Define, entonces, la inclusión entre los términos de una proposición como sigue: "A incluye B" significa que B es universalmente afirmado de A, esto es: "Todo A es B"; y "A excluye B" significa que B es universalmente negado de A, esto es: "Ningún A es B"[27].

No sólo en la construcción de la teoría silogística, sino, en general, en toda su teoría lógica, Leibniz ha oscilado entre la consideración extensional y la intensional. Tanto Couturat[28] como Dürr *(op. cit.)* han examinado las posiciones adoptadas por Leibniz en escritos y períodos diversos. Y de tal examen cabe concluir que la consideración extensional prevalece en los escritos en los que domina la exigencia de una formulación rigurosa de las reglas silogísticas como en la *Mathesis rationis*[29], en donde considera constantemente los individuos que componen la extensión de los diversos términos; y funda sobre esta única consideración todas las reglas del silogismo; o en *De formae logicae comprobatione per linearum ductus*[30], tampoco fechado, pero que parece contemporáneo o poco posterior al grupo de estudios de los que el más importante es *Generales Inquisitiones* de 1686. Pertenece, pues, según la clasificación de Couturat, al 2º período de los intereses leibnicianos por el cálculo lógico. En él aparece un amplio tratamiento de la silogística desde la consideración extensional mediante la utilización de gráficos lineales (que serán retomados por Lambert en su *Neues Organon);* y gráficos mediante círculos (los llamados círculos de Euler, por ser éste quien, en *Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1772, Vol. 2 de cartas, pp. 102-108, los introdujo en la historia del análisis lógico). Y también aparece una tentativa de desarrollar la teoría de la cuantificación del predicado *vi formae;* teoría que desarrollada luego por Hamilton, inclinaría definitivamente a la lógica hacia la consideración extensional. Y si Leibniz rechaza la cuantificación *explícita* del predicado, tal como Hamilton la propondría más tarde, es debido a que el predicado se encuentra ya, implícitamente, cuantificado *vi formae* según que la proposición sea afirmativa o negativa[31].

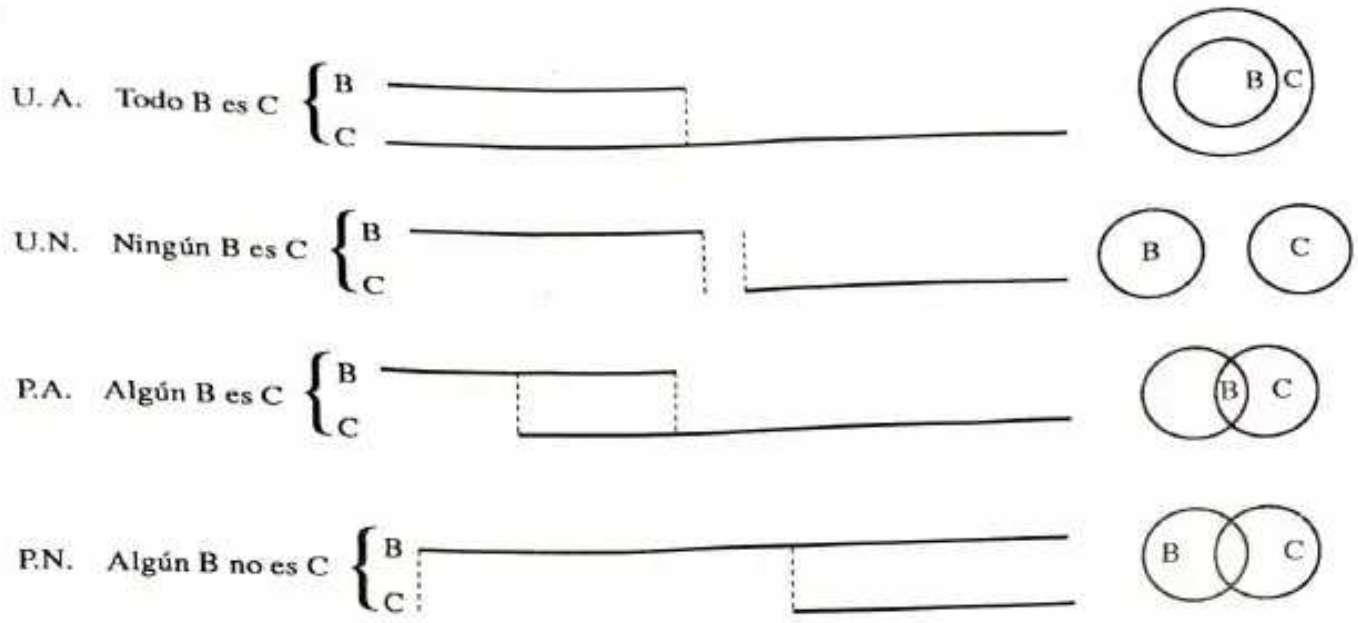
Leibniz concedía, además, gran importancia a la representación de los silogismos mediante figuras geométricas.

El esquematismo lineal empleado por Leibniz[32] consiste en representar los términos mediante segmentos de una misma línea recta, bien contenida la una en la otra, bien exterior la una a la otra, bien teniendo una parte común, etc. y para distinguir los diversos segmentos y marcar su unidad utiliza trazos discontinuos. Así son representados, mediante segmentos y círculos, los 4 tipos de proposiciones de la lógica clásica[33]:

---

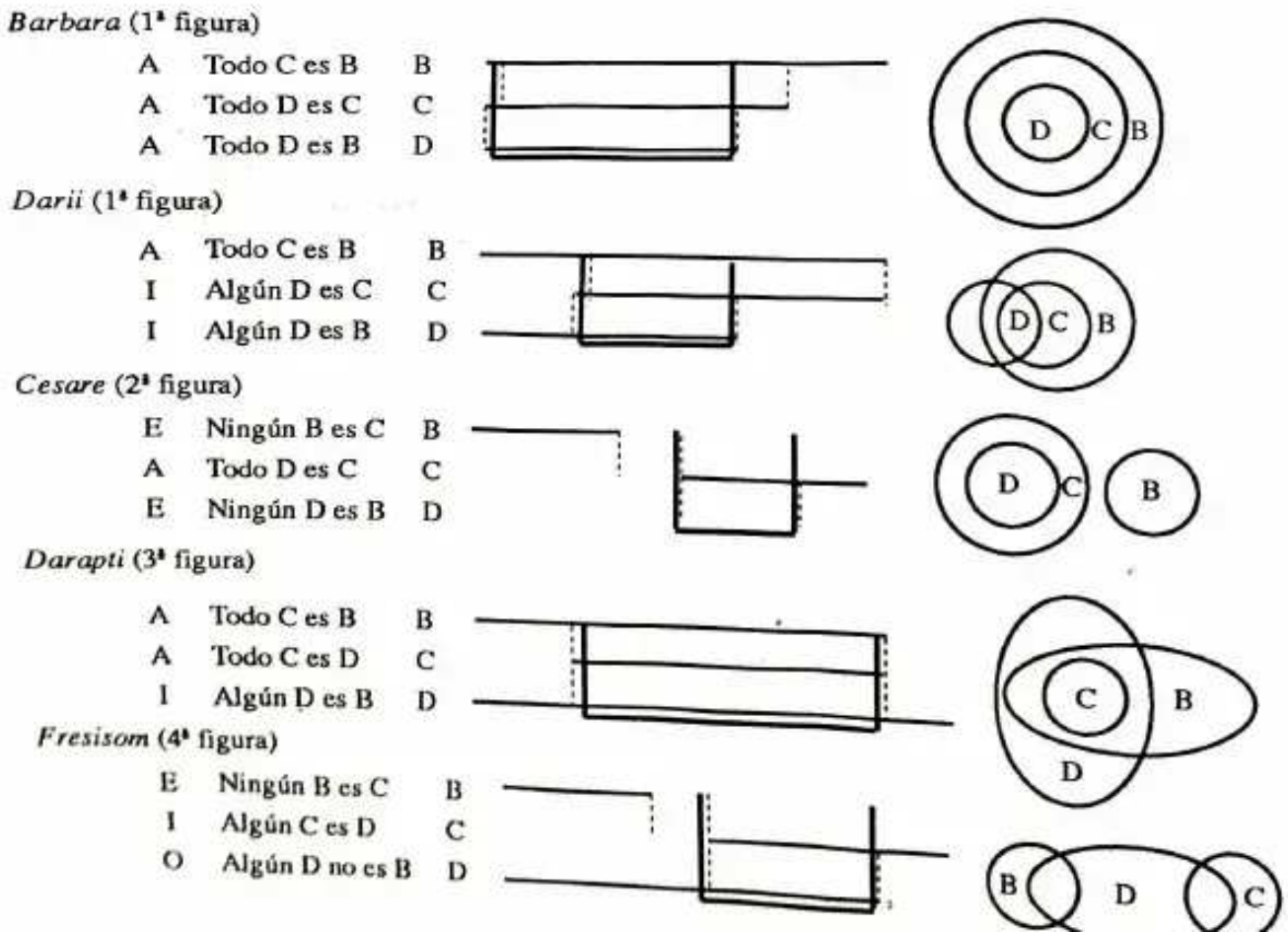
[24] *De formis syllogismorum*. Edic. cit., p. 410.
[25] Gerhardt, *Philos. VII*, pp. 208-210.
[26] Couturat, *Opuscules* ..., pp. 193-202.
[27] Gerhardt, *Philos*. VII, p. 208.
[28] *La Logique*, p. 23.
[29] Opúsculo no fechado. Según Dürr pertenece a los últimos años de la vida del autor.
[30] Couturat, *Opuscules*, 209-321.
[31] *Mathesis rationis*, edic. cit., p. 194.
[32] Couturat, *Opuscules*, p. 206 y ss; Gerhardt, *Philos*. VII, pp. 247 y ss; y *Generales inquisitiones* (en Couturat, *Opuscules*, pp. 356-399) y *De formae logicae* (en Couturat, *Opuscules*, pp. 292-321).

[33] *De formae logicae*, edic. cit., p. 292.



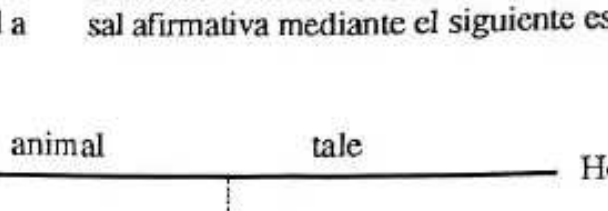
La representación mediante esquemas lineales tiene la ventaja sobre la hecha mediante círculos de que en ella, gracias a los trazos discontinuos verticales, las dos particulares se distinguen, cosa que no ocurre en los esquemas circulares.

Para representar los silogismos, Leibniz yuxtapone simplemente los esquemas de las dos premisas, colocando en medio los segmentos que representan el término medio, haciéndolos, coincidir; obtiene, así, un esquema de tres líneas, de las cuales las 2 extremas representan los términos extremos. Y une estas por medio de dos líneas continuas (para distinguirlas de las discontinuas, que representan las premisas) verticales, que representan la conclusión. Los segmentos comprendidos entre estas dos líneas continuas verticales representan la conclusión y están necesariamente incluidos en los que afectan a las premisas, es decir, los que comprenden los trazos discontinuos. Y, finalmente, Leibniz dobla el segmento afectado del término menor, para así (según que esté doblado todo o parte), indicar si la conclusión es universal o particular.



Como se ve, el esquematismo lineal es más explícito y expresivo que el circular, y Leibniz lo emplea también para verificar si el modo silogístico propuesto es o no correcto. Así, si se trata de averiguar si la 4ª figura admite un modo en AOO, se efectúa la representación lineal correspondiente:

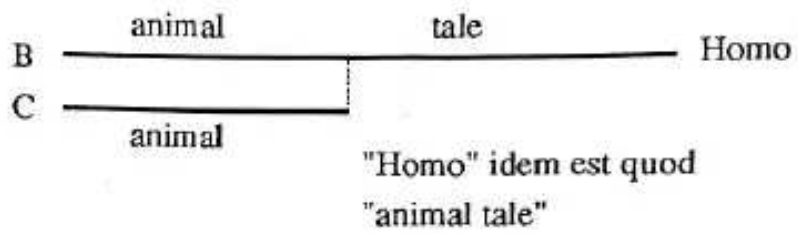
A	Todo B es C	B
O	Algún C no es D	C
O	Algún D no es B	D



En donde aparece que, dadas las premisas, la conclusión puede ser falsa, por lo que no resulta de las premisas; no es, por tanto, un silogismo correcto.

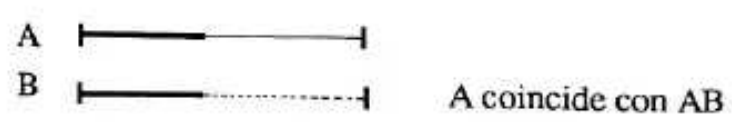
Pero, curiosamente, es en este mismo escrito[34] donde Leibniz, tras haber aplicado este esquematismo lineal a todos los modos silogísticos válidos, lo cual supone y se basa sobre la consideración extensional, inmediatamente pasa a ensayar la aplicación de esa representación lineal a la consideración intensional. Y, así, representa la universal afirmativa mediante el siguiente esquema:

Omnis homo est animal
Omne B est C



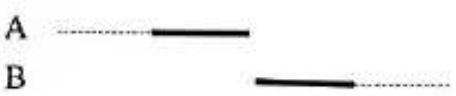
Y, en *Generales Inquisitiones* (§ § 113-121), define los esquemas de los tipos A, E, I, O siguiendo la consideración intensional de la manera siguiente:

UA "Todo A es B", esto es, A coincide con algún B



PA "Algún A es B', esto es, algún A coincide con algún AB

UN "Ningún A es B"



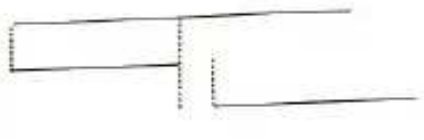
PN "Algún A no es B"

[34] *De formae logicae*, ed. cit., p. 306.

Y a continuación señala Leibniz que se puede considerar, inversamente, la especie como parte del género, con lo que se vuelve a la consideración extensional, de donde resulta para la UA, por ejemplo, el esquema siguiente (inverso del precedente):

Mas, si bien es cierto que los esquemas gráficos de la consideración extensional se corresponden con los de la consideración intensional por inversión de líneas, ello ocurre sólo en el caso de la representación de proposiciones, donde sólo figuran dos términos, pero no se mantiene esa correspondencia en los esquemas de los modos silogísiticos, en los que entran 3 términos (a excepción del modo *Barbara*, cuyo esquema gráfico es el mismo para la consideración extensional que para la intensional). Y así, por ejemplo, el esquema de *Celarent*, construido desde la consideración intensional sería:

E	Ningún C es D	B
A	Todo B es C	C
E	Ningún B es D	D



no permite extraer la conclusión "Ningún B es D", ya que es posible, dadas las premisas, concluir "Algún B es D", lo que contradice la proposición anterior. Esto significa que las relaciones de intensión no son susceptibles de representación geométrica, a diferencia de las relaciones de extensión.

Leibniz, sin embargo, considera equivalentes el punto de vista de la intensión (según el cual *praedicatum inest subiecto)* y el punto de vista de la extensión (según el cual *subiectum inest praedicato);* el cual no es sólo el punto de vista de la escolástica nominalista, sino también el de la ciencia moderna matematizada, cuando abarca los casos singulares bajo el concepto de leyes. Como ha señalado Russell *(A critical exposition...)*, Leibniz ha adoptado el punto de vista de la extensión en el curso de su actividad como matemático y como físico, mientras que en el plano lógico -no obstante las saludables tentativas extensionalistas- ha preferido el punto de vista de la intensión. El se sentía atraído por su concepción de las nociones complejas como combinaciones de las nociones simples. Así aparece claramente en un texto recogido por Couturat[35]: "Dos términos que se contienen, pero que no coinciden, se llaman comunmente *género* y *especie:* éstos, por lo que respecta a las nociones o términos componentes, difieren como parte y todo, de manera que la noción de género es la parte y la noción de especie el todo; ésta se compone, además, del género y de la diferencia. Por ejemplo: la noción de "oro" y la noción de "metal" difieren como parte y todo; además en la noción de "oro" está contenida la noción de "metal" y otras cosas, como pueda ser la noción de "el más pesado entre los metales". Por tanto, la noción de oro es mayor que la noción de metal. En las escuelas se habla de modo diverso, no considerando las nociones, sino los ejemplos sujetos a las nociones universales. Se dice, por tanto, que "metal" es más amplio que "oro", puesto que contiene un número mayor de especies; y si enumerásemos, por una parte, los individuos de oro y, por otra, los individuos de metal, serían más éstos que aquéllos, y los primeros estarían contenidos en los segundos como parte en el todo. Hecha esta observación y adoptados los símbolos, pueden demostrarse todas las reglas lógicas con un cálculo un tanto diverso del desarrollado: es suficiente cierta inversión de nuestro cálculo. En realidad, yo he preferido considerar las nociones universales, esto es, las ideas y sus composiciones puesto que no dependen de la existencia de los individuos".

[35] *Opuscules*, pp. 52-55

El hecho de que Leibniz haya mantenido la posibilidad de poder pasar indiferentemente de la consideración intensional a la extensional, revela el predominio en su pensamiento de una concepción lógico-metafísica de corte sustancialista.

La lógica formal se desarrolla, a partir de la 2ª mitad del siglo XIX sobre la consideración directa del razonamiento matemático, en el que la generalización de la lógica de relaciones posee una función esencial y ha tomado por causa el punto de vista extensional. La diversidad de posiciones entre la lógica formal moderna y la lógica leibniciana, cara al problema de la extensión, reside en su diferencia de presupuestos epistemológicos. En el primer caso se tiene un instrumento técnico de inferencia modelado sobre el ejemplo concreto de las ciencias matemáticas, mientras que en el caso de Leibniz la lógica -en cuanto formalizada- está en función de la metafísica y por ella condicionada.

5. Lógica de relaciones

Leibniz, por su fuerte vinculación a la tradición aristotélica, propendía a adoptar el punto de vista intensional, y a erigir en principio único de la relación proposicional el *praedicatum inest subiecto*. Pero no es posible reducir todas las formas proposicionales a la clasificación aristotélica en géneros y especies; clasificación modelada sobre la clasificación biológica (por ejemplo, animal-mamífero-hombre) y que obedece a la concepción metafísica de la sustancia aristotélica. Esto se hace patente ya en las leyes naturales de la nueva ciencia matematizada, cuya determinación a partir de los casos singulares no es confrontable con el análisis de los conceptos individuales mediante los conceptos de las propiedades de los universales contenidas en ellos. La ley no es un concepto universal inherente a los casos singulares -como la animalidad es inherente a cada uno de los individuos de la especie "mamífero"- sino una relación sintética entre individuos. El concepto esencial no es el de clase y el de la relación de inclusión, sino el de la "relación de orden". Y aquí llegamos frente a nociones en las que no se mantiene la proporción inversa entre extensión y comprensión, puesto que la extensión constituye su misma comprensión, esto es, su significado.

Por eso, la lógica de relaciones constituirá un salto de la lógica tradicional a la moderna lógica formal, modelada sobre el razonamiento matemático. Una proposición relacional no es reducible a una proposición de tipo aristotélico. Leibniz tiene ciertas intuiciones y señala, incluso, que cabe otro tipo de argumentación formal además de la silogística: "Es necesario saber que por argumentos *in forma* no entiendo únicamente esta manera escolástica de argumentar que suele ser utilizada en las Escuelas, sino todo razonamiento cuya conclusión se saca en virtud de la fuerza de su forma y en la cual no resulta necesario sustituir nada; de manera que cualquier *sorites* o cualquier entrelazamiento de silogismos que evite la repetición, o incluso una cuenta bien hecha, un cálculo algebráico, o un análisis de los infinitesimales, serán para mí más o menos argumentos *in forma*, porque su forma de razonar ha sido demostrada previamente, de modo que estamos seguros de que no nos vamos a equivocar"[36]. Ideas similares expone en la carta, ya citada, a Wagner. A la lógica pertenecen, pues, tipos asilogísticos de deducción, entre los que se hallan las "deducciones asilogísticas acertadas", como la consecuencia *a recto ad obliquum* como, por ejemplo: "Jesucristo es Dios, luego la madre de Jesucristo es la madre de Dios"; o la *inversio relationis* como, por ejemplo: "Si David es padre de Salomón, no hay duda de que Salomón es hijo de David"[37].

Leibniz había leído estas "deducciones asilogísticas" en las *Institutiones logicae* (1638), más conocida por la *Logica hamburgensis*, de Joaquín Jungius (1587-1657), quien había descubierto que al lado del silogismo, y al mismo nivel de simplicidad y evidencia, había otros tipos de inferencia perfectamente legítimos. Leibniz se interesó por estos esquemas deductivos que aparecían en la *Logica hamburgensis* y luego recogerá, completándola, la tabla de razonamientos que Vagetius había añadido a la 2ª edición (1681) de la *Logica hamburgensis* bajo el epígrafe: *Tabula dianoearum quam discipulis suis commendare Jungius solebat et clavem logicae hamburgensis dianoeticam appellare*, y que Leibniz recoge en *Opuscules*[38].

Entre las inferencias no silogísticas están:

1. la *inversio relationis:* "David es padre de Salomón" y "Salomón es hijo de David"; "Cristo redimió a todos los pecadores" y "Todos los pecadores han sido redimidos por Cristo".
2. la consecuencia *a compositis ad divisa:* "Platón es filósofo elocuente luego Platón es filósofo y también Platón es elocuente"; Pablo es más docto que Pedro, luego Pablo es docto".
3. la consecuencia *a divisis ad composita:* "Todo planeta se mueve por el zodíaco; todo planeta

[36] *Nuevos Ensayos*, ed. cit., pp. cit. 584.

[37] *Nuevos Ensayos*, ed. cit., p. 584.
[38] Ed. Couturat, p. 427-428.

es estrella, luego todo planeta es estrella que se mueve por el zodíaco".

4. la consecuencia a *recto ad obliquum:* "Todo círculo es figura; luego quien describe un círculo describe una figura"; "Todo reptil es animal; luego quien creó todo animal, creó todo reptil".
5. La consecuencia *per vocabula conjugata* como son: "sabiduría", "sabio", "saber", "sabiamente"; y así: "Algún opulentos no es feliz; luego alguna opulencia no es la felicidad".

Jungius se había vista impelido a reconocer estos tipos de razonamientos por su curiosidad por las matemáticas, cuyos métodos deductivos se le apareceían tan seguros como los de la lógica aristotélica. Pero, en último extremo, Jungius busca reducir estas formas de razonamiento a una forma clásica. Y por ello los silogismos oblicuos son colocados entre los que él llama "crípticos" ["Syllogismus crypticus est, cuius naturalis dispositio certis crypsibus occultatur vel immutatur"[39]] y que, por tanto, deben ser liberados de esa cripta que los oculta y puestos en forma normal; porque reposan sobre manipulaciones de signos que no vienen permitidas por reglas explíctamente formuladas.

Leibniz sigue esta idea, y por eso considera el análisis (o *característica)* gramatical como prefacio indispensable del análisis (o *característica)* lógico. Y todas esas consecuencias "asilogísticas", que no se pueden demostrar en las lenguas vulgares más que por el análisis de los términos y la sustitución de lo definido por la definición, han de poder ser demostradas de manera inmediata e intuitiva en la *característica,* la cual tiene por objeto expresar los conceptos por caracteres, que hacen su composición y sus relaciones manifiestas y visibles. Por eso Leibniz, cuando busca echar la base de la característica o del cálculo lógico, admite *a priori* combinaciones de conceptos asimétricos (no conmutativos), llegando a inventar un signo, $\vdash$, para la operación asimétrica[40]. Se percata de que un término puede entrar de diversas maneras en una fórmula: directas y oblicuas; y, en fin, reconoce expresamente la existencia de diversas relaciones que dan lugar a algoritmos diferentes: "Dantur varia relationum genera, ut characteribus diverso modo utamur. Dantur relationes quaedam et significationes in infinitum replicabiles et reflexae"[41]. Establece, además, una clasificación de las relaciones matemáticas fundamentales y según sus propiedades combinatorias, que constituyen las reglas del cálculo correspondiente a cada una de ellas. Cada una de estas relaciones viene expresada en el lenguaje por estos términos relativos: "igual a", "semejante a", "más grande que" etc., que sobrepasan los límites de la lógica clásica. Y Leibniz busca inventar una característica apropiada para estas relaciones, por ejemplo, en *Analysis Didactica*[42] ensaya representar la *inversio relationis* mediante la inversión de la letra que representa la relación. Así:

"Triangulum minus quadrato"..... "$T^n C^{nc} Q^c$"
"Triangulum quo maius est quadratum...."$T^n (T^r \mathfrak{I}^{dr} Q^d)$"
"Quadratum maius triangulo"....."$Q^e \mathfrak{I}^{ef} T^f$"

Como señala Couturat[43], aunque estas tentativas de Leibniz resultaron infructuosas, no obstante, sirven para plantear el problema de la representación simbólica de las relaciones y para probar que él no ignoraba la multiplicidad y la complejidad de ideas y de relaciones que una *Característica* completa debe representar. Por esto, sigue diciendo Couturat[44], "Leibniz puede ser considerado, pues, como el precursor, no sólo de la lógica algorítmica, sino también de la lógica de relaciones entrevista por De Morgan, fundada por Peirce y desarrollada por Schoröder". Pero Leibniz, demasiado anclado a la tradición clásica, o más bien por el sustrato metafísico (su teoría de la proposición reducible siempre a la forma conónica de *praedicatum inest subiecto)* que alimentaba sus indagaciones lógicas, sigue en la misma dirección de Jungius: tratar de reconducir esas formas "anómalas" a las formas clásicas, y busca expresar todas las relaciones con los medios de la lógica clásica, esto es, mediante la sola relación de inclusión. Así, por ejemplo[45], para tratar el adagio: "La justicia es la caridad del sabio" retraducido a la proposición siguiente: "Justus est charitativus similis sapienti", Leibniz intenta (de modo infructuoso) representarla mediante diagramas circulares; y la retraduce, finalmente, a "Justus est charitativus sapientiformis", en donde no aparece expresada la relación de semejanza, sino que ha sido subsumida en un atributo yuxtapuesto a otro, con lo cual la proposición relacional es sustituida por otra que es predicativa. Y, de

[39] Dietericus, *Institutiones dialecticae,* 1613.
[40] Gerhardt, *Philos.* VII, pp. 31 y 207.
[41] Couturat, *Opuscules,* p. 405.
[42] Couturat, *Opuscules,* p. 428.
[43] *La Logique...* ed. cit., p. 436.
[44] *Ibid.,* p. 303, nota.
[45] Couturat, *Logique,* p. 436.

modo análogo, Leibniz trata de traducir cada proposición relacional mediante proposiciones atributivas: "Paris ama a Helena" por "Paris es amante en tanto que Helena es amada"; o también: "Tito es mayor que Cayo" por "Tito es grande en tanto que Cayo es pequeño", en donde aparece que *en tanto que* no es más que una manera retorcida de expresar la relación, que de ningún modo entra en la forma de la proposición atributiva. La forma atributiva sólo permite yuxtaponer atributos, uniendo unos a otros por el conjuntor, que sólo expresa una simple simultaneidad entre ellos, impidiendo, así, expresar cualquier otro tipo de relación que pueda mediar entre ellos. El tozudo mantenimiento de la forma atributiva como única forma proposicional, impidió a Leibniz elaborar una atuténtica lógica de relaciones.

6. Lógica inventiva (o arte combinatoria)

El término *lógica*, empero, no tiene para Leibniz como único referente la lógica tradicional. En la carta a Wagner escribe: "Por lógica o arte de pensar *(Denkkunst)* entiendo el arte de usar el intelecto, por lo tanto, no sólo juzgar lo que está establecido, sino también encontrar lo que está escondido". De manera que la lógica, además de como *ars demonstrandi*, debe desarrollarse como *ars inveniendi*. Y en todas las meditaciones y proyectos de Leibniz está presente la lógica inventiva, estimada como una nueva vía para llegar a la verdad, porque es "un arte admirable de inventar, y un análisis que hace en otras materias algo similar a lo que el álgebra en los números"[46].

La idea de esta lógica inventiva le sobrevino a Leibniz de muy joven, a sus 14 años, tras deleitarse leyendo a Zabarella, Rubio, Fonseca, Suárez le llamó la atención el hecho de que las categorías de Aristóteles sirven para clasificar los términos simples, y de aquí le vino la idea -que será el germen de toda su lógica- de preguntar a su profesor por qué no se clasificaban, asimismo, los términos complejos (las proposiciones). Y aunque no recibió satisfactoria respuesta, siguió meditando su idea de una clasificación de las proposiciones, llegando a la consideración de que todas las verdades pueden ser deducidas a partir de un pequeño número de verdades simples mediante el análisis de sus componentes y que, a su vez, todas las ideas pueden ser reducidas por descomposición a un pequeño número de ideas primitivas e indefinibles. La tarea consistirá, pues, en buscar la lista completa de esas ideas primitivas y simples, y luego combinarlas entre sí para obtener, progresivamente, mediante un procedimiento infalible, todas las ideas complejas. Esas ideas simples constituyen el alfabeto de los pensamientos humanos, porque son elementos que entran por combinación en todos los pensamientos (o ideas derivadas), como las letras del alfabeto entran por combinación en todas las palabras o frases del discurso.

He aquí "esta admirable concepción: que se pueda excogitar como un alfabeto de las nociones humanas, y que con la combinación de las letras de él y de los vocablos que se forman se puedan encontrar y juzgar todas las cosas por medio del análisis"[47].

En la *Dissertatio* Leibniz da a conocer este proyecto suyo, aplicando a la lógica inventiva el arte combinatoria. El *usus* décimo de la *Dissertatio* está dedicado al problema propio de la lógica inventiva, y viene formulado así: 1. "Dato subiecto praedicata, 2. dato praedicato subiecta invenire, utraque tum affirmative, tum negative".

Puesto que la proposición está formada de un sujeto y un predicado, el problema consiste en encontrar todas las proposiciones verdaderas en las que un término figura, bien como sujeto, bien como predicado. La solución del problema viene dada mediante el cálculo combinatorio cuyos principios ha desarrollado Leibniz previamente. Pero si la solución es matemática, la presentación del problema es metafísica, puesto que se funda en una concepción de la realidad como composición armónica de los elementos simples, reflejada gnoseológicamente por proposiciones *moleculares* resultantes de la combinación de proposiciones *atómicas*.

Este fondo metafísico queda patente incluso en las citas que al respecto hace Leibniz de autores a los que considera precursores suyos en este campo; entre ellos, además de la del nominalista Hobbes, el "profundísimo escrutador de los principios en todas las cosas, quien estableció que toda operación de nuestra mente es computación", predominan las de los cultivadores de la tradición místico-pitagórico-cabalística: Raimundo Lulio, Cornelio Agrippa, Juan Enrique Alsted, Giordano Bruno, Pedro Grégoire, Juan Enrique Bisterfeld.

Según Leibniz, Lulio y los lulistas han realizado una obra que deja, sin duda, mucho que desar, puesto que su *Ars magna* está más bien dirigida a la formación de la habilidad en la disertación que a la consecución de una verdadera ciencia. Y critica el *Ars magna* de Lulio por su arbitrariedad en la elección de los conceptos elegidos (que no pueden ser representantes de

[46] Couturat, *Opuscules*, p. 175.
[47] *Historia et commendatio linguae characterícae*... Gerhardt, *Philos.* VII, p. 185.

los elementos simples. Lulio había elegido 9 en cada clase, para obtener una simetría fácil). Y la elección de las clases (Lulio había elegido 6: atributos absolutos, relaciones, cuestiones, sujetos, virtudes, vicios) es, asimismo, arbitraria. Pero las críticas de Leibniz conciernen a la realización, no al principio que la inspira. El deseo de Leibniz es que "un hombre de ingenio vastísimo penetre más profundamente que Lulio o Tolosano (P. Grégoire) *in intima rerum* y lleve a cabo lo que nosotros preconcebimos, cuyas directrices trazamos, y lo que ponemos entre los *desiderata*... Y tales tareas las destinamos, no tanto a la ampliación de la Aritmética -aunque también lo haremos- cuanto a la apertura de las fuentes de la lógica inventiva"[48].

Puesto que la lógica inventiva es ciencia y no arte de disertar, la derivación de las proposiciones posibles a partir del alfabeto de las nociones simples son auténticos teoremas: "esto es, las proposiciones que poseen verdad eterna, y que constan no por arbitrio de Dios, sino por su propia naturaleza", lo cual no sucede con las proposiciones "históricas" o las "observaciones", cuya "verdad está fundada, no en la esencia, sino en la existencia, y que son verdaderas como por caso, esto es, por arbitrio de Dios... y de las que no se da demostración, sino inducción"[49]. Aparece aquí ya la célebre distinción entre verdades de razón y verdades de hecho. Distinción que en Leibniz obedece a su interpretación ontológica condicionada por su concepción metafísica platónico-pitagórica.

El desarrollo del tratamiento combinatorio de la lógica inventiva consiste en presuponer, ante todo, la constitución de la clase de los términos simples o conceptos elementales, la cual se obtiene por el análisis de todos los conceptos mediante definición de los conceptos y de la definición de las definiciones, hasta llegar a los términos o conceptos indefinibles o simples, que ya no son comprendidos por definición, sino por analogía. Estos términos elementales son los términos de primer orden, que serán colocados en una misma clase (la primera) y serán representados con caracteres o signos, como, por ejemplo, los signos numéricos. Los signos de los términos o conceptos complejos (*termini orti*) se podrán obtener formando las combinacines binarias -obteniendo una clase de términos de *segundo* orden-; ternarias -obteniendo una clase de términos de *tercer* orden-, n-arias de los términos primitivos. Cada término compuesto, al ser combinación de términos simples, será representado por el producto de los números que representan los términos simples. Para designar los términos de orden superior al 1º utiliza un quebrado, cuyo denominador indica el número de orden de la clase, y el numerador el número de término de esa clase. Así $\frac{2}{3}$ representa el 2º término de la 3ª clase. De manera que un mismo término puede entrar en combinaciones diferentes, en múltiples expresiones. Y para verificar la equivalencia de diversas expresiones, bastará con descomponerlas en términos simples; operación análoga a la descomposición de un número en factores primos. Y posee la ventaja de que al ser única la descomposición, esa fórmula única y bien determinada proporciona un criterio de infalibilidad de su identidad. Leibniz ilustra su método con un ejemplo: sean los 4 términos simples 3, 6, 7, 9 ; los conceptos de la segunda clase son las combinaciones: 3.6 , 3.7 , 3.9 , 6.7 , 6.9 , 7.9 ; los de la tercera clase 3.6.7 , 3.6.9 , 3.7.9 , 6.7.9 ; y el único de la cuarta clase 3.6.7.9. Y utilizando el símbolo de fracción en el sentido indicado, se puede representar el término 3.6.7 de la tercera clase como sigue:

$$\frac{1}{2} \cdot 7; \text{ o bien } \frac{2}{2} \cdot 6 ; \text{ o bien } \frac{4}{2} \cdot 3$$

Y para descomponer un término complejo en los simples, pone este ejemplo, por analogía con la aritmética: el nº 210 se puede descomponer en productos como: 42 x 5, 6 x 35, 14 x 15, etc., pero cuando se descompone en factores primos, la descomposición (la expresión es única: 2 x 3 x 5 x 7.

Resulta ahora fácil resolver el problema planteado al principio de la sección 10 de la *Dissertatio*. La primera parte del problema -"Encontrar los predicados posibles de un sujeto dado"- se resuelve descomponiendo el sujeto dado en sus elementos de la 1ª clase y formando con éstos todas las combinaciones posibles (2^m-1, siendo m el número de elementos simples hallados); el número de las combinaciones será el número de predicados buscados. De modo análogo es calculable con facilidad el número de sujetos admitidos de un término dado tomado como predicado, esto es, el número de combinaciones, entre las combinaciones de n términos elementales, que contienen la combinación de los m términos elementales que constituyen el predicado dado.

Si n es el número total de términos simples y m el número de factores primos de la combinación dada, el número de combinaciones buscadas es el número de combinaciones posibles de n-m, a saber: 2^{n-m} - 1.

Y como el término dado puede ser su propio sujeto

[48] Gerhardt, *Philos.* IV, p. 64.
[49] Gerhardt, *Philos.* IV, p. 69.

(proposición idéntica), situación que corresponde al caso de la combinación de grado 0, queda la fórmula general: 2^{n-m}.

Los cálculos precedentes valen tan sólo para las proposiciones universales afirmativas; pero, puesto que para Leibniz las particulares afirmativas son recavables de las universales por subalternación o conversión, los resultados de los dos cálculos permiten también determinar el número de predicados y de sujetos posibles de un término dado, cuando éste es tomado, bien como sujeto, bien como predicado de una proposición particular afirmativa.

La ampliación del cálculo a las proposiciones negativas, tanto universales como particulares, así como el cálculo del número de silogismos que admiten como conclusión una proposición dada, son asimismo desarrolladas, aunque sumariamente, desde un punto de vista técnico en la *Dissertatio* y contienen algunas inexactitudes señaladas por Couturat y por Dürr. Pero estos errores de detalle no afectan al proyecto fundamental delineado en esta obra juvenil, en la que aparecen ya los elementos y temas esenciales del *ars inveniendi*, a cuyo desarrollo están dedicadas las investigaciones de los años de madurez. Son estos temas:

- la idea de una *characteristica universalis* o ideografía lógica, en la que se establece una correspondencia biunívoca entre signos simples e ideas simples y entre signos compuestos e ideas compuestas.
- y la idea de un *calculus ratiocinator*, en el que las operaciones lógicas pueden ser sustituidas por manipulaciones de signos.

Al final de la sección 10[§50] afirma Leibniz "De todo esto que hemos disertado sobre el arte combinatoria de las ciencias o lógica inventiva... fluye como porisma o aplicación undécima, la escritura universal, esto es, inteligible a cualquier lector perito en cualquier lengua". Escritura en la que, "si es recta e ingeniosamente constituida,... quedará absorbido el conocimiento fundamental de todas las cosas".

7. La *characteristica*

La idea que inspira la elaboración de una característica universal, con independencia de los logros conseguidos por Leibniz, marca una fecha capital en la Historia de la Lógica, por cuanto que el proceso de constitución de la lógica formal moderna viene determinado por el desarrollo de una *characteristica*, una simbolización; simbolización totalmente autónoma de las particularidades y ambigüedades de los lenguajes nacionales. En este sentido Leinniz es el auténtico precursor de la lógica simbólica (o formal).

> "El arte característica es el arte de formar y ordenar símbolos *(characteres)* de modo que expresen los pensamientos *(cogitationes)*, de tal forma que tengamos entre ellos la misma relación que mantienen entre sí los pensamientos. Una expresión es una agregado de caracteres que representan la cosa expresada. La ley de las expresiones es la siguiente: que la expresión de la cosa, esté compuesta de caracteres de aquellas cosas de cuyas ideas está compuesta la idea de la cosa a expresar"[51].

En esta definición aparece con toda evidencia la duplicidad de temas lógicos leibnicianos. Por una parte, como ha explicado Scholz[52], aparecen *in nuce* las exigencias típicas formuladas por la lógica moderna a propósito del simbolismo: la coordinación biunívoca entre signo y significado, mediante la establecida entre *characteres* y *cogitationes*, de manera que la composición del signo representa la composición del significado; y las relaciones establecidas entre los signos se corresponden con las relaciones de los significados.

De esta suposición partirán las tentativas de Leibniz para conseguir una lengua (escrita) racional, una ideografía, no subordinada a las reglas de las gramáticas históricas, sino que exprese directamente las ideas sin pasar por el intermediario de la escritura fonética. Esta es, así, sustituida por una escritura totalmente ideográfica en contacto directo con las ideas que va a expresar. Y el empirismo de las gramáticas históricas da paso a un sistema racional de sintaxis. Es este el simbolismo que Leibniz va buscando en los diversos campos: geométrico, lógico, análisis de los infinitesimales, etc. Y, en este sentido, llega a la constitución de tantas "características" cuantos son los campos en los que explora. Pero esto no basta; no basta con que las características particulares resulten aplicables con éxito (y aquí entramos en el 2º presupuesto al que se hace referencia en la 2ª parte del pasaje citado). Es preciso llegar al fundamento metafísico de la concatenación. No basta con quedarse con la correspondencia establecida entre los *characteres* y la *cognitiones* (1ª parte), sino que hay que pasar también

---

[50] Gerhardt, *Philos.* IV, pp. 72-73.

[53] Couturat, *Opuscules*, p. 151.
[52] *Geschichte...*, p. 53.

a la establecida entre ambos y las *ideae* de las cosas a expresar. El ideal en vano perseguido, pero al que Leibniz no renuncia, es una característica de las características, la cual no se limita a establecer las reglas sintácticas y semánticas del simbolismo, sino que fija, de una vez por todas, la "proporción entre caracteres y cosas", que "es el fundamento de la verdad"[53]. Sólo así será posible imponer silencio a las sectas, y "cuando surjan controversias, no habrá necesidad de disputa entre dos filósofos, como no hay disputa entre dos calculadores. Bastará con tomar la pluma, sentarse delante del ábaco y decirse mutuamente: calculemos!"[54].

Este 2º presupuesto de Leibniz no es ya acorde con la lógica moderna, situando a la lógica leibniciana y a la lógica formal en perspectivas esencialmente distintas. La relación signo-significado posee para Leibniz una implicación ontológica que es del todo extraña a la lógica formal moderna. Cuando ésta se define como "lógica simbólica", no parte para nada del presupuesto de que los signos con los que opera son "símbolos de alguna cosa", ni de que la combinación de los signos venga condicionada por el significado de los mismos. Para la construcción de un sistema sólo se precisa la determinación *sintáctica* de las reglas de constitución de los signos y de las reglas de su transformación. Y si esa desconexión *semántica* de los sistemas formales no fue total en los construidos en el siglo XIX y principios del XX (todavía los *Principia Mathematica* (1910-1913) de Russell y Whitehead conservan en su construcción formal una cierta dependencia de la interpretación semántica de los símbolos, puesto que la implicación mantiene en ellos una posición privilegiada como relación fundamental de la inferencia), la situación se hace evidente a través de las contribuciones de la escuela formalista de Hilbert, con la sola elaboración sintáctica de los sistemas formales, cuyo ejemplo más notable lo constituye la *Logische Syntax der Sprache* de Rudof Carnap. Incluso la posterior integración de la sintaxis lógica con la *semántica lógica*, obra de Alfred Tarski y del mismo Carnap, no altera sustancialmente las características señaladas de los sistemas formales, porque la semántica lógica no se propone el problema general del significado (la coordinación de los signos con una especie determinada de entes), sino la determinación de términos como "verdadero", "falso", "satisface a" -necesarios para la solución de las antinomias semánticas del tipo de la de Epiménides el cretense- dentro del ámbito mismo del simbolismo. Así, la conocida reducción semántica de la expresión "p es verdadero" a "p" expresa simplemente el hecho de que por la exigencia constructiva de la lógica formal la primera expresión no contiene nada más que la segunda.

El simbolismo leibniciano, por el contrario, no es un fin en sí mismo. En el pasaje antes citado aparece claramente que los *characteres* vienen considerados en función de las "ideas" y de las "cosas", esto es, de la realidad y su esencia. Para Leibniz la conexión *"inter res et verba"* es *"certa et determinata"*[55]. El simbolismo facilita y simplifica el razonamiento; y constituye, por tanto, un medio para el fin gnoseológico de la concatenación de las ideas y para el fin ontológico, aún más comprensivo, de la determinación de la estructura ideal de la realidad. El simbolismo no se agota -como en la lógica formal moderna- en la construcción de sistemas formales, sino que adquiere su función esencial en la abolición de las disputas y en la introducción, en cualquier campo de investigación, de ese pleno acuerdo que es posible entre los cultivadores de las matemáticas.

Y la condición de ese posible acuerdo es doble: por una parte viene determinado por la fidelidad a lo que en términos modernos podríamos llamar las reglas sintácticas del simbolismo; pero, por otra parte, depende fundamentalmente de la "adecuación" de los símbolos elegidos, esto es, de "una cierta proporción entre caracteres y cosas, que es el fundamento de la verdad".

La construcción de esta característica *real* concebida por Leibniz va indisolublemente unida a la construcción de la enciclopedia de los conocimientos humanos. Se comprende así que tanto las tentativas de construcción de la enciclopedia como las de la construcción de la característica hayan quedado siempre para Leibniz a nivel del proyecto, sin plasmarse en el plano de las realizaciones.

El problema de la característica se escinde en otros distintos: el de una *lengua característica* y el de una *lengua universal*. El álgebra constituye un ejemplo de escritura característica, en cuanto sistema de signos regido por una sintaxis independiente de los órganos de fonación e independiente de las reglas de las gramáticas de los lenguajes nacionales, y en contacto con las ideas que los signos expresan. Pero el simbolismo del álgebra, aun siendo característica, no es universal. La lógica simbólica, sobre el modelo del álgebra, ha construido una característica más amplia, pero no universal, ya que se limita a los aspectos lógico-matemáticos de las disciplinas. En cambio, ha habido múl-

[53] *Gerhardt, Philos.* IV, p. 192.
[54] Gerhardt, *Philos.* IV, p. 13.
[55] Couturat, *Opuscules*, p. 151.

tiples proyectos de construcción de una lengua universal (sistemas *a priori*, con independencia de las lenguas nacionales, como el proyecto de Wilkins, por ejemplo; sistemas a *posteriori:* sobre la base de los lenguajes nacionales, como el Esperanto, por ejemplo; y sistemas mixtos, como el Volapük de Schleyer[56] que ya no es característica, sino una lengua propiamente dicha, con escritura fonética, no ideográfica.

Leibniz en un principio confundió ambos proyectos y cuando, a sus veinte años, escribe la *Dissertatio*[57], el plan concebido es el de buscar una lengua universal y verdaderamente *filosófica*, por cuanto que había de ser una *ideografía* y no sólo una *esteganografía* o una simple *poligrafía* como resultaban ser los proyectos hasta entonces conocidos. De éstos tenía conocimiento Leibniz a través de Gapar Schott (1608-1666), quien en su *Technica curiosa sive mirabilia artis, libris XII comprehensa* (Nuremberg, 1664) recoge los proyectos del "Hispanus quidam" (Pedro Bermudo, de Atanasio Kircher, *Polygraphia nova et universalis, ex combinatoria arte detecta* (Roma, 1663) y de Juan Joaquín Becher, *Character pro notitia linguarum universalis* (Francoforti, 1661)[58].

Estos primeros proyectos de lengua universal siguen, en esencia, al ideado por Pedro Bermudo y que había sido sugerido por Gerhard Vossius en su *De Arte Grammatica libri septem* (Amsterdam, 1635). El proyecto de Bermundo se basa en la división de los conceptos en clases, ordenados por su grado de complejidad y sustituyendo las palabras de las diferentes lenguas por números. Constituían, pues, sistemas de escritura convencional, en la que la correspondencia entre palabras y números es totalmente artificial y arbitraria. Por ello Leibniz señala la falta de fundamento lógico y filosófico en su construcción. La lengua universal filosófica por él propugnada, supone el análisis completo de los conceptos y su reducción a términos simples. Pero esto conlleva, a su vez, el gigantesco trabajo de elaborar una enciclopedia, la cual constituiría el "alfabeto de los pensamientos humanos", y serviría de base para el vocabulario de tal lengua.

Pese a las dificultades señaladas, el método consistente en sustituir los términos de las diferentes lenguas por números, utilizado por Pedro Bermudo, fue seguido por Cave Beck *(The universal character...*, Londres, 1657), Kircher y por el mismo Leibniz, por ejemplo en su *Lingua Generalis* de 1678[59]. Para entonces habían salido a la luz los proyectos (y de ellos tenía conocimiento Leibniz) de George Dalgarno, *Ars Signorum, vulgo Character universalis et lingua philosophica* (Londres, 1661); y de Jonhn Wilkins, *An Essay towards a Real Character and philosophical language, with an alphabetical dictionary* (Londres, 1668). El sistema de Dalgarno se basa sobre la atribución de una letra a cada una de las 17 categorías irreductibles del pensamiento, con reglas para la composición y variación de las mismas. El sistema de Wilkins sigue las directrices del de Dalgarno, pero está mucho más perfeccionado; se basa en la clasificación de las ideas en cuarenta géneros principales *(summa genera)*, representados por las dos primeras letras de la palabra; cada uno de estos 40 géneros se divide en numerosas diferencias, y cada diferencia en cierto número de especies; diferencias y especies son representadas también por letras en cierto orden en la palabra, y sus modificaciones, correspondientes a las partículas, son representadas por diversos trazos añadidos a las letras.

Leibniz reconoce que los sistemas de Dalgarno y Wilkins son los mejores de los existentes por entonces (1671), porque tienen al ventaja de ser lenguajes a la vez escritos y hablados. Pero les encuentra un defecto fundamental: constituyen lenguas artificiales útiles para las ciencias y prácticas para las comunicaciones internacionales, pero no son lenguas filosóficas que expresen las relaciones lógicas de los conceptos; no constituyen una característica real que traduzca la composición de los conceptos por la combinación de los signos que representan a los elementos simples. La caracterísitica real es para Leibniz una ideografía: un sistema de signos que represente directamente las cosas (o las ideas) y que haga patente las conexiones entre las ideas; la caracterísitica es, así, un álgebra lógica aplicable a todos los objetos e ideas del pensamiento.

Admitido este principio de la característica, el primer proyecto de Leibniz de lengua universal se basa en la representación de las ideas simples, mediante números primos, y las ideas compuestas de unas u otras ideas simples por el producto de los correspondientes números primos. Los números primos son en cierto modo, los *géneros* supremos con relación a sus múltiplos, que serían las especies, y que derivan de los géneros supremos por multiplicación. Así, 2 será el género de los múltiplos de 2; 3 el género de los múltiplos de 3; el producto de los géneros de 2 y 3 será la especie 6, que es, a la vez múltiplo de 2 y 3[60].

Todas las verdades lógicas serán, según esto, repre-

---

[56] Véase L. Couturat- L. Leau, *Histoire de la langue universelle*. Hachette, París, 1903.
[57] Aplicación XI, ed. Gerhardt, *Phil.* IV, p. 72.
[58] Véase J. Velarde, *Proyectos de lengua universal ideados por españoles*, en *Taula*, 7-8 (1987), pp. 7-78.

[59] Couturat, *Opuscules*, p. 277.
[60] *De Synthesi et Analysi*, en Gerhardt, *Phil.* IV, p. 292.

sentadas por verdades aritméticas concernientes a la multiplicación y a la división, y todo razonamiento quedará reducido a cálculo. Así, para expresar que el hombre es una animal racional, se representará, por ejemplo, "animal" por 2, "racional" por 3, y "hombre" por el producto de los dos anteriores. De manera que a la igualdad lógica:

Hombre = animal x racional

corresponde la igualdad aritmética:

6 = 2 x 3

Representar la composición lógica por la multiplicación aritmética, los conceptos simples por los números primos y los conceptos complejos por números compuestos, es el principio del primer sistema de Cálculo lógico ideado por Leibniz y el fundamento de su proyecto de lengua universal. A ambas tareas (o más bien a la que Leibniz consideraba única) dedicó una serie de trabajos fechados en abril de 1679: *Elementa Characteristicae universalis*[61], *Elementa Calculi*[62], *Calculi Universalis Elementa*[63], *Calculi universalis investigationes*[64], *Modus exminandi consequentias per Numeros*[65], *Regulae ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricarum iudicari potest, PER NUMEROS*[66], *Calculus consequentiarum*[67].

Leibniz buscaba, además, que su lengua universal fuese fácil y sencilla de aprender y de manejar, e incluso agradable al oído[68].

Pero la calidad estética de la lengua no debe ir en detrimento de, sino que ha de quedar supeditada a, su simplicidad y su regularidad[69]. De modo que para transformar la characteristica diseñada en una lengua hablada y escrita, Leibniz idea la siguiente traducción: las 9 primeras consonantes del alfabeto latino (b, c, d, f, g, h, l, m, n) representarán las 9 cifras significativas; y las cinco vocales (a, e, i, o, u) representarán las unidades decimales sucesivas (1, 10, 100, 1000, 10.000). Las unidades de orden superior podrán ser representadas por diptongos. Siendo esto así, para pronunciar o escribir un número bastará asociar la consonante correspondiente a la cifra con la vocal correspondiente al orden decimal y pronunciar o escribir la palabra resultante de la asociación de tales letras. Así, el número 81.374 se escribirá y se pronunciará *Mubodilefa*.

Mu + bo + di + le + fa = 81.374
80.000 + 1.000 + 300 + 70 + 4

Esta notación posee la ventaja sobre la de Dalgarno de que el valor numérico de las letras es independiente de su posición, de modo que se puede permutar las sílabas de la palabra sin que varíe el significado (el número). Así, por ejemplo, el número anterior podría ser enunciado de esta otra manera: *Bodifalemu*.

Bo - di - fa - le - mu = 81.374
1.000 - 300 - 4 - 70 - 80.000

Este fue el proyecto inicial de lengua universal ideado por Leibniz. Para llevarlo a cabo se hacía preciso analizar todas las ideas, reduciéndolas a sus elementos simples para con ellas formar el *vocabulario*. Y, luego, contruir una *gramática* "racional", para lo cual convenía estudiar las gramáticas de las lenguas naturales. Para facilitar el paso de las lenguas naturales a la lengua "racional", Leibniz creyó conveniente admitir un intermediario provisional, buscando la elaboración de la gramática antes de la constitución del vocabulario, tarea que acomete en 1678: *De Grammatica Rationali*[70] y *Analysis linguarum*[71]. En espera de que se invente el auténtico vocabulario, busca aplicar las reglas gramaticales a un sustrato concreto, el cual sólo puede proceder del lenguaje natural. Y Leibniz escoge como tal al latín. Esta gramática, aplicada al vocabulario latino, ha de ser *universal;* esto es, ha de reunir todos los recursos y todas las ventajas de las gramáticas naturales, y también ha de ser *regular*, es decir, ha de estar exenta de excepciones, de anomalías e incoherencias. Esboza, así, una lengua latina simplificada y totalmente regular, con una conjugación, una declina-

[61] Couturat, *Opuscules*, pp. 42-49.
[62] *Ibid.*, pp. 49-57.
[63] *Ibid.*, pp. 57-66.
[64] *Ibid.*, pp. 66-70.
[65] *Ibid.*, pp. 70-77.
[66] *Ibid.*, pp. 77-84.
[67] *Ibid.*, pp. 80-89.
[68] *Lingua generalis*, en Couturat, *Opuscules*, p. 277; y *Lingua universalis*, Ibid., p. 180.
[69] *Grammaticae cogitationes*, Ibid., p. 286.
[70] Couturat, *Opuscules*, p. 361.

[71] Couturat, *Opuscules*, p. 281.
[71] *Ibid.*, p. 353.

ción; eliminadas las distinciones de géneros, de números, de las personas en la conjugación de los verbos, de las flexiones de los adjetivos; y tendiendo en lo posible hacia la eliminación de las flexiones, utilizando partículas. Al estudio de las partículas dedicó muchas páginas, sosteniendo que las preposiciones significaban en un principio relaciones de lugar; y que, luego, por metáforas especiales, llegaron a significar relaciones de otro género[72].

Así como el análisis de las partículas y de las flexiones sirve para descubrir las relaciones lógicas primitivas, así también el análisis de los conceptos por medio de la definición de las palabras, las descompondrá en nociones simples y servirá de base para el vocabulario de la lengua filosófica. A diferencia de sus predecesores, quienes en la construcción del vocabulario asignaban a cada palabra un signo convencional y arbitrario, Leibniz intenta buscar para cada idea una expresión natural que traduzca su composición lógica, y a esa expresión se llega por definición; procediendo por definición, sustituyendo siempre lo definido por la definición, se llega, finalmente, a las ideas absolutamente simples e irreductibles. De modo que el nombre de cada cosa (o idea) expresará su definición, y será la clave de todas sus propiedades. Un nombre tal constituye un símbolo adecuado y transparente que deja patentes las propiedades lógicas. Y la lengua con un vocabulario tal será una especie de lengua *natural* o lengua *adámica*, como la llamaban Jakob Boehme[73].

De manera que a medida que Leibniz va ahondando en detalles de la lengua universal, va cambiando de perspectiva con respecto a sus presupuestos metafísicos sobre la característica. La lengua característica ahora no es ya un álgebra lógica, un cálculo mental -al modo concebido en la *Dissertatio*[74]: "scriptura haec universalis aeque erit communis et quae possit sine omni lexico legi" o en *Lingua Generalis*[75]: "Itaque hac lingua loqui nihil aliud erit, quam enuntiare propositiones numericas tabulae pythagoricae continuatae, v. g. 6. 8 est 48, vel 48 est 6$^{\text{narius}}$"-, sino una auténtica lengua hablada y escrita con nombres, verbos y partículas, como las lenguas ordinarias; lengua que sirve de auxiliar y de instrumento al pensamiento, pero que ya no es cálculo: "Nihil autem calculi hic miscebo"[76].

En resumen, la concepción que Leibniz tiene de la característica no es uniforme y varía a lo largo de su vida en función, precisamente, de sus presupuestos metafísicos, considerándola, bien como subordinada por entero a la verdadera filosofía, bien como independiente del desarrollo de ésta; bien como instrumento metafísico absoluto, bien como instrumento para la constitución de dominios científicos particulares. Ambas perspectivas se intersectan para él sin posibilidad de una distinción neta. Y así resultan comprensibles ciertas afirmaciones sobre la característica a primera vista contradictorias. Por ejemplo, ante la declaración de Descartes[77] de que "la invención de esa lengua (universal) depende de la verdadera filosofía", por cuanto que debe representar adecuadamente el pensamiento; y esto, aunque teóricamente posible, resulta en la práctica irrealizable, dada la variedad de los pensamientos humanos y la exigencia de ponerlos en orden con claridad y distinción; Leibniz responde[78] sosteniendo que, si bien esa lengua universal depende efectivamente de la verdadera filosofía, no depende, sin embargo, de su perfección y acabamiento, es decir, esa lengua puede ser establecida, aunque la filosofía no haya conseguido su perfección; esa lengua crecerá con la ciencia de los hombres y constituirá un instrumento maravilloso, bien para servirnos de lo que sabemos, bien para percatarnos de lo que falta, bien para inventar los medios para ayudarnos, pero sobre todo para acabar con las controversias en materias que dependen del razonamiento, porque entonces razonamiento y cálculo serán la misma cosa.

Posteriormente, Leibniz, en disconformidad con la opinión anterior, tras un progresivo ahondamiento en el análisis de las diversas lenguas, llega a la idea de que esa lengua universal precisa de un alfabeto de los pensamientos humanos, que constituirá el fundamento del vocabulario, lo que exige un análisis de todos los conceptos reduciéndolos a elementos simples por medio de la definición. Y, en este sentido, escribe a Burnet en 1697: "mi opinión es que los caracteres verdaderamente reales y filosóficos deben corresponder al análisis de los pensamientos, y, ciertamente, estos caracteres presuponen la verdadera filosofía"[79].

La oscilación entre la subordinación completa de la característica a la "verdadera filosofía" y la constitu-

[72] *Analysis particularum*, en Couturat, *Opuscules*, p. 35.
[73] *Nuevos ensayos*, ed. cit., p. 331; y Gerhardt, *Philos.* VII, p. 184.
[74] Gerhardt, *Philos.* IV, p. 73.
[75] Couturat, *Opuscules*, p. 277.
[76] *Linguae philosophicae specimen in Geometria edendum* (1680), en Couturat, *Opuscules*, p. 152.
[77] Carta a Mersenne, de 20 de noviembre de 1629, en *Oeuvres*, edic. Adam-Tannery, Vol. I, pp. 80-82.
[78] Couturat, *Opuscules*, pp. 27-28.

[79] Gerhardt, *Philos.* III, p. 216.

ción de aquélla independientemente de la realización de ésta, corresponde a la oscilación entre dos puntos de vista de Leibniz sobre la característica, considerándola, respectivamente, bien como instrumento metafísico absoluto, bien como instrumento de los dominios científicos particulares.

8. El calculus rationator

Esta oscilación de Leibniz en cuanto a su consideración de la característica se mantiene también en cuanto a su consideración del cálculo universal, puesto que va unido a aquélla.

Por una parte, Leibniz impone a los símbolos de su característica la condición de que se pueda deducir de su misma forma y de su composición todas las propiedades lógicas de los conceptos que representan. La obtención de verdades consistirá en un cálculo, de manera que las combinaciones de los símbolos deben hacer patentes las conexiones lógicas de los correspondientes conceptos. De esta manera se funden característica y cálculo universal:

> "*Speciosa* autem *generalis* ipsa est *Ars characteristica*, in unam cum Combinatoria disciplinam confusa, per quam rerum relationes apte characteribus repraesentantur. Et pro certo habendum est, quanto magis effecerimus ut characteres exprimant omnes relationes quae sunt in rebus, eo magis nos in iis reperturos auxilium ad ratiocinandum"[80].

Esta gran ciencia general, llamada característica o cálculo general, es la que proporciona las palabras a las lenguas, las letras a las palabras, las cifras a la Aritmética, las notas a la música. Y necesita, para no errar en el dédalo de las nociones complejas, de un "hilo de Ariana" para guiarnos en el laberinto de la deducción. Ese "filum cogitandi" o "filum meditandi" ha de ser un procedimiento mecánico (palpable) que conduzca el razonamiento y la invención sin incertidumbres y sin error. Y ese procedimiento consiste en representar las ideas por signos, y sus combinaciones por combinaciones de signos, de manera que el análisis lógico de los conceptos quede reemplazado por el análisis material de los símbolos:

> "Ad inventionem ac demonstrationem veritatum opus est analysi cogitationum, quae quia respondet analysi characterum... hinc analysin cogitationum possumus sensibilem reddere, et velut quodam filo mechanico dirigire, quia analysis characterum quoddam sensibile est"[81].

Este procedimiento nos proporciona la posibilidad de razonar en Metafísica y en Moral de modo similar a como lo hacemos en Geometría y en Análisis, porque los caracteres fijarían en tales materias nuestros pensamientos y el razonamiento quedaría reducido a cálculo. Porque, si bien es cierto que tal procedimiento (o cálculo) hasta entonces sólo se había utilizado en Matemáticas, lo que trata de conseguir Leibniz, precisamente, es instaurar ese método general, esa *Mathesis universalis* que debe operar con caracteres reales. El ideal leibniciano es el de un *calculus ratiocinator*, *"res hactenus ignota"*.

De sus contactos con los cartesianos, durante su estancia en París saca Leibniz su concepción de una *Mathesis universalis*, que difería sustancialmente de la propugnada por Descartes. Este auspiciaba una *Mathesis universalis* entendida como la ciencia general de las magnitudes. Esa ciencia podría, asimismo, denominarse *logística*, que comprendía la logística numérica y la logística especiosa (literal) o Algebra. De ahí la preponderancia que el álgebra tiene en la matemática cartesiana. Descartes está entre los promotores del álgebra moderna, con la aplicación de la misma a la Geometría. Y Leibniz aprecia este aspecto de la *Mathesis* cartesiana. Pero, por otro lado, Descartes se encierra en la ilusión de que el álgebra es completa y constituye la ciencia más sublime, lo que le impide afrontar la aritmética de los infinitos y el estudio de las curvas mecánicas. La algebrización cartesiana de la geometría no lleva a donde debía llevar: a reconocer la naturaleza calculatoria de todo razonamiento y a no confundir, como Leibniz no se cansa de repetir[82], el álgebra común con la verdadera lógica, la matemática universal, el *calculus ratiocinator*. El álgebra depende de la combinatoria, por cuanto que ésta es la ciencia del cálculo, esto es, la ciencia general de las formas y de las fórmulas. Y las fórmulas de la combinatoria poseen un valor general y puramente *formal;* se aplican, no sólo a los números y a las magnitudes, sino a todo objeto de intuición susceptible de orden y de determinación exacta y precisa. Porque:

> "dos son las partes de la matemática general, el arte combinatoria acerca de la variedad y la forma o cualidad de las cosas en general en cuanto quedan sometidas a un razonamiento distinto, y acerca de lo

[80] *Nova Algebrae promotio*, en Gerhardt, *Math.* VII, p. 159.
[81] *Analysis linguarum*, en Couturat, *Opuscules*, p. 353.
[82]

> semejante y desemejante; y la logística o álgebra acerca de la cantidad en general. De ahí resulta la hasta ahora ignorada o despreciada subordinación del álgebra al arte combinatoria; esto es, del álgebra especiosa a la especiosa general, de la ciencia de las fórmulas que representan la cantidad a la doctrina de las fórmulas o expresiones en general del orden, de la semejanza, de la relación; es decir, de la ciencia general de la cantidad a la ciencia general de cualidad"[83].

El álgebra no constituye, el método general de la invención, ni tan siquiera el método general de las Matemáticas: las ciencias del número y de la magnitud. En Aritmética resultaba impotente, como el mismo Descartes había reconocido, para resolver problemas de Diofanto. En Geometría, amén de no ofrecer un análisis adecuado de las figuras y de las relaciones geométricas, como la situación, tampoco bastaba para la Geometría analítica, habida cuenta de que se presentaban múltiples problemas *transcendentes* que rebasaban su aplicación. Y precisamente para resolver algunos de estos problemas inventó Leibniz su algoritmo infinitesimal. Como él mismo afirma en repetidas ocasiones[84], obtiene el mejor de sus inventos matemáticos (hacia finales de 1675, durante su estancia en París) al enfrentarse a los problemas específicos que se planteaban a los matemáticos de entonces, pero acometiendo tal enfrentamiento con sus presupuestos teóricos sobre el cálculo y la característica. "El algoritmo del análisis superior aparece como un corolario del gran problema de la característica real (llamada también general) que Leibniz ha perseguido durante toda su vida, desde los comienzos de sus estudios científicos[85]". Y, si bien en el caso particular del cálculo infinitesimal prevalece la atención a los aspectos formales de la característica y del cálculo, la idea leibniciana de construir un algoritmo para simbolizar no números, sino funciones, puede germinar tan sólo sobre la concepción de todo razonamiento como cálculo formal, sin limitación alguna del simbolismo a los tradicionales dominios cuantitativos. Esta derivación *característica* de su cálculo infinitesimal es lo que, según Leibniz, hace superior su cálculo al método de las fluxiones newtonianas, incluso cuando antes de desatarse la polémica, estaba presto a reconocer los méritos del de Newton:

> "Es justo reconocer que Newton, al que tanto deben la geometría, la óptica y la astronomía, ha tenido también sobre esta materia [el cálculo infinitesimal] algunas ideas originales similares, según lo que en seguida se ha sabido. Ciertamente, él se sirve de otros caracteres; y puesto que la característica misma es, por así decir, una gran parte del arte de inventar, pienso que nuestros caracteres permiten una mayor apertura"[86].

En la consideración de Leibniz, la multiplicidad de cálculos, en los que se comprenden el cálculo infinitesimal y el cálculo geométrico como los más ilustrativos de los matemáticos, son todos ellos especies del cálculo general o ciencia de las formas, la cual comprende no sólo las fórmulas matemáticas y las *formas* algebraicas, sino todas las formas del pensamiento. Cada uno de los cálculos queda particularizado por su aplicación a una determinada materia, a un dominio particular de objetos. Y, así, "en lugar de los axiomas y de los teoremas euclídeos sobre la magnitud y la proporción, yo he descubierto otros de importancia mayor y de ámbito más general sobre los coincidentes, los congruentes, los semejantes, los determinantes, sobre la causa y el efecto, esto es, la potencia, sobre las relaciones en general, sobre el continente y el contenido, sobre lo que acontece *per se* y *per accidens*, sobre la naturaleza general de la sustancia, sobre la perfecta espontaneidad e incorruptibilidad de las sustancias; en fin, sobre la unión de las cosas y la armonía de las sustancias entre sí[87]. Todos estos cálculos, unos desarrollados ya, otros tan sólo previstos por Leibniz, no son sino casos particulares de la esencial calculabilidad de todas las cosas. Pero, entre las tentativas particulares, los cálculos lógicos, en sentido estricto, poseen relevancia especial, por cuanto que Leibniz percibe en ellos directamente la forma más afín al *calculus ratiocinator* en el sentido más amplio; ello es comprensible si se tiene en cuenta la importancia que Leibniz concede a la conexión esencial entre pensamiento y expresión, y, por tanto, la importancia que asume el estudio de las conexiones lingüísticas. Y, si bien es cierto que también escapa a los cálculos lógicos la determinación de las nociones absolutamente primitivas, la atención hacia ellos está plenamente justificada, por cuanto que, por así decir, preparan la trama o el esqueleto del cálculo auténticamente real. Estos cálculos poseen, además, un intrínseco valor técnico, por cuanto que formulan algunos principios que, sistematizados en el siglo XIX, harán de la Lógica una ciencia.

Las investigaciones sobre cálculos lógicos ocuparon

---

83 *Mathesis universalis*, en Gerhardt, *Math.* VII, p. 61.

84 En sus cartas a Tschimhaus o en la *Historia et origo calculi differentialis*, en Gerhardt, *Math.* V, pp. 392 y ss.

85 Gerhardt, *Math.* I, p. xv.

86 *Considérations sur la différence qui il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes*, (1694), en Gerhardt,

Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et la nouvelle, *Math.* V, p. 307.

[87] *De Scientia universali*, en Gerhardt, *Philos.* VII, p. 199.

a Leibniz durante toda su vida. Leibniz ensayó diversas tentativas, acometiendo la cuestión de formas diferentes. Couturat[88] distingue tres épocas en las que Leibniz se ocupa de manera especial del cálculo lógico: en torno a los años 1679, 1686 y 1690, respectivamente, y en los ensayos sobre el tema se nota un progresivo ahondamiento técnico en las cuestiones afrontadas.

El primer período, en torno al año 1679, viene marcado por un grupo de ensayos bastante breves (recogidos por Couturat, en *Opuscules*, pp. 42-92): *Elementa Characteristicae universalis* (pp. 42-49); *Elementa Calculi* (49-57); *Calculi universalis Elementa* (57-66); *Calculi universalis investigationes* (66-70); *Modus examinandi consequentias per Numeros* (70-77) *Regulae ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricorum iudicari potest, PER NUMEROS* (77-84); *Calculus consequentiarum* (84-89); y otro sin título (89-92).

Aquí la idea directriz consiste en atribuir a cada noción un "número característico", y escribir toda verdad bajo la forma de una ecuación numérica, desarrollando la estructura combinatoria de las nociones por medio de la estructura aritmética de los números primos. Así, cada término tiene su "número característico", y cada término simple es representado por un número primo. La descomposición de un número característico en sus factores primos da la definición del término correspondiente, ya que dicha descomposición sólo puede efectuarse de una sola manera. Así, por ejemplo, sea

6 = hombre
2 = animal
3 = racional

de donde $6 = 2 \times 3$

Así, pues, cualquier concepto dado tiene como predicados todos sus divisores: todos sus factores primos y todas sus combinaciones multiplicativas. Por consiguiente, una proposición universal afirmativa es verdadera si el sujeto contiene el predicado; esto es, si es divisible por él, y se representa así:

$$\frac{S}{P} = y \text{ , o bien } S = Py$$

Y una proposición particular afirmativa es verdadera si el sujeto es divisible por el predicado; o mejor: una especie S es igual a una especie de P, representada así:

$$Sx = Py \text{ , o bien } \frac{S}{P} = \frac{y}{x}$$

La universal negativa queda definida como la negación de la particular afirmativa:

$$Sx \neq Py$$

Y la particular negativa como la negación de la universal afirmativa:

$$S \neq Py$$

En donde *x* e *y* son siempre coeficientes indeterminados, y las inigualdades han de serlo cualesquiera que sean los valores atribuidos a estos coeficientes, de manera que para verificarlas se hace preciso recorrer todos los valores numéricos posibles de *x* y de *y*.

Por otra parte, este sistema está fundado expresamente sobre la consideración intensional de la proposición: el género está contenido en la especie "porque la noción de especie se compone de la noción de género y de la de diferencia"[89]. Leibniz utiliza también pra representar estas relaciones parte-todo (siempre desde la perspectiva de la comprehensión): los signos =, ≥ y >. Así, representa "todo *a* es *b*":

$$a \geq b$$

Sigue a estos ensayos fragmentarios un proyecto más coherente y completo, expuesto en algunos otros trabajos[90] pertenecientes también al primer período. Leibniz renuncia a asignar a los conceptos números característicos, debido a la dificultad de su elección, y los reemplaza por letras, sobre las que establece el cálculo lógico. De modo que del modelo de la Aritmética pasamos al del Algebra. Tampoco emplea cópulas matemáticas, sino únicamente la cópula *es* y trata exclusivamente las proposiciones universales afirmativas, de la forma:

a es *b*

es decir, "Todo *a* es *b*".

Entre las leyes del sistema pone Leibniz:

[88] *La logique de Leibniz*, cp. VIII, pp. 323-387.

[89] Couturat, *Opuscules*, p. 52.

[90] *Specimen Calculi universalis* y *Ad Specimen Calculi universalis addenda*.

- *la ley conmutativa:* "Transpositio literarum in eodem termino nihil muta, ut *a b* coincidit cum *b a*, seu animal rationale, et rationale animal".
- *la ley de la tautología:* "Repetitio eiusdem literae in eodem termino est inutilis, ut *b* est *aa*, vel *bb* est *a*"[91].
- *el principio de identidad: a* es *a*
- *el principio de simplificación: ab* es *a*, o también *ab* es *b*. Por ejemplo, "Todo animal racional es un animal".
- *el principio de silogismo:* "Si *a* es *b* y *b* es *c*, entonces *a* es *c*"

Define la *identidad* (igualdad lógica) de dos términos mediante la posibilidad de sustituir uno por otro sin alterar la verdad: "Eadem sunt, quorum unum in alterius locum substitui potest salva veritate"[92].

Y, finalmente, establece la siguiente relación entre las cópulas lógicas de identidad e inclusión:

"Si *a* es *b* y *b* es *a*, entonces *a* y *b* son idénticos".

Al *segundo período*, en las investigaciones lógicas de Leibniz, pertenecen varios ensayos, de los que el principal, fechado en 1686, se titula *Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum*[93]. El cálculo lógico aquí desarrollado por Leibniz se caracteriza materialmente por el uso de letras mayúsculas como variables y del signo de igualdad como cópula. Utiliza dos relaciones fundamentales: identidad e inclusión, definidas aquí también mediante la idea de sustitución.

Los axiomas del cálculo son:

- *El principio de identidad:* A es A
- *El principio de tautología:* A = AA (principio que Boole llamará "ley del índice", y al que considera como el más fundamental de toda la lógica)
- *El principio de simplificación:* AB es A

A partir de estos axiomas demuestra Leibniz el principio del silogismo: "Si A es B y B es C, entonces A es C". Prueba:

dadas las premisas: (1) "A es B", (2) "B es C" } esto es { (3) A = AB, (4) B = BC

tenemos:

(5) A = ABC..... reemplazando B por BC en (3)

(6) A = AC..... reemplazando AB por A (5)

esto es, "A es C".

Con ello quedan puestas las bases para el cálculo de los cuatro tipos tradicionales de proposiciones. Subraya también la analogía entre el análisis de las *nociones* y el de las *verdades*, y, por tanto, la analogía entre el tratamiento de las proposiciones categóricas y el de las proposiciones hipotéticas (analogía que reencontrará Boole entre las proposiciones *secundarias* -las hipotéticas- y las proposiciones *primarias* -las categóricas. Según Leibniz, en una proposición categórica, el sujeto *contiene* al predicado, al igual que en una proposición hipotética el antecedente *contiene* al consiguiente, de modo que la cópula *contiene* puede servir indiferentemente para las dos: en un caso significa *est*, en el otro *infer* o *sequitur*.

Peano, siguiendo esta misma idea, introduce el símbolo C (invertido) que dice sacar de la palabra *continet* e invertido representa entre clases (en las proposiciones categóricas) la relación de "estar contenido en" (relación de inclusión); y también dice provenir de la palabra *consequentia* e invertido representa la implicación ("material") o la relación de consecuencia lógica entre dos proposiciones (en las proposiciones hipotéticas).

En este sistema, Leibniz, con el objeto de sistematizar la silogística, sin renunciar a ninguna de sus leyes, atribuye, como también lo hizo ya Aristóteles, un carácter existencial a las proposiciones universales. Para Leibniz *terminus* y *ens* son a menudo sinónimos ("Esto A est B", tunc A dici potest *aliquid"*). Por tanto, las proposiciones universales implican de por sí la existencia de su sujeto. Y busca, a partir de ahí, tradu-

---

[91] En Gerhardt, *Philos*. VII, p. 224.

[92] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 219.
[93] En Couturat, *Opuscules*, pp. 356-399.

cir las proposiciones particulares mediante igualdades lógicas. "Todo A es B" conlleva "Hay As". Y sólo gracias a esta implicación de existencia es posible la subalternación que Leibniz prueba así[94]:

(1) "Todo A es B"..... A = AB..... hipótesis
(2) "Hay As"..... A ≠ O..... de (1)
(3) "Algún A es B"..... AB ≠ O..... reemplaz. A/AB en (2)

En los fragmentos compuestos en 1690, *Primaria calculi logici fundamenta* y *Fundamenta caluli logici*[95], desarrolla Leibniz este mismo sistema, tratando de expresar formalmente los 4 tipos clásicos de proposiciones, mediante dos métodos que Couturat *(La logique*, p. 358) reconoce como los mejores: el primero consiste en reducir todas las proposiciones a juicios de existencia; el segundo reduce las proposiciones a igualdades. Así:

	1er método	2º método
U.A. Todo A es B	A non-B = 0	A = AB
U.N. Ningún A es B	A B = 0	A = A non-B
P.A. Algún A es B	A B ≠ 0	A ≠ A non-B
P.N. Algún A no es B	A non-B ≠ 0	A ≠ A B

Este sistema, con sus virtudes formales, se encuentra con dificultades, examinadas por el propio Leibniz en *Difficultates Logicae*[96]. La principal de ellas, proveniente de la persistencia de Leibniz en atribuir carácter existencial a las proposiciones universales, es la conversión *per accidens*. Según ella, de "Todo riente es hombre" se infiere "algún hombre es riente". En donde aparece claramente que la conclusión sobrepasa a la premisa, ya que en ella se afirma que actualmente hay un hombre que ríe: "Itaque patet in tali obiectione propositionem universalem itelligi solere de supposito ridente, particularem de actuali ridente" *(Ibid.*, p. 216). Leibniz trata de resolver dicha dificultad apelando a la distinción escolástica entre *posible* y *actual:* de modo que el término "riente" designa, bien los que *actualmente* rien, bien *posibles* o virtuales rientes. Pero esta solución no es más que una escapatoria. Porque Leibniz mismo reconoce que las proposiciones particulares implican el ser (por eso traduce "Algún A es B" por "AB est Ens" o AB ≠ 0), en tanto que las proposiciones universales no implican el ser (y por lo mismo traduce "Todo A es B" por A = AB o A no-B = 0, donde no se afirma la existencia de A, porque es verdadera también cuando A = 0).

Finalmente, el sistema elaborado en el *tercer período* señalado por Couturat queda recogido en dos ensayos fechados en 1690, uno de ellos titulado *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* y el otro, sin título, al que W. Kneale denomina *Calculus de continentibus et contentis*[97]. Este sistema se caracteriza, en cuanto a la notación, por representar el producto lógico (la conjunción) por medio del sigo + (en el segundo de los fragmentos mencionado va encerrado en un círculo: ⊕

La relación utilizada preferentemente es la de igualdad, que define también así: *"Eadem* seu *Coincidentia* sunt quorum alterutrum ubilibet potest substitui alteri salva veritate"[98]. Dos términos que no son iguales se llaman *diversos.*

La relación de inclusión se define a través de la de igualdad y el producto lógico, y es representada por <. La relación de igualdad lógica (o de identidad) no queda

[94] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 213.
[95] Couturat, *Opuscules*, p. 235 y ss.
[96] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 211-217.
[97] Ambos recogidos por Gerhardt, *Philos.* VII, pp. 228-235 y 236-247, respectivamente.

[98] Ambos recogidos por Gerhardt, *Philos.*, VII, pp. 226-233 y 238-247, respectivamente.
[98] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 236.

excluida por la relación "está contenida en", ya que la igualdad A + B = L, tanto A puede ser igual a L como también B, sin que deje de estar contenido en L.

La relación "está contenido en" da lugar a las siguientes definiciones:

1) dos términos de los que uno está contenido en otro se llaman *subalternos*.
2) dos términos de los que ninguno de ellos está contenido en el otro se llaman *dispares*.
3) dos términos en cada uno de los que está contenido otro se llaman *comunicantes*.

Axiomas para el producto lógico:

(1) A ⊕ A = A..... ley de tautología
(2) A ⊕ B = B ⊕ A..... ley conmutativa

Postulados:

(1) dados dos o más términos pueden someterse a la operación ⊕.
(2) dado un término se puede hallar su diverso y su dispar.

Teoremas del sistema:

(1) si A = B, entonces B = A
(2) si A ≠ A, entonces B ≠ A
(3) si A = B y B = C, entonces A = C
(4) si A = B y B ≠ C, entonces A ≠ C
(5) si A = B y B < C, entonces A < C
(6) si A = B y C < B, entonces C < A
(7) A < A. Pues A < (A ⊕ A) y A ⊕ A = A
(8) si A = B, entonces A < B. Pues A < A y A = B; luego A < B
(9) si A = B, entonces A ⊕ C = B ⊕ C
(10) si A = B y C = D, entonces A ⊕ C = B ⊕ D
(11) si A = B y C = D y E = F, entonces A ⊕ C ⊕ E = B ⊕ D ⊕ F
(12) si A < B, entonces A ⊕ C < B ⊕ C
(13) si A ⊕ B = A, entonces B < A
(14) si B < A, entonces A ⊕ B = A
(15) si A < B y B < C, entonces A < C..... Principio del silogismo
(16) si A < B y B < C y C < D, entonces A < D..... Principio del Sorites
(17) si A < C y B < A, entonces A = B
(18) si A < C y B < C, entonces A ⊕ B < C
(19) si A < D y B < D y C < D entonces A ⊕ B ⊕ C < D
(20) si A < B y C < D, entonces A ⊕ C < B ⊕ D
(21) si A < B y C < D y E < F, entonces A ⊕ C ⊕ E < B ⊕ D ⊕ F

En el escolio a los axiomas[99] arriba reseñados, declara expresamente Leibniz el carácter formal que posee su cálculo: "ya que la teoría general de las formas (la *speciosa generalis*) no consiste en otra cosa que en la presentación de las combinaciones que cabe efectuar por medio de los símbolos y su manipulación... De manera que, siempre que esté asegurada la vigencia de las dos leyes citadas, el presente cálculo será susceptible de aplicación".

Cálculo y característica son entendidas por Leibniz en la misma perspectiva. Y del mismo modo que los símbolos usados en un dominio particular, por ejemplo en la Matemática -característica particular- constituyen tan sólo una muestra de la característica general (o real), así también los cálculos matemáticos y no matemáticos constituyen tan sólo una muestra de esa *Mathesis universalis* o *calculus ratiocinator* que debe operar con caracteres reales. El proyecto y fin último de Leibniz es la constitución de "una especie de alfabeto de los pensamientos humanos" porque, entonces, "todas las conclusiones que derivan racionalmente de las nociones dadas podrán ser descubiertas mediante una especie de cálculo, del mismo modo que se resuelven los problemas aritméticos o geométricos"[100].

[99] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 236.
[100] *De Scientia universali*, en Gerhardt, *Philos.* VII, p. 199.

La concepción que Leibniz tiene del cálculo general se apoya en el convencimiento de la idea de una ciencia general; en la unificación del saber y en la posibilidad de una enciclopedia o ciencia general del saber. De manera que los resultados positivos por él alcanzados en el campo de la matemática -el análisis infinitesimal, la construcción de una aritmética binaria, las incursiones en problemas diofánticos, en la teoría de las determinantes, en un cálculo geométrico, etc.-, constituían para él un banco de pruebas de su concepción más general del conocimiento y de la realidad. Todos estos resultados no son debidos a desarrollos autónomos, sino efectos del desarrollo de un instrumento general que es la combinatoria y el cálculo. Por esto llega a decir: "confieso que todo aquello que ayuda a los descubrimientos matemáticos ha tenido como único origen el hecho de usar mejor los símbolos que representan la cantidad"[101]. De manera que Leibniz, en todas sus indagaciones específicas busca la sistematización global, y la constitución de una enciclopedia o ciencia general: esa ciencia general "que contiene los principios de todas las otras ciencias".

9. La ciencia general

La ciencia general (o lógica) es el método general aplicable a todas las ciencias cuyos desarrollos darían lugar a la Enciclopedia, en cuanto recopilación de todos los conocimientos humanos dispuestos en un orden lógico y siguiendo un método demostrativo, a partir de los elementos simples, que constituyen el alfabeto de los pensamientos humanos.

El proyecto de Enciclopedia o unificación de todos los saberes, fue el ideal filosófico de Leibniz y la ocupación constante en su vida. Mas, a medida que va perfilando su proyecto, se va dando cuenta de lo irrealizable del mismo, según él por motivos *externos* -falta de tiempo, de colaboradores-, no por causas *intrínsecas*. Por tales motivos se ve impelido a sustituir el ambicioso proyecto de Enciclopedia por otro más restringido, y trabaja intensamente durante la segunda mitad del año 1679 en lo que podría ser el método a seguir para la elaboración de la Enciclopedia, publicando su *Guilielmi Pacidi Plus Ultra, sive Initia et specimina scientiae generalis de instauratione et augmentis scientiarum, ac de perficienda mente, rerumque inventionibus ad publicam felicitatem*[102]. En este trabajo Leibniz, sin abandonar sus proyectos de una Enciclopedia ya acariciados antes de su estancia en París (1672-76) y perseguidos con ardor tras su regreso a Alemania, madura mucho mejor su pensamiento sobre el tema. Así el *Plus Ultra* contiene una mejor clasificación de las ciencias que los Diálogos *De Rerum Arcanis*[103], probablemente compuesto un año antes, y que otro fragmento también anterior: *Praecognita ad Encyclopaediam sive Scientiam universalem*[104], donde delimita el concepto de *Ciencia general* frente al de *Enciclopedia*, considerando a la primera como el *fundamento* de la segunda.

En el *Plus Ultra* configura Leibniz la Enciclopedia como dividida en dos partes: los *Initia Scientiae generalis* y los *Specimina Scientiae generalis*. Esta última recogía el resumen enciclopédico de tres o cuatro ciencias solamente a modo de ejemplo de la aplicación del método unitario con que debe ser elaborada la Enciclopedia, para probar su utilidad y fecundidad.

La primera parte, los *Initia*, comprende los principios del método general que se ha seguir para la elaboración de la Enciclopedia, método estrictamente lógico que resulta común para todas las ciencias. Debe comprender, en primer lugar, los *Elementa veritatis aeternae*, esto es, los fundamentos de la lógica constituida como una especie de Algebra y dotada del mismo rigor que el de las Matemáticas, incluso mayor, ya que "Mathematici multa supponunt, quae hic poterunt demonstrari"[105]. Aquí se trata de todas las formas de demostración -sean éstas absolutamente ciertas, sean probables- las cuales constituyen ese *ars demonstrandi* que dota a todas las disciplinas del rigor de la Matemática.

Los *Initia* comprenden, en segundo lugar, el *Ars inveniendi* o lógica inventiva, que va más allá del *ars demostrativa* (demostración de las verdades conocidas), permitiendo el descubrimiento de verdades nuevas; y, cual hilo de Ariadna, como la combinatoria aritmética, conduce a la realización de nuevas síntesis.

Por tanto, la Ciencia general constituye toda la lógica de Leibniz, quien la concibe en sentido amplio y no sólo como arte de juzgar y de demostrar, sino también como arte de inventar.

La lógica comprende dos partes: la primera, llamada *Método de la certeza o Elementa veritatis aeternae*, sirve para demostrar las verdades ya descubiertas; la segunda sirve para descubrir verdades nuevas por un método seguro y en orden progresivo y sistemático. La primera va de los principios a las consecuencias y de

[101] *Inventarium mathematicum*, en Gerhardt, *Math.* VII, p. 13.
[102] Extracto en Gerhardt, *Philos.* VII, p. 49-53.
[103] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 51.
[104] Gerhardt, *Philos.* VII, pp. 43-45.

[105] Gerhardt, *Philos*. VII, p. 64.

las causas a los efectos estableciendo las verdades científicas en un encadenamiento lógico, al igual que en la deducción axiomática se demuestran los teoremas a partir de los axiomas. La segunda va de las consecuencias a los principios buscados, de los efectos conocidos a las causas desconocidas.

La distinción entre lógica demostrativa y lógica inventiva se mezcla con la distinción entre el método del análisis y el de la síntesis. Y si bien en un principio caracteriza el *ars inventiva* por su marcha regresiva y analítica, sin embargo, luego se percata de que el *ars inventiva* es tan sintética como analítica. Y también reconoce que el arte de juzgar emplea, asimismo, tanto el análisis como la síntesis: "Et rursus tam in iudicando quam in inveniendo et Analysi et Synthesi uti licet"[106]. De manera que ahora la verdadera distinción de la lógica es la distinción entre Análisis y Síntesis.

Mediante el método analítico una cuestión dada se resuelve en nociones más simples, hasta llegar a su solución. Mediante el método sintético progresamos de nociones más simples a las compuestas, hasta llegar a la cuestión propuesta. El análisis consiste en descomponer todos los conceptos en sus elementos simples por medio de la definición. La síntesis consiste en reconstruir todos los conceptos partiendo de esos elementos por medio del arte de las combinaciones.

Pero, a propósito del Análisis, Leibniz ofrece otras precisiones. Distingue, en primer lugar[107], entre el análisis de las cosas y el análisis de las verdades. El análisis de las verdades no es tan largo ni tan difícil como el análisis de las cosas; no exige remontarse indefinidamente de principio en principio, resultando, así, imposible, como señalaba Pascal[108]; basta constatar que el sujeto contiene el predicado para asegurar la verdad de la proposición, aun sin acabar el análisis del sujeto o del predicado. En segundo lugar, el análisis de las verdades (o de los conceptos) consiste en la definición, y el análisis de las verdades (o de las proposiciones) consiste en la demostración. Toda demostración, a su vez, consiste en una concatenación de definiciones: "Ego semper putavi, Demonstrationem nihil aliud esse quam catenam definitionum"[109]. Coring le había objetado que hay proposiciones indemostrables: los axiomas. Pero Leibniz lo niega: todas las proposiciones, excepto las idénticas y las empíricas, son demostrables, si bien se puede o se debe admitir axiomas o postulados sin demostración: "axiomata ego non, ut ais, ἀναπόδεικτα, sed tamen plerumque non necessaria demonstratu esse arbitror. Demonstrabilia vero esse pro certo habeo" (*Ibid.* p. 188).

Así, por ejemplo, una verdad que parece sabida ya sin demostración alguna, como es la proposición matemática "dos y dos son cuatro", no es, sin embargo, una verdad totalmente inmediata, y puede ser demostrada según el procedimiento indicado: a partir de proposiciones idénticas y definiciones, de la manera siguiente[110]:

- Definiciones: (I) $2 = 1 + 1$
  (II) $3 = 2 + 1$
  (III) $4 = 3 + 1$

- Axioma: Poniendo cosas iguales una en lugar de la otra, la igualdad se mantiené (Axioma de sustitución de los equivalentes)

-Demostración:

(1) $2 + 2 = 2 + 2$ ..... por Ax.
(2) $= 2 + (1 + 1)$ ..... por def. (I)
(3) $= (2 + 1) + 1$
(4) $= 3 + 1$ ..... por def. (II)
(5) $= 4$ ..... por def. (III)

(Mas el paso (3), como indica Kneale (*o. c.*, p. 307), reposa sobre la ley asociativa de la adición, que exige, a su vez, ser demostrada, lo que no hace Leibniz).

Según esto, toda proposición verdadera puede reducirse a una proposición idéntica, y el criterio de verdad no es, como para Descartes, la evidencia. Para saber si una proposición es o no verdadera no hay que preguntarse, como Descartes, si es evidente e indubitable, ni tampoco si se concibe clara y distintamente, sino si es *idéntica*, es decir, reducible al principio de identidad. Y demostrar una proposición es hacer ver que el concepto-predicado se halla incluido en el concepto-sujeto:

> "Semper igitur praedicatum seu consequens inest subiecto seu antecedenti, et in hoc ipso consistit natura veritatis in universum... Hoc autem verum est in omni veritate affirmativa, universali aut singulari, necesaria aut contingente"[111].

---

[106] Carta a Koch, 1708. En Gerhardt, *Philos*. VII, p. 477.
[107] *Initia et Specimina Scientia nova Generalis*, en Gerhardt, *Philos*. VII, p. 83-84.
[108] *De l'Esprit géometrique*, sec. I.

[109] Carta a Conring, de 3 de enero de 1678, en Gerhardt, *Philos.* I, p. 185.
[110] *Nuevos Ensayos*, edic. cit., p. 497.
[111] Couturat, *Opuscules*, p. 518; también en Gerhardt, *Philos.* II, p. 56.

En resumen, toda proposición verdadera es formal o virtualmente idéntica o, como diría Kant, analítica. Y, por consiguiente, debe poder ser demostrada *a priori* por medio de las definiciones y del principio de identidad:

> "Generaliter omnis propositio vera (quae identica sive per se vera non est) potest probari a priori ope Axiomatum seu propositionum per se verarum, et ope definitionum seu idearum"[112].

Pero la analiticidad como criterio de verdad choca con otra distinción mantenida por Leibniz:

> "Hay dos clases de *verdades:* las de *Razón* y las de *Hecho*. Las verdades de Razón son necesarias y su opuesto es imposible; y las de hecho son contingentes y su opuesto es posible. Cuando una verdad es necesaria, se puede hallar su razón por medio del análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples hasta llegar a las primitivas"[113].

Según esto, el criterio de analiticidad sólo sirve para las verdades necesarias (o de Razón), ¿y para las contingentes (o de hecho)? Su demostración exigirá un análisis infinito, porque el concepto de cualquier cosa concreta o de cualquier ser individual, encierra una infinidad de elementos o condiciones, y sólo un entendimiento infinito (como el entendimiento divino) puede efectuar ese análisis infinito. Leibniz compara las verdades contingentes a las asíntotas: sus relaciones inconmensurables no pueden expresarse más que mediante una serie infinita[114]. No podemos obtener la demostración completa de una verdad contingente, al igual que no pedemos ver el punto de contacto de una asíntota o recorrer por completo una serie infinita, pero podemos verificar una proposición contingente con una aproximación cada vez mayor a medida que continuamos el análisis:

> "Propositio vera contingens non potest reduci ad identicas, probatur tamen, ostendendo continuata magis magisque resolutione accedi quidem perpetuo ad identicas, nunquam tamen ad eas perveniri[115].

Las verdades de hecho, pues, son probables, no en sí mismas, sino *quoad nos*, y nosotros podemos *dar razón* de manera más y más aproximada. Y en este proceso de aproximación indefinida consiste la demostración que nosotros podemos dar de este tipo de verdades. Pero *per se* tales verdades son absolutamente ciertas, como las verdades de razón, y para un entendimiento infinito son, asimismo, evidentes *a priori*. En esto precisamente consiste el *Principio de Razón suficiente*, "en virtud del cual consideramos que no puede hallarse ningún hecho verdadero o existente ni ninguna enunciación verdadera sin que exista una razón suficiente para que sea así y no de otro modo, aun cuando esas razones nos puedan resultar en la mayoría de los casos desconococidas[116].

El principio de razón y el de contradición (o contraparte del de identidad) son los máximos y primeros principios de todos los razonamientos, de todas las demostraciones de cualquier tipo de verdad[117].

El principio de contradicción constituye una vertiente de la noción de verdad y afirma que toda proposición idéntica es verdadera y que su contradictoria es falsa[118], y tiene su aplicación particular en el dominio de las verdades necesarias. Y en varios escritos:(*Monadología* § 33; *Principes de la Nature et de grace*, §§ 7 y 11; 2ª carta a Clarke, § 1, Gerhardt, *Philos.* VII, p. 355; carta a Bourguet de 1713, Gerhardt, *Philos.* III, p. 558; etc.) Leibniz parece indicar que hay un orden de verdades (las necesarias) -las proposiciones de la lógica y de las Matemáticas- para cuya demostración basta el principio de contradicción y no se necesita el principio de razón suficiente: "Hoc principio (reddendae rationis) non indiget Aritmetica et Geometria, sed indiget Physica et Mechanica"[119].

El principio de razón suficiente constituye la otra vertiente de la noción de verdad, y completa el principio de contradicción: es su recíproca lógica y, en cuanto tal, afirma que toda proposición verdadera es analítica, es decir, virtualmente idéntica. Sirve para demostrar las verdades contingentes que no podemos probar directamente. En sentido general, este principio no significa sino esto: que se debe poder dar razón de toda verdad: "quod omnis veritatis reddi ratio potest"[120]. El principio de razón suficiente aparece enunciado por primera vez en *Theoria motus abstracti* (1671)[121]. Pero fue formulado de diferentes modos: como principio de razón determinante, como principio de la conveniencia o elección de lo mejor, como principio de la armonía.

---

[112] Gerhardt, *Philos.* VII, p. 300.
[113] *Monadología*, § 33. Edic. cit., p. 103.
[114] *Generales Inquisitiones* § 135, en Couturat, *Opuscules*, pp. 356-399.
[115] *Generales Insquisitiones*, § 134.
[116] *Monadología* § 32, edic. cit., p. 103.
[117] *Monadología* § 31, edic. cit., p. 101.
[118] *Specimen inventorum* ... en Gerhardt, *Philos.* VII, p. 309.
[119] *Scpecimen inventorum*, en Gerhardt, *Philos.* VII, p. 309.
[120] *Specimen inventorum*... Gerhardt, *Philos.* VII, p. 309.

[121] Gerhardt, *Philos.* IV, p. 232.

Pero el análisis de las verdades (proposiciones) y de las cosas (o pensamientos) tiene como objetivo final realizar la unidad de la ciencia mediante el *regressus* a los componentes simples, que son: las proposiciones idénticas y el alfabeto de los pensamientos humanos:

> "Y se dan, finalmente, ideas simples, de las que no cabe dar definición. También hay Axiomas y Postulados o, en una palabra, *principios primitivos* que no pueden probarse ni necesitan prueba; son éstos las *Enunciaciones idénticas* cuyo opuesto encierra una contradicción expresa[122]".

Y esos componentes simples a los que llega el análisis lógico poseen para Leibniz un carácter no meramente metodológico, en cuanto que constituyen los *postulados* a partir de los cuales se puede construir con plena coherencia interna los componentes complejos. Porque, en tal caso, el problema del inventario o alfabeto no presentaría dificultad de principio. Pero para Leibniz no se trata de *postular* los términos primitivos y los axiomas primitivos, buscando un sistema sintácticamente coherente, pero convencional, al modo de Carnap (y aquí estriba la diferencia entre la axiomática leibniciana y la axiomática de la lógica formal moderna), sino que se trata de determinarlos en su naturaleza absoluta, cuales esencias o ideas primitivas que fluyen directamente de Dios. Y por ello se explica la naturaleza y la dificultad que presenta el conocimiento humano, cuya validez consiste en su tender al límite, a la realidad absoluta de los elementos primitivos. Leibniz no busca tanto la construcción de un sistema *formal* libre de contradicción dentro de *un* universo lingüístico con reglas de formación y de transformación, cuanto la construcción de un sistema *real*, cuya posibilidad lógico-ontológica pasa por su concordancia con los términos metafísicamente primitivos. Llevar a cabo esta tarea es construir la característica real, la ciencia general y la Enciclopedia, el proyecto -sólo proyecto- de Leibniz.

[122] *Monadología*, § 35. Edic. cit., p. 105.

BIBLIOGRAFIA

Ediciones

Sämtliche Schriften und Briefe. Edic. de la Academia de Berlin. Darmstadt y Berlín, 1923. Han aparecido 16 vols.

Scriti di logica, edic. de Francesco Barone. Bolonia, 1968.

Der Briefwechsel des Gottfried Wilhelm Leibniz in der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover. Edic. de Eduard Bodemann. Hannover, 1889.

Die Leibniz-Handschriften der königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover. Edic. de Eduard Bodemann. Hannover - Leipzig, 1895.

Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royal de Hanovre. Edic. de Louis Couturat. París, 1903.

Gothofredi Guillelmi Leibnitii Opera Omnia In Sex Tomos distributa. Edic. de Ludovic Dutens. 6 tomos en 7 vols. Ginebra, 1768.

God. Guil. Leibnitii Opera Philosophica quae stant latina gallica germanica Omnia... Edic. de Joannes Eduardus Erdmann. Berlín, 1840.

Oeuvres de Leibniz, publiées la première fois et d'après les manuscrits originaux, avec notes et introductions.

Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Edic. de C. I. Gerhardt. 7 vols. Berlín, 1875-1890.

Leibnizens mathematische Schriften. Edic. de C. I. Gerhardt. 7 vols. Berlín-Halle, 1849-1863.

Deutsche Schriften. Edic. de G. E. Guhrauer. 2 vols. Berlín, 1838-1840.

Traducciones al castellano

Obras de Leibnitz puestas en lengua castellana por Patricio de Azcárate. Editorial Medina, Madrid, 1877.

Leibniz, Opúsculos filosóficos. Trad. M. García Morente. Colec. Universal. Madrid-Barcelona, 1919.

Leibniz, Tratados fundamentales (primera serie). Trad. Vicente P. Quintero. Losada, Buenos Aires, 1939.

Discurso de Metafísica. Trad. Julián Marías. Revista de Occidente, Madrid, 1942.

Nuevos Ensayos sobre el entendimiento humano. Trad. Javier Echevarría. Editora Nacional, Madrid, 1977.

La polémica Leibniz-Clarke. Trad. Eloy Rada. Taurus,

Edic. de A. Foucher de Careil. 7 vols. Paris, 1859-1875.

La polémica Leibniz-Clarke. Trad. Eloy Rada. Taurus, Madrid, 1980.

Monadología. Trad. Julián Velarde. Pentalfa, Oviedo, 1981.

Obras sobre la lógica de Leibniz

Barone, Francesco, *Logica formale e logica trascendentale. vol. I: Da Leibniz a Kant*. Turín, 1957.

Carrucio, Ettore, I fini del "Calculus ratiocinator" di Leibniz e la logica del nostro tempo", en *Bollettino della Unione Matematica Italiana*. Ser. III, Año III, nº 2, Agosto 1948, pp. 148-161.

Corsano, Antonio, "Logica e metafisica nel pensiero giovanile di Leibniz", en *Bolletino di Storia della Filosofia dell'Università degli Studi di Lecce*, I (1973), pp. 36-51.

Couturat, Louis, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*. París, 1901.

Curras Rabade, Angel, "Consideraciones sobre la lengua universal leibniciana", en *Anales del Seminario de Metafísica*, 1969, pp. 7-39.

Diels, Hermann, "Über Leibniz und das Problem der Universalsprache", en *Sitz.-Ber. Berliner Akademie der Wissenschaften*, 1899, pp. 579-603.

Dürr, Karl, "Die mathematische Logik von Leibniz", en *Studia philosophica*, VII (1947), pp. 87-102.

Dürr, Karl, *Leibniz 'Forschungen im Gebiet der Syllogistik*. Berlín, 1949.

Galli, G., *Studi sulla filosofia di Leibniz*. Padua, 1948.

Jourdain, P. E. B., "The logical work of Leibniz", en *The Monist*, 26, 1916, pp. 504-523.

Knecht, Herbert H., *La logique chez Leibniz*. L'Age d'homme, Lausanne, 1981.

Lindemann, Hans A., "Leibniz y la lógica moderna", en *Anales de la Sociedad científica argentina*, 142, 1956, pp. 164-176.

Loria, Gino, "La logique mathématique avant Leibniz", en *Bull. des sc. math.*, 2ª serie, 18, 1894, 1ª parte, pp. 107-112.

Rescher, Nicholas, "Leibniz's interpretation of his logical calculi", en *J. symbolic Logic*, 19, 1954, pp. 1-13.

Risse, Wilhelm, "Die Characteristica Universalis bei Leibniz", en *Studi Internazionali di Filosofia*, I, 1969, pp. 107-116.

Rossi, Paolo, *Clavis universalis. Arti mnemoniche e logica combinatoria da Lillo a Leibniz*. Milán-Nápoles, 1960.

Russell, Bertrand, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*. Cambridge, 1900.

Sainati, Vittorio, "Sulla logica leibniziana", en *Filosofia* (Turin), 21, 1970, pp. 221-258.

Sánchez Mazas, Miguel, "Sobre un pasaje de Aristóteles y el cálculo lógico de Leibniz", en *Revista de Filosofía*, 10, 1951, pp. 527-534.

Sánchez Mazas, Miguel, "Breve esquema de las principales ideas lógicas de Leibniz", en *Theoria*, 2, 1953, pp. 167.

Sánchez Mazas, Miguel, "Notas sobre la combinatoria de Leibniz", en *Theoria*, 2, 1953, pp. 133-145.

Sánchez Mazas, Miguel, "La lógica matemática de Leibniz" en *Theoria*, 2, 1954, pp. 210-211.

Styazhkin, N. I., *History of mathemaitcal logic from Leibniz to Peano*. Trad. del ruso en The M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1969.

Vacca, Giovanni, "La logica di Leibniz", en *Revue de mathématiques* (Rivista di matematica), 8, 1902-1906, pp. 64-74.

Vailati, Giovanni, "Sul carattere del contributo apportato dal Leibniz alle sviluppo della logica formale", en *Rivista di filosofia e scienze affini*, 12, 1905, pp. 338-44.

X. La lógica simbólica en el siglo XVIII

Gotfried Ploucquet (1716-1790)

Bastante tiempo tardaron en aflorar (al menos, en terreno propicio[1] las dos ideas germinales de la lógica simbólica sembradas por Leibniz: las ideas de la *characteristica universalis* y el *calculus ratiocinator*. Casi un siglo después de que Leibniz las hubiese expuesto en su *Dissertatio de arte combinatoria* apararecen, en 1763, el *Methodus tam demostrandi directe omnes syllogismorum species, quam vitia formae detegendi ope unius regulae* y el *Methodus calculandi in logicis*, ambas obras de Gottfried Plouquet, profersor de Lógica y Metafísica en la Universidad de Tubinga entre 1750 y 1782. En ellas su autor intenta utilizar la *characteristica* para conseguir un tratamiento riguroso de la silogísitica.

Ploucquet rechaza la omnicomprensión de un *calculus universalis*, aplicable tanto a los números como a las magnitudes mismas, a las fuerzas y a los conceptos lógicos. De ahí que su cálculo lógico esté configurado, no como un cálculo universal, o una lengua universal, sino como un método específico para el domino particular de entes y propiedades lógicas. Mediante él cabe simplificar la inferencia lógica, y alcanzar su validez, prescindiendo del contenido de los conceptos y ateniéndose exclusivamente a la estructura formal de las proposiciones, de manera que "incluso las personas ignorantes *(rudes)* que no se percantan (claramente) de la fuerza del cálculo y del raciocinio, pueden ser educadas de modo que a partir de premisas dadas encuentren sin temor a errar aquellas conclusiones a las que por sí solas llegarían"[2]. Esta presentación que Ploucquet hace de su método como un mecanismo adaptable a cualquier mente, no tuvo buena acogida y sí el rechazo explícito de algunos en el ambiente filosófico de su época; especialmente Hegel se rebela contra la concepción de la lógica resultante de la interpretación ploucqueriana del cálculo como mecanismo: "el elogio de que por medio del cálculo cabe proporcionar mecánicamente (toda) la lógica entera a la gente inculta es, ciertamente, lo que peor se puede decir sobre una invención concerniente a la ciencia de la lógica"[3].

En la aplicación de su método a la silogística, Ploucquet parte del "principio de la identidad del sujeto y predicado", según el cual "en la relación del sujeto con el predicado cabe establecer o su identidad o su diversidad". En el primer caso tenemos un juicio afirmativo; en el segundo, un juicio negativo. Así, por ejemplo, "Todo A es B" significa, no que todo A pertenece a B, sino que todo A pertenece a un cierto B determinado, por cuanto que B (el predicado) indica, no un concepto genérico, sino una noción parcial inherente al sujeto de modo determinado. Este principio así entendido responde a la concepción psicológica que Ploucquet tiene del juicio: el juicio es, para él, la aprehensión inmediata de una identidad que se presenta a la mente; es la intelección, no de dos cosas (sujeto-predicado), sino de una sola, y la proposición afirmativa no es sino la expresión de una misma cosa mediante signos diversos. Así, por ejemplo, cuando tengo la intuición de una piedra redonda y enuncio "esta piedra es redonda", mediante tal proposición pienso ac-

---

[1] Así, por ej., los hermanos Santiago y Juan Bernoulli, en su *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici*, buscan la manera de mostrar la estrecha correspondencia entre las principales constantes lógicas y las operaciones fundamentales del álgebra, para extraer la conclusión de que el proceso silogístico constituye un caso particular y más simple de la compleja inherencia algebraica. Pero ésta no ea la idea de Leibniz, quien no buscaba, como aquí hacen los Bernoulli, hacer entrar a la lógica en el molde del Algebra, la matemática concerniente a las relaciones cuantitativas, sino que propugnaba la idea de una *mathesis universalis*, en cuanto ciencia de la "forma de los cosas" en cuanto cálculo formal no limitado a cantidad, sino extensible también a la cualidad.

cia de la "forma de las cosas" en cuanto cálculo formal no limitado a símbolos, sino extensible también a la cualidad.

[2] *Sammlung der Schriften...*, ed. cit., p. 74.

[3] *Wissenschaft der Logik*, vol. III, p. 143. Trad. cast., p. 604.

tualmente solamente una noción -la de piedra redonda-, y los dos términos pueden ser expresados también con uno solo.

No sólo la proposición sino también el silogismo entero constituye la expresión de un único concepto, dado que la premisa menor y la conclusión están ya implícitas y pensadas como tales en la premisa mayor, y, por tanto, "todos los silogismos afirmativos se reducen a una sola noción"[4].

Esta unicidad de concepto, tanto de la proposición como del silogismo, exige, no obstante, una multiplicidad de signos en la comunicación con los demás, a la hora de explicar a otros ese concepto único que constituye el silogismo en la mente de un sujeto. Y en este sentido juega un papel importante el cálculo, no como instrumento capaz de penetrar en la Ontología, al modo de Leibniz, sino como medio de comunicación lingüística.

El principio de la identidad del sujeto y predicado exige, también, una interpretación de la proposición y un desarrollo del cálculo desde el punto de vista de la extensión y también la necesidad de tomar en cuenta la extensión (cuantificación) del predicado: Así, por ejemplo, en la proposición "todos los leones son animales" la identidad del sujeto y predicado, exige que el significado de tal proposición sea el de que todos los leones son *algunos* animales, o sea, el de que algunos animales son leones. Según esto, Ploucquet precede a Hamilton (como éste último así lo reconoce) en la construcción de un cálculo sobre la cuantificación del predicado.

Con la cuantificación del predicado simplifica Ploucquet la teoría de la oposición y la conversión de las proposiciones: desaparece la distinción entre conversión *simplex* y conversión *per accidens:* "todo hombre sintiente" se convierte, sin más, en virtud del principio de identidad, en "algún (cierto) sintiente es hombre", sin necesidad de apelar al cambio de cantidad, ya que en las proposiciones afirmativas el predicado, para poder ser igual al sujeto, exige una cuantificación particular. Esta particularidad, empero, es entendida por Ploucquet en sentido "comprehensivo", bien indicado por el término latino "quidam" "cierto(s)", sin determinar si hay o no otros individuos además de los tomados en consideración, y frente al sentido "exclusivo" expresado por el término "aliqui"(= algunos).

En silogística le permite obtener nuevos modos válidos, no admitidos en la lógica tradicional. Así, por ejemplo, de las premisas: 1) "Todos los hombres son mortales" y 2) "Ningún animal es hombre", cabe llegar a la conclusión "ningún animal es mortal", conclusión no válida en la silogística tradicional, pero sí en el nuevo cálculo en tanto que, al ser (significar) la premisa mayor "Todos los hombres son *algunos* mortales", la conclusión será (significará) "Ningún animal es algunos mortales", es decir, "ningún animal es un hombre mortal". También considera posible (rechazando así la regla silogística tradicional según la cual de dos premisas negativas no se sigue nada) obtener de las premisas 1) "Todo A es no-B" y 2) "Todo A es no-C" la conclusión 3) "Algún (cierto) no-C es no-B". Ello supone considerar, en contra de Aristóteles, como negativas las proposiciones del tipo "X es no-Y", y tomar en cuenta la clase complementaria así como algunas de sus relaciones con otras clases. Aspecto éste destacable para el desarrollo de la lógica de clases.

Sobre estas bases Ploucquet construye su cálculo simbolizando el sujeto y el predicado con letras mayúsculas o minúsculas, según que su cantidad sea universal o particular. El adosamiento de las letras sin más indica que el juicio es afirmativo; el negativo es indicado interponiendo entre las letras el signo >. Simbolizadas así las premisas, la conclusión se obtiene mecánicamente mediante la regla de transformación siguiente: eliminando el término medio se dejan en conexión los términos restantes con la misma cantidad con que aparecen en las premisas. Así, por ejemplo,

Omnis vir est homo.....Vh
Nullus puer est vir.....P > V
Ergo Nullus puer est quidam homo (=vir)...P > h

Pese a la utilidad que, en opinión de su autor, reportaba, este método, restringido casi por completo a la teoría silogística, no consiguió abrir paso a los nuevos campos fértiles para la Lógica (la lógica de clases y la de relaciones), a los que llegaron Boole y De Morgan.

El principio de la identidad del sujeto y predicado, junto con su exigencia de cuantificar el predicado, sólo indirectamente (como sucederá también después con Hamilton) contribuyó al desarrollo de la lógica simbólica: en el sentido de que al aparecer las proposiciones como ecuaciones, quedó patente la semejanza entre proposiciones y ecuaciones; entre proceso silogístico y proceso de resolución de ecuaciones. Pero dejaba sin resolver, o mejor, interpretaba y reorganizaba, de modo muy particular, las entidades y el campo de la Lógica. Por ello la construcción de Ploucquet fue bastante discutida (objetada y defendida) por sus cole-

[4] *Sammlung der Schriften...*, ed. cit., p. 174.

gas y discípulos: Entre los objetores están Thomas Abbt y Johann Heinrich Lambert; y entre los defensores, Wilhelm Klemm y Georg Johann von Holland.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Nace en Mülhausen (Alsacia), en 1728, descendiente de familia protestante de origen francés. Por difícil situación económica familiar, Lambert fue autodidacta, hasta que, en 1748 entró al servicio del conde Peter von Salir, en Chur, lo que le permitió viajar y completar sus estudios, llegando a ser un espíritu auténticamente enciclopédico. De Lógica se ocupó hacia los años 1750-1760, trabajando en la construcción de un cálculo lógico siguiendo las ideas de Leibniz; sus resultados aparecen en el *Neues Organon* y en una serie de trabajos menores y en el epistolario con von Holland recogidos en *Logische und philosophische Abhandlungen*...

En el estudio de la silogística Lambert analiza qué es lo específico de cada una de las cuatro figuras, prescindiendo de la teoría que partiendo de Aristóteles hace de la primera figura la figura privilegiada, "perfecta", y basando la silogística entera en el principio que la rige, el *dictum de omni et nullo*. Sin negar la reducibilidad de las demás figuras a la primera y la vigencia de ese principio para tal caso, Lambert busca un principio propio para cada figura, quedando así libertad para guiarse, según los casos, por el principio más conveniente.

La primera figura está gobernada por el principio.....*Dictum de omni et nullo*
La segunda por el principio...*Dictum de diverso*
La tercera " " "..... *Dictum de exemplo*
La cuarta " " "..... *Dictum de reciproco*

Así, por ejemplo, si se trata de justificar la conclusión "hay piedras que atraen al hierro", la forma más "natural" en este caso será razonar *ab exemplo*, esto, utilizar la 3ª figura; así:

El imán atrae el hierro
El imán es una piedra

Luego hay piedras que atraen el hierro

En cuanto a la simbolización, Lambert, siguiendo el camino ya emprendido por Leibniz, acude a una representación gráfica (geométrica) de la silogística: el con la mayor o menor extensión de los conceptos, dispuestos paralelamente en el caso del juicio afirmativo y al lado uno de otro en el caso del juicio negativo; y representando la particularidad mediante el prolongamiento punteado del segmento. Por ejemplo, la representación del 4º modo de la 1ª figura *(Ferio)* (y designando: M, el término medio; B, el menor; y C, el mayor):

M ———— M C ———— C
Ferio
-------- B -----

Esta representación gráfica no es más que un aspecto de la constitución de la caraterística, componente, a su vez, indispensable del cálculo universal. El proyecto general de Lambert es, como el de Leibniz, la constitución de una *mathesis universalis*, que comprende: 1) la determinación de un conjunto básico de ideas simples; 2) la simbología precisa y exacta de tales ideas; 3) la determinación completa de las reglas que permitan la combinación de los símbolos de las ideas simples para representar las ideas complejas; 4) fijación, asimismo, de las reglas que permitan operar sobre tales símbolos, simples o complejos, para obtener un cálculo infalible sobre signos.

La guía para la realización de este proyecto son, como lo fueron también para Leibniz, las Matemáticas, generalizando sus procedimientos de simbolización y de cálculo. De aquí que Lambert desarrolla su cálculo aplicando los procedimientos del álgebra a la estructura conceptual de la lógica tradicional, manteniendo, no obstante, nociones y teorías escolásticas. Así, parte de la idea escolástica según la cual la definición de un concepto se hace mediante el género próximo (sus notas comunes) y la diferencia específica (sus notas propias). Utilizando la siguiente simbología:

=	como	signo	de	igualdad
+	"	"	"	conjunción
-	"	"	"	separación
x	"	"	"	oposición
>	"	"	"	universalidad
<	"	"	"	particularidad
~	"	"	"	cópula
a ,b, c,...	"	"	"	conceptos dados
n,m,l,...	"	"	"	conceptos indeterminados
x ,y, z,..	"	"	"	conceptos desconocidos
γ	"	"	"	género
δ	"	"	"	diferencia

Se tiene que, siendo *a* un concepto, $a\,\gamma$ es el género; $a\gamma^n$, un género superior; $a\delta$, la diferencia; $a\delta^n$, una

sujeto y el predicado de un juicio son representados por segmentos más o menos largos en correspondencia

diferencia superior; $a\gamma + a\delta = a$ la explicación; y, por tanto $(a\gamma + a\delta)^n$ o bien $a\,(\gamma + \delta)^n$ será una explicación

de grado superior. Puesto que $a\gamma + a\delta = a\,(\gamma + \delta) = a$, tenemos también: $a\gamma = a - a\delta$ y $a\delta = a - a\gamma$. Siendo $a\gamma + a\delta = a$; puesto que: $a\gamma = a\gamma^2 + a\gamma\delta$ y $a\delta = a\delta\gamma + a\delta\delta$, tenemos entonces (por analogía con el cálculo algebraico en donde $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$) que $a = a\,(\gamma + \delta)^2 = a\gamma^2 + a\gamma\delta + a\delta\gamma + a\delta\delta$, y generalizando la fórmula para cualquier exponente n. De este modo se puede expresar a mediante géneros universalísimos.

Las notas que Lambert llama "metafísicas" (relaciones) son representadas por letras griegas que van separadas de las letras de conceptos por el signo ::, y formula también ecuaciones. Así: siendo i = fuego; c = calor, α = causa; entonces $i = \alpha :: c$ representa: "el fuego es la causa del calor"[5].

Adopta, además, el punto de vista *intensional* en la interpretación del juicio, oponiéndose, así, a Ploucquet y a Holland (si bien en el tratamiento de la silogística había apelado primeramente, como hemos visto, a la representación geométrica (y por tanto extensional); pero esa simbología geométrica (y la silogística a la que se aplica) es considerada como una minucia en comparación con el cálculo lógico general por él proyectado. Los cálculos proyectados por éstos, dice Lambert, se fundan "sobre el hecho de que tanto en el sujeto como en el predicado son considerados, no propiedades, sino individuos, y sobre el hecho de que el número de tales individuos es considerado en su totalidad, o en parte, o igual a cero. La aritmética lógica se limita aquí a 'todos', 'algunos', 'uno', 'ninguno'. Pero es posible aún otra especie de cálculo, donde no se consideran los individuos sino las propiedades; éste es el caso en el que un concepto está contenido en otro... sujeto y predicado son multiplicados con propiedades hasta que resulten idénticos. Por ejemplo:

1) Todos los A son B : $A = mB$

2) Ningún A es B: $\dfrac{A}{p} = \dfrac{B}{q}$

3) Algunos A son B: $nA = mB$

4) Algunos A no son B: $\dfrac{nA}{p} = \dfrac{B}{q}$

en donde el factor m indica el complejo de las cualidades propias del sujeto y que le faltan al predicado; la adjunción (o multiplicación) de letras representa la combinación de las cualidades de que una cosa está constituida; y el símbolo de la división (como inverso del de la multiplicación) expresa la detracción de las cualidades no comunes en las dos ideas A y B.

La fórmula general de un silogismo, cuando las premisas son de la forma:

1) $\dfrac{mA}{p} = \dfrac{nB}{q}$

2) $\dfrac{\mu A}{\pi} = \dfrac{\nu C}{\rho} =$

resulta ser:

$$\frac{m\nu C}{\rho} = \frac{\mu nB}{\pi q}$$

Los distintos tipos de silogismos responden a las distintas combinaciones de estas letras minúsculas (griegas y latinas). Y las combinaciones inválidas quedan excluidas, bien por el simbolismo de las premisas, bien por la necesidad de la presencia en ellas de un término medio, lo que excluye, por ejemplo, la presencia simultánea de m y μ, y de p y π. El cálculo de Lambert presenta varias dificultades. Algunas quedaron de manifiesto en las discusiones mantenidas con Holland. Este, en la carta de 24-IV-1768, observa que la dificultad del cálculo de Lambert estriba en el hecho de que "si se quiere entrar en la materia y acometer efectivamente la anatomía de las ideas, se encuentran graves obstáculos".

La fórmula general que Lambert da del juicio, $p = cv$, como siendo de la misma especie que la que en mecánica liga espacio, tiempo y velocidad, y donde p es función de c y de v, dista mucho de una identificación lógica. "Cuando en mecánica se pone $s = vt$, no se sigue de tal igualdad que el concepto de espacio está compuesto de los conceptos de velocidad y de tiempo. La expresión vt mide el espacio, pero no lo define. En otras palabras, si se representa un concepto como el producto de diversas ideas parciales, que puedan de nuevo resolverse en ellas, tales ideas parciales deben ser pensables primeramente en sí. Pero me parece que en su ejemplo no se puede hacer de c y v dos conceptos diversos, porque v está ya necesariamente contenido en c, esto es, no se puede pensar la conexión sin la variedad"[6].

Lambert mismo fue consciente de esta general dificultad, la misma que rodea la *mathesis universalis* de Leibniz: Aceptado el principio de un cálculo fundado sobre elementos simples, la difícil tarea consiste en determinar las cualidades o elementos simples; ello supone elaborar una metafísica y una teoría del conocimiento; tarea que Lambert emprende en la parte III de su *Neues Organon*, titulada "Semiotik" o "doctrina de la simbolización del pensamiento y de las cosas".

[5] En *Philosophische Schriften*, ed. cit., vol. VI/1, p. 18.
[6] En Lambert, *Philosophische Schriften*, ed. cit., p. 265.

Otras dificultadades del cálculo lógico lambertiano provienen de la interpretración que el autor da a las entidades lógicas y de la analogía (no calculada en todos sus extremos y establecida un tanto precipitadamente) entre operaciones algebraicas y operaciones lógicas. Lambert emprende la construcción de su cálculo desde el punto de vista de la comprehensión de los conceptos; pero independientemente de su valor, los cálculos lógicos formales que efectivamente alcanzaron un alto desarrollo son los construidos desde el punto de vista extensional. Y, en segundo lugar, si bien algunas operaciones algebraicas (la adición y la multiplicación) encuentran fácil correspondencia en la adición y multiplicación lógicas, otras (la sustracción y la división) presentan bastantes dificultades, que Lambert no trata, y a las que habrá de enfrentarse Boole.

Con todo, el cálculo de Lambert toma la vía que en el futuro llevará al éxito a la Lógica: su tratamiento matemático y superación de la silogística con el cálculo de clases y el de relaciones.

Georg Johann von Holland (1742-1784)

Reconocido matemático por su *Abhandlung über die Mathematik, die allgemeine Zeichenkunst und die Verschiedenheit der Rechnungsarten*. Tubinga, 1764, que considera su disciplina como teoría simbólica general. Discípulo de Ploucquet, defiende la simbología y la interpretación extensional de su maestro frente a la simbología geométrica para la silogística y la interpretación intensional para el cálculo propuestas por Lambert. Con todo, Holland reconoce las ventajas de la propuesta de Lambert, cuya reconsideración le resulta útil para delinear un Cálculo en una perspectiva extensional y sobre la base de la cuantificación del predicado. Este cálculo aparece en una larga carta dirigida a Lambert el 9-IV-1765[7]:

Si S indica el sujeto, P el predicado, p y π números indeterminados que pueden variar, entonces

$$\frac{S}{p} = \frac{P}{\pi}$$

significa: "una parte de S es una parte de P", o bien: "ciertos S son ciertos P", o bien: "algunos S son algunos P". Esta expresión es la fórmula general de todos los juicios posibles y queda aclarada como sigue:

Un número es afirmativo o negativo, y en ambos casos es finito o infinito. Veamos cómo pueden ser determinados p y π:

Si $p = I$ en $\frac{S}{p}$, entonces $\frac{S}{p}$ tiene la misma cantidad que "todos los S", y de este modo la función $\frac{S}{p}$ alcanza el *maximun logicum*. Es evidente que ni p ni π pueden resultar menores que 1, o anularse o resultar negativos (ya que esto sólo podría suceder *post transitum per evanescentiam*). Si p o π resulta infinito, entonces el concepto es negativo. Es un peculiar artificio del arte de los signos el de expresar en álgebra el 0 mediante $\frac{1}{\infty}$ y de ahí el dar a un concepto negativo una fórmula afirmativa, a fin de someterlo a las reglas generales del cálculo. Así, la expresión "una parte infinitamente pequeña de una línea curva es una línea recta" no dice sino "ninguna parte de una línea curva es recta". Mediante una designación que aparece positiva se está en condiciones de extraer propiedades positivas de determinaciones negativas.

Estos presupuestos, no son posibles más que las siguientes formas de juicios (en las que f expresa un número finito mayor que 1):

1) $\frac{S}{1} = \frac{P}{1}$ Todos los S son todos los P

2) $\frac{S}{1} = \frac{P}{f}$ Todos los S son algunos P

3) $\frac{S}{1} = \frac{P}{\infty}$ Todos los S no son P

4) $\frac{S}{f} = \frac{P}{1}$ Algunos S son todos los P

5) $\frac{S}{f} = \frac{P}{f}$ Algunos S son algunos P

6) $\frac{S}{f} = \frac{P}{\infty}$ Algunos S no son P

7) $\frac{S}{\infty} = \frac{P}{1}$ Todos los no S son todos los P

8) $\frac{S}{\infty} = \frac{P}{f}$ Todos los no S son algunos P

9) $\frac{S}{\infty} = \frac{P}{\infty}$ Todos los no S son todos los no P

Estas nueve especies de juicios se reducen a cuatro:

1, 2, 9 : universales afirmativos
3, 7, 8 : universales negativos
4, 5 : particulares afirmativos
6 : particulares negativos

[7] Recogida en Lambert, *Philosophische Schriften...*, ed. cit., IX, 1, pp. 17-20.

Es fácil, además, sobre esta base, indicar una inferencia. La regla principal viene dada por el hecho de que, si no se está cierto de la misma particularidad, úsense siempre letras diferentes para los divisores, para no dar lugar a una falsa sustitución.

Ejemplo:

(I) Todos los hombres, H, son mortales, M;
Todos los europeos, E, son hombres, H;

$$H = \frac{H}{p}$$

$$E = \frac{H}{\pi}$$

Se obtiene:

$$E = \frac{M}{p\pi} \ ,$$

esto es: todos los europeos son mortales.

Pero la particularidad de M en la conclusión se ha obtenido de manera necesariamente diversa, como lo había sido en la premisa, puesto que los europeos constituyen una parte más pequeña de los mortales que, la de los hombres en general. Se trata, en cierto modo, de una particularidad de particularidad.

(II) Todas las plantas son organismos:

$$P = \frac{O}{p}$$

Todas las plantas no son animales:

$$P = \frac{A}{\infty}$$

Se obtiene:

$$\frac{O}{p} = \frac{A}{\infty}$$

algunos organismos no son animales.

(III) Todos los hombres son racionales:

$$H = \frac{R}{p}$$

Todas las plantas no son racionales:

$$P = \frac{R}{\infty}$$

Se obtiene:

Todas las plantas no son hombres $P = \frac{pH}{\infty}$, en donde se debe recordar del álgebra que $\frac{P}{\infty}$ no es ni más ni menos infinitamente pequeño que $\frac{1}{\infty}$

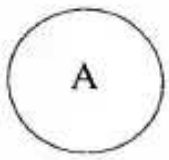
Leonard Euler (1707-1783)

Discípulo de Juan Bernoulli, matemático y físico, fue presidente de la Academia de Ciencias de Berlín. Mantuvo correspondencia epistolar con Lambert y con otros matemáticos que tenían presente la idea leibniciana de una *mathesis universalis*.

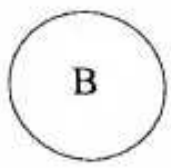
En las cartas a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina de Federico II de Prusia (publicadas en 1772) Euler adopta un procedimiento que, si bien ya era conocido y había sido ampliamente utilizado en el Medievo y el Renacimiento, y Leibniz expresamente lo había utilizado, aunque se mantenía manuscrito sin salir a la luz en la biblioteca de Hannover, por lo que, de hecho, Euler lo redescubrió por sí mismo, alcanzó gran éxito, debido a la claridad de exposición y a la utilidad didáctica. Dicho procedimiento parte de la idea de representar los conceptos mediante ciertas regiones del espacio consideradas como clases de puntos, de manera que las relaciones y las operaciones que cabe establecer entre tales figuras geométricas se corresponden con, y representan, las relaciones y operaciones entre conceptos.

En su aplicación a la silogística, y partiendo del análisis tradicional de la proposición en sujeto-predicado interpretados en extensión tenemos[8]:

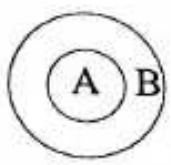
Una noción general comprende en sí una infinidad de objetos individuales; se la considera, pues, como un espacio en el que están contenidos todos esos individuos. Así, para la noción de *"hombre"* se diseña un espacio



en el que se imagina que están comprendidos todos los hombres. También para la noción de *"mortal"* se diseña un espacio



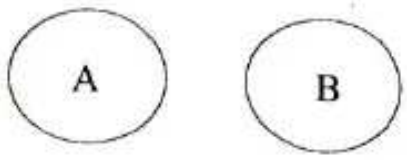
en donde se imagina que está comprendido todo aquello que es mortal. Así, cuando digo "todos los hombres son mortales", esto depende del hecho de que la primera figura está contenida en la segunda. Por tanto, la representación de una proposición afirmativa universal será ésta:



[8] *Letres à une princesse d'Allemagne*, carta 35, ed. cit., pp. 349-52.

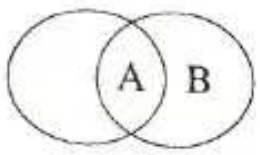
en la que el espacio A, que representa el *sujeto* de la proposición está totalmente contenido en el espacio B, que representa el *predicado*.

Para las proposiciones negativas universales, los dos espacios, A y B, de los que A indica siempre el *sujeto* y B el *predicado*, son representados separados el uno del otro:



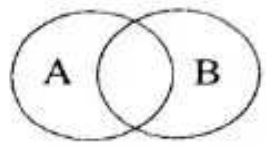
porque se dice que "ningún A es B", esto es, que nada de todo aquello que está comprendido en la noción A está comprendido en la noción B.

Para las proposiciones afirmativas particulares como "algunos A son B", tan sólo una parte del espacio A estará comprendida en el espacio B.



puesto que se ve claramente que algo comprendido en la noción A está, asimismo, comprendido en la noción B.

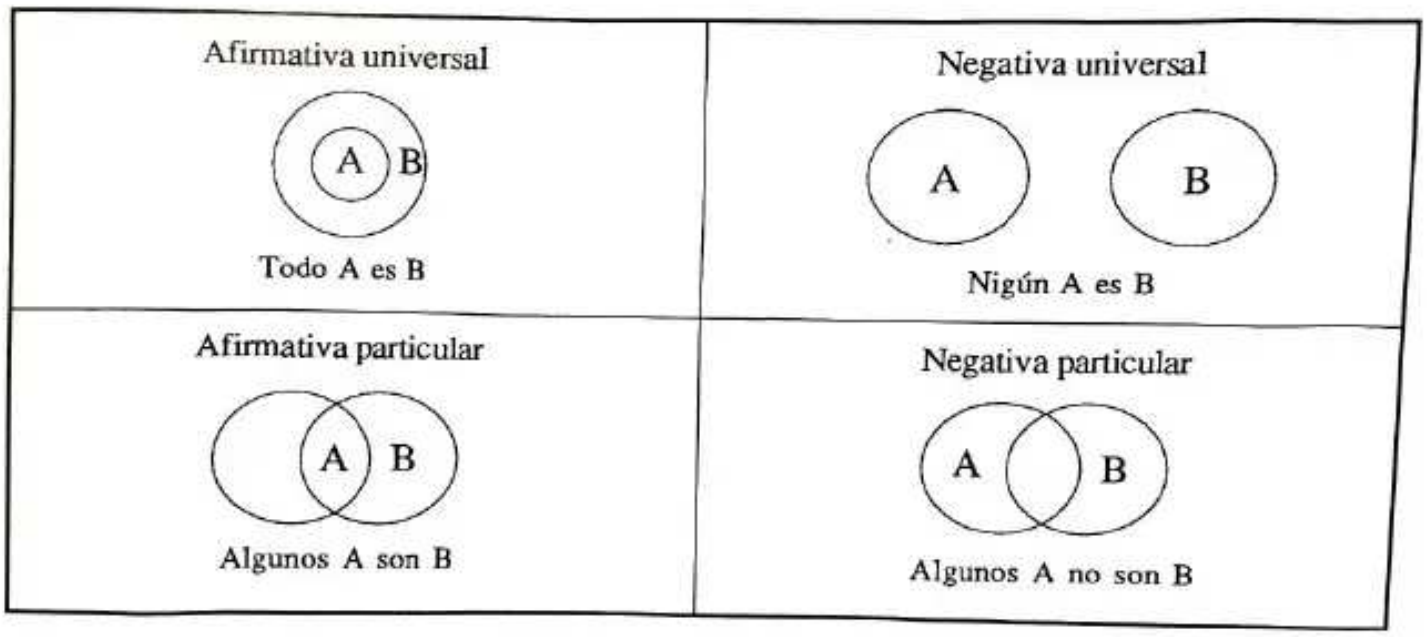
Para las proposiciones negativas particulares como "algunos A no son B", una parte del espacio A debe encontrarse fuera del espacio B, como se ve claramente en la figura siguiente:



que coincide exactamente con la precedente. Pero aquí se trata de hacer ver que en la noción A hay algo que no está comprendido en la noción B, o que se encuentra fuera de esta noción.

"Esta figuras circulares, o mejor estos espacios (puesto que no importa qué forma se les dé) son sumamente aptos para facilitar nuestras reflexiones sobre esta materia y para revelar todos los misterios con los que tropieza la Lógica y trata de desvelar con gran dificultad, cuando sirviéndose de estas figuras todo salta inmediatamente a la vista" (carta 35, *ed., cit.*, p. 412).

El sistema de representación diagramática de las proposiciones, propuesto por Euler, es, pues:



Aplica, luego, Euler esta representación a las figuras silogísticas mediante las combinaciones posibles de tres círculos intersectados (representantes de los tres términos intervinientes en cada silogismo), y enumera 20, pero señala que dos de ellos resultan ser el mismo, por lo que quedan 19 figuras diferentes, correspondientes a los 19 modos silogísticos tradicionalmente admitidos como válidos, pero en estas figuras la validez "salta a la vista", con sólo tener en cuenta estos dos principios intuitivamente evidentes:

Todo lo que está en lo contenido se encuentra tam-

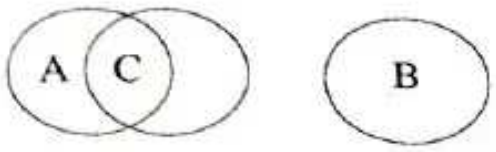
He aquí algunos ejemplos:

Barbara: Todo A es B
Todo C es A

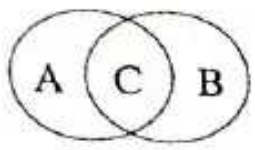
Luego Todo C es B

...Todo lo que está en lo contenido se encuentra también en lo continente y Todo lo que está fuera de lo continente está también fuera de lo contenido.

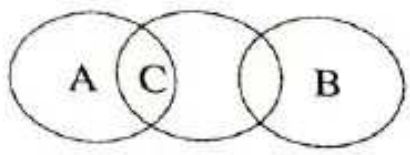
Ferio: Ningún A es B
Algún C es A (o algún A es C)
Luego Algún C no es B



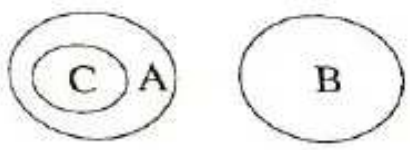
ó



ó



Celarent: Ningún A es B (o Ningún B es A)
Todo C es A
Luego Nigún C es B



El mismo Euler fue consciente de algunas de las dificultades que plantea su sistema de representación: "respecto de los dos últimos casos que representan proposiciones particulares, observo que dan lugar a ciertas dudas, puesto que no está claro si ha de quedar, o no, comprendida en B una parte de A. Podría también darse que la noción A contuviese en sí totalmente la noción B..." *(Ibidem)*. En la representación de premisas silogísticas sucede que cuando la proposición es convertible *simpliciter* (casos E e I) Euler yuxtapone las dos expresiones, por lo que (dado, además, que las letras A, B, C por él usadas pueden corresponder indistintamente a los términos mayor, menor y medio) una misma representación encuentra correspondencia en varias figuras a la vez. Así la última de las figuraciones expuesta corresponde, además de a *Celarent*, a:

Cesare: Ningún B es A
Todo C es A
Luego Ningún C es B

Camestres: Todo C es A
Ningún B es A
Luego Ningún A es C

Camenes: Todo C es A
Ningún A es B
Luego Ningún B es C

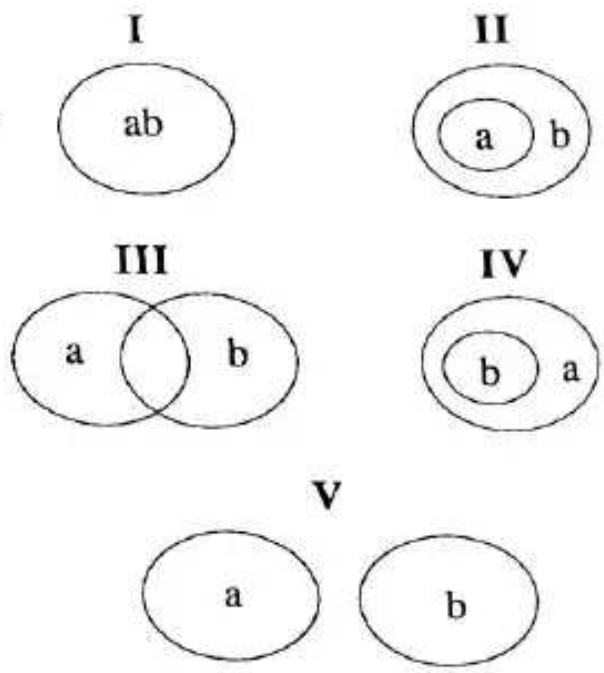
Otra dificultad surge cuando aparecen las particulares en un silogismo. La indeterminación de éstas y la determinación que marca la representación obliga a yuxtaponer varias figuraciones posibles (como se ve en la representación, antes expuesta, de *Ferio)* entre las que cabe elegir.

Estas y otras dificultades fueron las que indujeron a Venn (ver luego) a adoptar otro sistema de representación diagramática para expresar las relaciones y operaciones del álgebra Booleana.

Joseph-Díez Gergonne (1711-1859)

Astrónomo y matemático francés, fundador de los *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, en los que expuso sus investigaciones sobre Geometría proyectiva, sobre Combinatoria y sobre Algebra. También en esta revista aparecieron los resultados de sus investigaciones lógicas: *Essai de dialectique rationnelle* (1816-17) y *Essai sur la théorie des définitions* (1818).

En el primero de estos trabajos Gergonne parte de la interpretación en *extensión* de las ideas y, por tanto, de las dos ideas (sujeto y predicado) que componen la proposición. Examina luego las posibles relaciones de dos ideas, lo que equivale a establecer las posibles relaciones de situación de dos círculos trazados sobre un mismo plano. Aparecen, entonces, cinco situaciones:



en correspondencia pues de ideas con

Ningún B es A

Luego Ningún B es C

en correspondencia, pues, dos ideas, *a* y *b*, en cuanto a su extensión pueden encontrarse, una con relación a la otra, en una de estas cinco situaciones:

I) Así como dos círculos pueden superponerse, así también puede suceder que dos ideas concuerden exactamente entre sí en cuanto a su extensión, en cuyo caso sólo pueden diferir en la expresión; es el caso, por ejemplo de las ideas *batavo* y *holandés* o el de *Palas* y *Minerva*. Esta relación es representada por *I* (inicial de *identidad)*; relación "que tiene lugar entre dos ideas cuando es a la vez imposible que una idea contenida en la una no lo esté en la otra, y que una idea extraña a la una no lo sea igualmente a la otra".

II) y IV) Así como dos círculos desiguales pueden estar situados, el uno con relación al otro, de modo que el más pequeño esté comprendido en el más grande, así también dos ideas pueden hallarse de manera que la una, menos extensa, esté totalmente comprendida en la otra, más extensa. Es el caso, por ejemplo, de las ideas *francés* y *europeo*, y también el de las ideas *escultor* y *artista*. Se representa por *C* o por Ɔ (inicial de *continente* o *contenido)* esta relación, "que tiene lugar entre dos ideas cuando no pudiendo encontrar idea alguna contenida en la primera que no lo esté también en la segunda, se puede, al contrario, encontrar algunas que estando contenidas en la segunda no tengan nada en común con la primera".

III) Así como dos círculos pueden simplemente intersectarse, así también puede suceder que dos ideas se encuentren en una parte sólo de su extensión, de modo que, además de la parte común, cada una de ellas tenga una parte extraña a la otra. Es el caso, por ejemplo, de las ideas *anciano* y *médico* y también el de *gentilhombre* y *persona culta*. Se representa por *X* (símbolo del producto lógico) esta relación, "que tiene lugar entre dos ideas siempre que se pueda encontrar una tercera contenida a la vez en la una y en la otra, y que, además, cada una de estas dos ideas pueda contener alguna que sea completamente extraña a la otra".

V) Así como dos círculos pueden estar totalmente el uno fuera del otro, así también puede suceder que dos ideas sean completamente extrañas la una a la otra, en cuanto a su extensión. Es el caso, por ejemplo, de las ideas *polaco* y *español*, así como el de las ideas *termómetro* y *microscopio*. Se representa por *H* (inicial de *hors* = fuera) esta relación, "que tiene lugar entre dos ideas, siempre que es evidentemente imposible encontrar una tercera que esté a la vez contenida en la una y en la otra".

"Y del mismo modo que es imposible concebir, entre dos círculos situados sobre un mismo plano, otros tipos de situaciones respectivas que no sean las que acaban de ser señaladas, debe ser igualmente imposible concebir, entre dos ideas, otras relaciones de extensión que no sean aquellas que acabamos de poner de manifiesto"[9].

Este sistema propuesto por Gergonne de las proposiciones simples, en cuanto a sus relaciones de extensión, es, pues, completo; y, en este sentido, resulta más satisfactorio que el sistema clásico de los 4 tipos de proposiciones, ya que en éste, excepto la universal negativa (que corresponde exactamente a la exclusión recíproca) las demás resultan multívocas, en tanto que cada una de las del sistema de Gergonne queda exactamente determinada. Representando los cuatro tipos de proposiciones del sistema clásico por:

A: Universal afirmativa: "Todo P es G"

N: Universal negativa: "Ningún P es G"

a: Particular afirmativa: "Algún P es G"

n: Particular negativa: "Algún P no es G"

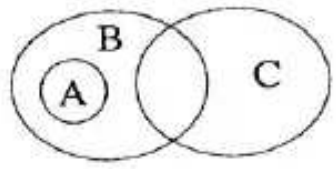
resulta que cada una de ellas pueden expresar las siguientes relaciones (distinguidas por Gergonne)[10]:

Proposiciones verdaderas			casos posibles
	A	..... I, C	
	N	H.....	
	a	..... X, I, C, Ɔ	
	n	H, X....Ɔ	

En la aplicación de este sistema a la teoría del silogismo Gergonne procede a resolver de cuántas maneras tres figuras cerradas cualesquiera, tres círculos por ejemplo, designados por G, M, P, pueden ser dispuestos, unos respecto de otros, sobre un mismo plano. Puesto que entre dos círculos (dos ideas o términos de la proposición) son posibles 5 tipos de relaciones representando cada uno por las letras H, X, I, C, Ɔ, y en un silogismo hay tres proposiciones (y tres térmi-

[9] *Essai de dialectique rationnelle*, e. cit., p. 194.
[10] *Ibidem*, p. 197.

nos), convengamos en que tres de esas cinco letras escritas consecutivamente indicarán la situación relativa de los tres términos de un silogismo, tomados dos a dos. La primera de esta letras indicará la relación entre el término mayor y el medio, esto es, entre los dos términos de la premisa mayor; la segunda indicará la relación entre el término medio y el menor, esto es, entre los dos términos de la menor; y, finalmente, la tercera indicará la relación entre los términos mayor y menor, esto es, entre los dos términos de la conclusión. Así, por ejemplo, el símbolo CHX significará que el término mayor contiene al medio; que éste es totalmente extraño al menor; y que el menor tiene una parte en común con el mayor, cuya representación sería:



Gergonne calcula el número total de las posibles disposiciones de estos símbolos de relaciones en la figura dada y de tal número extrae estos 54 silogismos concluyentes[11]:

Relaciones de M con G y P

- HH, HX, HI, HC, HƆ, XH, XX, XC, IH, CH, ƆH, ƆH, ƆX, ƆC;..... H
- HH, HX, HƆ, XH, XX, XI, XC, XƆ, IX, CH, CX, CƆ, ƆX, ƆC;..... X
- HH, XX, II, CƆ, ƆC;..... I
- HH, XH, XX, XC, IC, CH, CX, CI, CC, CƆ, ƆC;..... C
- HH, HX, HƆ, XX, XƆ, IƆ, CƆ, ƆX, ƆI, ƆC, ƆƆ;..... Ɔ

Relaciones entre G y P

De esta manera Gergonne supera el sistema tradicional de la silogística (entendida, claro está, en extensión) y echa las bases para la lógica de clases.

En el *Essai sur la théorie des définitions* Gergonne considera que la definición de palabras nuevas es una necesidad para el desarrollo de las ciencias, por lo que desarrolla una teoría sobre el asunto: "La definición no hace otra cosa que establecer una identidad de sentido entre dos expresiones de una misma colección de ideas, de las cuales la más simple es nueva y arbitraria, en tanto que la otra, más compleja, es enunciada en palabras cuyo sentido se encuentra ya fijado"[12]. Como leyes de la definición pone las siguientes:

I) La definición debe encerrar una, y sólo una, palabra, cuya significación no haya sido determinada anteriormente.

II) La definición debe encerrar todo aquello que es preciso para fijar adecuadamente el sentido de la palabra definida: conviene que no encierre nada más de lo que es necesario para cumplir este cometido.

Las definiciones obtenidas de este modo son las llamadas *explícitas* (u ordinarias). Pero al lado de éstas admite otra especie de definiciones llamadas *implícitas:* "Si una frase contiene una sola palabra, cuya significación nos es desconocida, el enunciado de esa frase podrá a menudo bastar para revelarnos su valor... Estas frases, que nos hacen así entender una de las palabras de las que se componen, por medio de la significación conocida de otras, podrían ser llamadas definiciones *implícitas* por oposición a las definiciones ordinarias, que se llamarían definiciones explícitas"[13].

Esta noción de *definición implícita* resultará fértil para la lógica formal moderna. Concordando con la tesis ya expuesta por Pascal[14] de que no todo es definible, tesis que compartirán, asimismo, Frege, Peano, Hilbert, resulta posible pararse en las definiciones (ordinarias), esto es, admitir cierto número de términos *primitivos* (indefinidos), pero cuyo sentido queda luego fijado por las frases (proposiciones, axiomas) que componen el sistema. Así, por ejemplo, Peano parte en la Axiomatización de la Aritmética[15] de tres términos primitivos (indefinidos): O, N, +, cuyo significado viene dado por las 5 proposiciones (axiomas) que componen su sistema (axiomático). Resultando, además, (según tesis fundamental del formalismo, defendida por Hilbert, compartida por Peano, pero rechazada por Frege) que tales proposiciones (o axiomas) conceden, no un significado único, sino múltiple (aunque siempre fijo en sus relaciones mutuas) a esos términos primitivos. Así, en una interpretación el significado de los tres términos

[11] *Ibidem*, p. 213.
[12] *Essai sur la théorie des définitions*, ed.cit., p. 13.
[13] *Ibidem*, p. 23.

[15] *Oeuvres*. Ed. París, 1889, Tomo 3, p. 165.

[15] *Los principios de la Aritmética expuestos según un nuevo método* (1889). Trad. J. Velarde. Pentalfa, 1981.

primitivos de Peano son:

0 = cero
N = número
+ = sucesor

En otra, en cambio:

0 = uno
N = miembro de la serie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ...
+ = la mitad de

De hecho, Gergonne adelanta esta idea esencial del formalismo a través de su "principio de dualidad", expuesto también, en los *Annales*[16] según el cual un teorema puede ser transformado en otro con sólo interpretar sus términos de manera diferente. Ateniéndose a dicho principio coloca Gergonne en dos columnas, puestos en correspondencia, 1) los teoremas obtenidos en la geometría del plano, interpretando los puntos como líneas rectas y 2) los teoremas obtenidos en la geometría de los sólidos, interpretando las líneas rectas como planos.

[16] "Considerations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue", en *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1826).

BIBLIOGRAFIA

A) Textos:

Bernoulli, Santiago y Juan, *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici*. Basilea, 1685. Reimpr. en Jacobi Bernoulli. *Opera*, Ginebra, 1744, pp. 211-224.

Ploucquet, Gottfried (1716-1790), *Methodus tam demonstrandi directe omnes syllogismorum species, quam vitia formae detegendi ope unius regulae*. Tubinga, 1763. Y *Methodus calculandi in logicis praemissa commentatione de arte characteristica*. Francfurt, 1763. *Fundamenta philosophiae speculativae*. Tubinga, 1759, en *Sammlung der Schriften, welche den logischen Calcul Herrn Prof. Ploucquets betreffen, mit neuen Zusätzen*. Edic. de A. F. Bök, Francfurt-Leipzig, 1766. Reimpre. de A. Menne. Frommann Verlag, Stuttgart, 1970.

Holland, George Johann von (1742-1784), carta a Lambert de 24-IV-1768, en Lambert, *Deutscher Gelehrter Briefwechsel*. Ed. de J. Bernoulli. Berlín, 1782.

Lambert, Johann Heinrich (1728-1777), *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren*. Leipzig, 1764.

•*Logische und philosophische Abhandlungen*. Ed. J. Bernoulli. Berlín, 1782.

•En *Philosophische Schriften*. Ed. de H. W. Arndt. G. Olms, Hildesheim, 1965.

Euler, Leonard (1707-1783), *Lettres à une princesse d'Allemagne*. San Petersburgo, 1768-1772.

Castillon, G. Frédéric de (1747-1814) "Memoire sur un nouvel algorithme logique", en *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*

Gergonne, Joseph-Diez (1771-1859), *Essai de dialectique rationnelle*, en *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Tomo VII, Nîmes, 1816-17, pp. 189-228.

•*Essai sur la théorie des définitions, en Annales de mathématiques pures et appliquées*. Tomo IX (1818), pp. 1-35.

B) Estudios:

Barone, F., *Logica Formale e Logica Trascendentale*, 2 vols. Turín 1964-65.

Bornstein, P., *Gottfried Ploucquets Erkenntnistheorie und Metaphysik*, Diss. Erlangen, 1898.

Ciafardone, R., "Il problema della 'mathesis universalis' in Lambert", en *Pensiero*, 16 (1971), pp. 171-208.

Dürr, K., Die, Logistik Johann Heinrich Lamberts, en *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. A. Speiser*. Zurich, 1945, pp. 47-65.

Dürr, K., "Les diagrammes logiques de Leonard Euler et de John Venn", en *Actes du X^ème Congrès International de Philosophie*. Amsterdam, 1949, pp. 720 y ss.

Davemport, C. K., "The Role of Graphical Methods in the History of Logic", en *Methodos*, IV (1952), pp. 145-64.

Faris, J. A., "The Gergonne relations", en *Journal of Symbolic Logic*, XX (1955), pp. 207-231.

Thomas, I., "Eulerian Syllogistic", en *Journal of Symbolic Logic*, XXII (1957), pp. 15-16.

Vacca, G., "Sui precursori della logica matematica II, J. D. Gergonne", en *Rivista di matematica*, VI (1896-1899), pp. 183-86.

(Berlín), 53(1805), pp. 3-24.
Venn, J., *Symbolic logic*. Londres, 1881.

XI. Lógica filosófica en los siglos XVIII y XIX

1. Lógica trascendental

Immanuel Kant (1724-1804)

Los historiadores de la Lógica de tendencia formalista (Jörgensen, Kneale) no han visto con buenos ojos la intervención de Kant en el campo de la Lógica. Ciertamente la doctrina kantiana constituyó un freno para el desarrollo de la lógica formal. Pero cuando se supera el reduccionismo de la Lógica a la lógica formal, aparecen en las obras de Kant valiosas contribuciones a la ciencia que él creía ya clausurada y perfecta, pero que sigue actualmente progresando, con ayuda a veces de las indicaciones que él nos dejó.

Dentro de la Escolástica y la neoescolástica se desarrolla una concepción de la Lógica que prima el aspecto subjetivo de la materia lógica. Admitido, por acatamiento al tomismo[1], que la Lógica tiene como objeto *el ente de la razón*, hay toda una serie de escoláticos (generalmente los jesuitas: Suárez, los Conimbricenses y luego Urráburu y Lossada) en los que se acentúa más lo de *razón* que lo de *ente*. El ente cobra significación cuando se determina como *de razón*. Es la razón la que instituye estos entes en sus propios actos. El objeto de la Lógica son los actos artificiosos del intelecto, tales como la relación de género, de especie, de sujeto, de término medio, etc. Y ese objeto es algo real e indistinto de los propios actos del intelecto[2]. Y admitida también la definición tomista de la Lógica como "ars directiva ad verum attingendum"[3], los suaristas entienden esa dirección como un orden mental, orden que es algo real, una relación trascendental sita en los actos mismo y en los conceptos; y en esa relación trascendental consiste la verdad lógica. El orden y la conexión no proceden de los objetos, sino de los actos de la razón. Y la Lógica, que tiene por objeto ese orden y esas conexiones, se convierte así en una ciencia pura, abstracta, formal, sin relación con los objetos del conocimiento. Esta orientación de la Lógica quedó cortada en la Epoca Moderna por las concepciones cartesiana y empirista que asignan a la Lógica una función práctica: instrumento de la ciencia, pero no ciencia independiente. Es Kant quien vuelve a tratar a la Lógica como ciencia pura, aislada de la Psicología, del método y del objeto del conocimiento: "Si hacemos abstracción de todo aquel conocimiento que no podemos adquirir más que con ocasión de los objetos y sobre los que sólo reflexionamos con el uso del entendimiento en general, descubrimos entonces esas reglas absolutamente necesarias bajo todos los aspectos y sin relación alguna a los objetos particulares del pensamiento, porque sin esas reglas no habría pensamiento. Dichas reglas pueden, pues, ser consideradas *a priori*, es decir, independientemente de toda experiencia, porque contienen, simplemente, sin distinción de objetos, las condiciones del uso del entendimiento en general, sea puro o experimental. De ahí se sigue que estas reglas generales y necesarias del pensamiento sólo pueden concernir a la forma y de ningún modo a la materia"[4].

Estas reglas constituyen el objeto de la Lógica *general* (o elemental = *allgemeine Logik*, término éste que utiliza Kant para distinguir la lógica formal de la lógica *trascendental*). Divide, luego, la Lógica general en *pura* y *aplicada*, según que prescinda o tenga en

[1] Sto. Tomás, *In Metaph.* IV, lect. 4.
[2] Urráburu, J. J., *Institutiones philosophicae*, I: *Lógica*. Valladolid, 1890, nº 1134.

[3] Sto. Tomás, *In Analyt. Post*, Lib. 1, lect. 1.
[4] *Logik*, en *Werke*, VIII, p. 334.

cuenta las condiciones empíricas subjetivas en las que el entendimiento se ejercita, (condiciones éstas propias de la Psicología: hábitos, prejucios, imaginación, etc.). La lógica general pura es "una ciencia racional, no según la materia, sino según la pura forma; una ciencia *a priori* de las leyes necesarias del pensamiento, no con respecto a objetos particulares, sino a todos los objetos en general; por lo tanto, una ciencia del recto uso del entendimiento y de la razón, pero no desde un punto de vista subjetivo, esto es, cómo piensa el entendimiento, sino desde un punto de vista objetivo, esto es, según principios *a priori:* cómo debe pensar"[5].

En la lógica general pura distingue Kant una parte *dogmática:* "doctrina de los elementos" *(Elementarlehre)* y una parte *técnica:* "doctrina del método" *(Methodenlehre)*. Esta última parte es más bien un arte que una ciencia; es una "técnica de las ciencias en general", por lo que debe tratar "de la forma de una ciencia *in genere* o del modo de unir lo múltiple del conocimiento en una ciencia"[6]. La parte *dogmática* o *doctrina de los elementos* corresponde a la doctrina clásica sobre el concepto, juicio y razonamiento, y recibe el nombre de *Analítica*. Esta es para Kant la parte de la lógica general que nos presenta toda la obra formal del entendimiento y de la razón y fija los principios necesarios del pensamiento. La *Analítica* es el efectivo *canon* del entendimiento y de la razón, si bien algunos han caído en la tentación de usarla como *organon* para, ilusoriamente, sacar afirmaciones objetivas, cometiendo, así, un verdadero abuso. Tomada la lógica general por *organon* se convierte en *Dialéctica* o *lógica de la apariencia.*

La *Analítica* es, pues, para Kant la lógica formal, general, capaz de formular las leyes universales y necesarias de nuestro pensamiento, de manera *a priori*, independientemente del uso natural *in concreto* del entendimiento y de la razón. Y a ella se refiere el famoso inicio del prefacio a la 2ª edición de la *Crítica de la Razón Pura*, donde la Lógica es presentada como ciencia completa y perfecta:

> "Que la Lógica ha entrado en esta segura vía desde los tiempos más antiguos lo prueba el que desde Aristóteles no ha tenido que retroceder un solo paso, a no ser que se considere que ha habido perfección al despojarla de algunas sutilezas inútiles, o al darle una claridad más acabada en la exposición, cosas que más pertenecen a la elegancia que a la seguridad de la ciencia. Es también digno de atención que tampoco haya podido dar, hasta ahora, ningún paso hacia adelante, y que, según toda apariencia, parece ya cerrada y acabada... Los límites de la Lógica están claramente determinados, al ser una ciencia que sólo expone y demuestra rigurosamente las reglas formales de todo pensar"[7].

Finalmente, Kant sigue convencido (incluso en el período crítico) de que la lógica formal es la explicitación de las leyes naturales del pensamiento. Así tenemos en la *Dissertatio*, de 1770, que los conceptos puros del entendimiento (la posibilidad, la necesidad, la causa, la sustancia, etc., es decir, las futuras categorías) no provienen de los sentidos; hay que buscarlos "en la naturaleza misma del entendimiento puro, no como conceptos *innatos*, sino como abstraídos de las leyes connaturales de la mente (habida cuenta de su ejercicio con ocasión de la experiencia) y son, por lo mismo, *adquiridos*"[8]. Y este presupuesto de que las reglas o leyes de la lógica formal como leyes connaturales de la mente persiste en el período crítico, reconocible en la *Einleintung* de la *Logik* de 1800 y en algunas secciones de la *Crítica de la Razón Pura*. Por ejemplo, la *Logik* comienza así[9]:

> "Todo en la naturaleza animada, como en la inanimada, se rige por reglas, aunque estas reglas no son siempre de nosotros conocidas... El Universo entero no es propiamente más que un vasto conjunto de fenómenos sujetos a determinadas reglas; de suerte que nada, absolutamente nada, existe sin su fundamento. Por consecuencia de esto, no existen, hablando con propiedad, verdaderas irregularidades; cuando nosotros creemos encontrarlas, no es sino que las leyes que rigen los fenómenos que observamos nos son desconocidas".

Las leyes (connaturales a la mente) de la Lógica obedecen, al igual que la legalidad entera de la naturaleza, a un principio de simplicidad. De ahí que la Lógica, como hace la Física, debe procurar reducir el número de *principios*. Y en esa dirección va *Die fals-*

[5] *Ibidem*, p. 336. Y también *Crítica de la R. Pura*, en *Werke*, III, p. 81: La lógica general (formal) es "un canon del entendimiento y de la razón, mas sólo respecto de aquello que es formal de su uso, cualquiera que sea su contenido (empírico o trascendental)".
[6] *Logik*, ed. cit., p. 443.

[7] Trad. cast. cit., p. 127-28.
[8] *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis dissertatio*, en *Werke*, II, 1770. Traduc. R. Ceñal. C. S. I. C., Madrid, 1961, p. 89.
[9] En *Werke*, VIII, p. 332-33.

che Spitzfindigkeit der vier syllogistichen Figuren (1762, *Werke*, II, pp. 49 y ss.). En el intento de simplificación de la maquinaria silogística parte Kant, como elemento básico, del juicio, que analiza como sigue: "Juzgar significa comparar una cosa como nota *(Merkmal)* con otra cosa. Esta última es el sujeto; la nota, el predicado. La comparación viene expresada por el signo de cópula *es* o *son*, el cual, si se emplea solo, indica el predicado como una nota del sujeto, en tanto que unido al signo de la negación señala al predicado como nota contrapuesta al sujeto. En el primer caso el juicio es afirmativo; en el segundo es negativo"[10].

Sobre esta base parcial -restricción de las formas de juicio a una única: la del categórico (la única relación es la de sujeto-predicado), y convencimiento de que esta forma proposicional está arraigada en la lógica *natural*-- emprende Kant sus especulaciones sobre la silogística tradicional. Dado que la única forma proposicional es considerada desde el punto de vista de la *comprehensión*, el silogismo resultará ser "la comparación de una nota con una cosa mediante una nota intermedia"[11]. De modo que si, en la silogística escolástica, al ser entendida la proposición en extensión, el principio general del silogismo era el *dictum de omni et de nullo*, ahora, al ser entendida la proposición en comprehensión, los dos principios supremos de todos los silogismos, afirmativos y negativos, son: *Nota notae est etiam nota rei ipsius* y *Repugnans notae repugnat rei ipsi*.

Como indica el título de esta obra, Kant sostiene que sólo los silogismos de la primera figura son puros -concluyentes en virtud de uno de los principios citados-, en tanto que los silogismos de las figuras segunda y tercera son *híbridos* -requieren para concluir que una de las premisas o ambas sean transformadas mediante una inferencia inmediata. Sólo la primera figura constituye la forma natural de silogizar. Y si bien es posible concluir de manera exacta en las demás, sin embargo, "está fuera de duda que, salvo la primera, las demás determinan la consecuencia sólo a través de un rodeo, insertando inferencias inmediatas, y que la misma conclusión del mismo término medio se seguiría pura y sin mezcolanza de la primera figura. La construcción artificiosa de la silogística aparece, así, como una *sutileza* inútil y, además, *falsa*, puesto que "el objeto de la lógica es, no el de complicar, sino el de resolver, el de enseñar lo que sea, no veladamente, sino de manera evidente"[12].

La pretensión de erigir la 1ª figura en la perfecta, natural y origen de las demás no era nueva, y no fue de interés para el progreso de la Lógica. Lo que interesa resaltar de esta obra es el puesto central que Kant concede al acto de juzgar, adelantando, así, una de las tesis fundamentales del período crítico: el juicio como elemento generador de los restantes elementos lógicos (el concepto y el silogismo), aunque entendido siempre éste en la forma categórica. Porque, si bien es cierto que Kant en el período crítico distingue tres tipos de juicios irreductibles entre sí: *categóricos*, *hipotéticos* y *disyuntivos* y esta tripartición aparece, en la *Crítica de la Razón Pura*, en una de las cuatro clases en que vienen agrupados todos los posibles juicios bajo el título de la *relación:*

Tabla de juicios[13]

1) **Por la cantidad**	2) **Por la cualidad**
Generales	Afirmativos
Particulares	Negativos
Singulares	Indefinidos
3) **Por la relación**	4) **Por la modalidad**
Categóricos	Problemáticos
Hipotéticos	Asertóricos
Disyuntivos	Apodícticos

Sin embargo, esta clasificación, confusa en varios puntos, resulta forzada y sin fundamento crítico. Su objetivo era obtener una clasificación tal que permitiese poner en correspondencia cada clase de juicios con una determinada función intelectual (categoría) y sirviese de fundamento a la deducción metafísica (lógica trascendental) de las categorías[14].

Tabla de categorías

1) **de cantidad**	2) **de cualidad**
Unidad	Realidad
Pluralidad	Negación
Totalidad	Limitación

[10] *Werke*, II, p. 51.
[11] *Ibidem*, p. 52.
[12] *Ibidem*, p. 60.
[13] *Kritik* B, *Werke*, III, p. 95.
[14] En la *Crítica de la Razón Pura. Introducción*, se distingue entre *lógica general* o *formal:* la que hace abstracción de todo conte-

3) de relación	4) de modalidad
Inherencia y subsistencia *(Substantia et accidens)*	Posibilidad-imposibilidad
Causalidad y dependencia (causa y efecto)	Existencia-no-existencia
Comunidad (Reciprocidad entre agente y paciente)	Necesidad-contingencia

También en otros pasajes de la *Crítica*[15] muestra Kant no estar satisfecho con la definición unilateral del juicio como la representación de una relación entre conceptos; definición aplicable solamente a los juicios categóricos pero no a los hipotéticos y disyuntivos. Pero, no obstante, Kant se deja arrastrar por el prejuicio tradicional de que la forma *natural* y absoluta del juicio es la del juicio categórico. Y, así, escribe en la Logik: "En los juicios categóricos sujeto y predicado constituyen la materia; la forma por la que es expresada la relación (la concordancia o la oposición) entre sujeto y predicado se llama cópula. Los juicios categóricos constituyen empero la materia de los restantes juicios"[16].

Y precisamente sobre la forma del juicio categórica establece Kant[17], en el período crítico, la innovación en Lógica que él considera más importante: la distinción entre juicios *analíticos* y *sintéticos a priori*. Los primeros caracterizados por el hecho de que la noción del predicado está contenida en la del sujeto; la conexión sujeto-predicado viene establecida en virtud de su identidad, por lo que son meramente explicativos. Por ejemplo: "todos los cuerpos son extensos".

Los segundos se caracterizan por el hecho de que la noción del predicado contiene más que la noción del sujeto; la conexión sujeto-predicado no es de identidad, y son extensivos del conocimiento. Por ejemplo: "Todos los cuerpos son pesados".

La distinción se basa, pues, en el hecho de que se dé, o no, la relación de identidad entre sujeto y predicado. Pero este criterio es sostenible sólo en el caso de que todos los juicios sean reducibles al esquema de la forma sujeto-predicado. El desarrollo de la Lógica, sin embargo, tirará por vías (lógica de proposiciones y lógica de relaciones) en las que las relaciones entre elementos lógicos no quedan en el estrecho sendero de la relación sujeto-predicado. Y los conceptos *analítico* y *sintético* cobran otro sentido, especialmente con Frege (ver luego), quien los redefine dentro de, y con relación a, un sistema axiomático.

Mayor interés ha supuesto la distinción kantiana en la teoría de la Ciencia, en concreto en la caracterización de los juicios matemáticos como sintéticos *a priori*.

Los juicios *a priori* son aquéllos cuya verdad puede ser conocida independientemente de la experiencia y poseen las características de necesidad y universalidad, por ej., "Todo cambio exige una causa". Los juicios *a posteriori*, en cambio se refieren a la experiencia, la cual no da nunca juicios con carácter de necesidad ni tampoco con una universalidad estricta, sino con una generalidad supuesta. Por ej. "La tierra es redonda".

Kant combina esta división de los juicios con la anteriormente mencionada: analíticos/sintéticos, y de esta combinación resulta que los juicios analíticos *a posteriori* son imposibles. Los juicios analíticos *a priori* y los sintéticos *a posteriori* no plantean mayor problema. Resta la clase de los juicios sintéticos *a priori*, a los que Kant presta mayor atención, ya que de ellos depende el progreso de la ciencia. La Matemática, dice, constituye un ejemplo claro de una razón pura que logra desenvolverse en sí misma sin el auxilio de la experiencia. Kant entiende el método matemático como construcción, esto es, como la introducción de elementos particulares (los números) en cuanto distintos de los conceptos generales; por eso reclama para esta construcción el carácter de sintética. Los juicios aritméticos ("7 + 5 = 12", por ejemplo) son sintéticos y son *a priori;* los conceptos que los componen nos vienen dados en la intuición, y por lo tanto *a priori:* "todo conocimiento matemático tiene esta peculiaridad: debe, primero, exhibir sus conceptos *en la intuición* y hacerlo así *a priori;* en una intuición que no es empírica, sino pura; sin esto las matemáticas no pueden dar un paso"[18].

Muchas han sido las críticas dirigidas contra Kant por caracterizar a las proposiciones matemáticas como analíticas; destacan las de Frege (ver luego) y las de los neo-empiristas. Así, por ejemplo, Ayer dice[19] que las proposiciones verdaderas de la Aritmética son sin excepción analíticas: "la expresión '7 + 5' es sinónima de '12', de igual modo que 'doctor en ojos' es sinónima de 'oculista'".

En la *Introducción* a la *Crítica de la Razón Pura* distingue Kant entre *Lógica general* o *formal:* la que, haciendo abstracción de todo contenido de conocimien-

[15] Confert *Kritik* B, *Werke* III, p. 120.

[16] *Werke*, VIII, p. 411.
[17] *Werke*, VI, p. 65.
[18] *Prolegomena*, § 7.
[19] *Lenguaje, verdad y Lógica*. Trad. cast. M. Suárez. Edic. Martínez Roca, Barcelona, 1971, p. 97

to, se atiene exclusivamente a la forma del pensamiento, y *lógica trascendental*, que tiene por objeto determinar el origen, extensión y valor de los conocimientos por los que pensamos objetos *a priori*. Defiende, luego, la autonomía de la lógica general (o formal), pero no clarifica las relaciones entre la lógica general y la trascendental: establece entre ambas un paralelismo (división de ambas en *Analítica* y *Dialéctica;* aplicación en las dos 1as *Críticas* del esquema de la bipartición de la Lógica general en "doctrina de los elementos" y "doctrina del método") y adecúa la deducción metafísica de las categorías al sistema de juicios fijado de manera exhaustiva en la lógica general, y a través de las categorías sigue el sistema de los juicios, marcando las directrices para la exposición sistemática de todos los principios sintéticos del entendimiento puro. Hay una efectiva confluencia de las estructuras formales con las trascendentales. La determinación de unas sobre otras parece ser circular; los exégetas se dividen: leen en Kant la supremacía y el ordenamiento de la lógica trascendental sobre la formal M. Stechelmercher[20] y los neokantianos de la escuela de Marburgo: H. Cohen[21], W. Kinkel[22] y E. Cassirer[23], en tanto que K. Reich[24], H. J. Paton[25] y L. Scaravelli[26] consideran que la lógica trascendental no absorbe a, sino que es, antes bien, una parte de, la lógica formal.

Johann Gottlieb Fichte (1762-1814)

De esa falta de clarificación en la obra Kantiana arranca el idealismo alemán, negando la separación de forma y contenido en el conocimiento y afirmando, en consecuencia, la unicidad de la lógica, siendo ésta la lógica trascendental. Así, Fichte hace de la *Wissenschaftslehre* el fundamento último a partir del cual debe ser demostrado todo principio lógico y la lógica entera: "la doctrina de la ciencia no puede ser demostrada a partir de la lógica, y no se puede proponer como válido ningún principio lógico, ni siquiera el de contradicción: al revés, todo principio lógico y la lógica entera deben ser demostrados partiendo de la *Wissenschaftslehre*. Se debe mostrar que las formas puestas por la lógica son formas reales de un cierto contenido de la doctrina de la ciencia"[27].

Fichte insiste una y otra vez en sus obras sobre la relación de dependencia de la lógica (formal) respecto de la *lógica trascendental* o *doctrina de la ciencia* o *filosofía*. Y desde este presupuesto explica el principio (lógico) de identidad así: *"A = A* es sin duda un auténtico principio lógico, cuyo significado es: si *A* es puesto, entonces *A* es puesto. Surgen de aquí dos problemas: *¿A* es, por eso, puesto? y ¿cómo y por qué *A* es puesto, si es puesto?, o sea, ¿cómo se conectan el *si* y el *entonces?"*. Sólo en el ámbito de la *Wissenschaftslehre* cabe respuesta a estos problemas y la justificación del principio: "Si en la frase susodicha A significa Yo, y tiene por ello su contenido determinado, la frase significa ante todo: "Yo soy Yo", o sea, si Yo soy puesto, entonces soy puesto. Mas, dado que el sujeto de la proposición es el sujeto absoluto, el sujeto simplemente, en este último caso con la forma de la proposición es puesto también su contenido interno: Yo soy puesto, porque yo me he puesto. Yo soy porque yo soy. La lógica dice, pues: Si *A* es, es *A;* la *Wissenschaftslehre* dice: Porque *A* (este determinado *A* = Yo) es, es *A*. Y así quedaría resuelto el problema: *¿*Es puesto *A* (este determinado *A)?:* Ese es puesto, porque es puesto. Es incondicionada y simplemente puesto"[28].

La doctrina de la ciencia pone como principio primero y absoluto de toda ciencia y de todo conocimiento el Yo puro y absoluto subalternando a él bajo las formas *A = A*, y *-A = -A* los principios de identidad y de contradicción reguladores de la lógica.

Friedrich Wilhelm Joseph Schelling (1775-1854)

En su *System des transzendentalen Idealismus* apoya la tesis de Fichte en lo referente a la subordinación de la Lógica a la Filosofía. El principio supremo del saber -incondicionado y objetivo, idéntico y al

[20] *Die formale Logik Knat's in ihren Beziehungen zur transcendentalen*. Breslau, 1879.
[21] *Kant's Theorie der Erfanrung*. Berlín, 1885.
[22] Introduc. a la *Logik* de Kant. edic. de la *Philosophische Bibliothek*. Leipzig, 1904.
[23] *Kant's Leben und Lehre*. Berlín, 1918.
[24] *Die Vollständigkeit der Kantischen Urteilstafel*. 2ª edic. Berlín, 1948.
[25] *Kant's metaphysic of experience*. vol I, Londres, 1951.
[26] *Lezioni sulla critica della ragion pura (deduzione metafisica e deduzione*

[27] *Wissenschaftslehre*, en *Werke*, ed. cit., p. 197-98.
[28] *Ibidem*, p. 199.

mismo tiempo sintético- puede ser hallado exclusivamente en la autoconciencia, donde hay identidad entre representado y representante: "La proposición $A = A$ presupone un pensamiento que devenga inmediatamente objeto para sí mismo; pero un acto de pensamiento que devenga él mismo objeto es posible sólo en la autoconciencia"[29]. Y "el principio supremo formal $A = A$ es posible sólo mediante el acto que está expresado en la proposición Yo = Yo -mediante el acto del pensamiento idéntico consigo mismo y haciéndose a sí mismo objeto. Lejos, pues, de estar la proposición Yo = Yo bajo el principio de identidad, es más bien éste el que está condicionado por aquélla"[30].

Schelling reprocha a Kant el haber concedido la independencia a la lógica formal. Esta sólo pone las leyes del uso del entendimiento en sus diversas funciones (juicios, divisiones, silogismos), pero de modo puramente empírico, sin demostrar su necesidad. Y si bien, en la *Crítica de la Razón Pura*, tanto las distinciones lógico-formales del pensamiento como las distinciones materiales de los conceptos metafísicos derivan de una misma fuente, sin embargo, Kant no llega a determinar cuál es esa fuente originaria. Y cuando Kant deduce las categorías de las funciones formales del intelecto (en su uso lógico) -funciones que ellas mismas exigen una deducción superior-, está repitiendo el error de la metáfisica wolfiana. Schelling y Fichte pretenden enmendar a Kant en este punto: la lógica formal, como cualquier otra ciencia, queda subordinada a la doctrina de la ciencia o lógica trascendental.

2. El psicologismo

2.1. Antecedentes

Característica esencial del psicologismo es entender la Lógica como descripción de la estructura de los actos de la mente (concebir, juzgar y razonar). Los esquemas lógicos son o están presentes en los procesos psicológicos; por eso, lo que encontramos siempre como objeto de la Lógica son actividades o productos psíquicos.

El psicologismo hunde sus raíces en ciertas definiciones de Aristóteles concernientes a los silogismos perfectos como enunciados indemostrables y autoevidentes. Y los enunciados indemostrables son denominados: o *principios* o *axiomas*. Los axiomas son para Aristóteles, según esto, verdades inmediatas, indemostrables y autoevidentes[31].

Otro antecedente del psicologismo es el epicureismo: La *Canónica* tiene como objetivo fijar las reglas que permiten distinguir lo verdadero de lo falso. Y existen tres criterios de verdad: Las sensaciones (αἰσθήσεις), las anticipaciones (προλήψεις) y las afecciones (πάθη)[32]. Mediante las afecciones concocemos el dolor y el placer que las cosas nos causan. Con las sensaciones y las anticipaciones construimos nuestro conocimiento especulativo. La sensación es evidente por sí misma, y como tal se impone. Y la idea general no es más que la repetición de las mismas sensaciones; y esa repetición, que sobrevive en la memoria, permite la previsión, proyectando el pasado en el porvenir, haciendo de la memoria una anticipación. La anticipación no es más que la imagen general de lo sensible en el alma. Estas ideas de Epicuro sobre la Lógica son retomadas y defendidas en la Epoca Moderna por P. Gassendi (1592-1655), quien en su *Syntagma Philosophicum*, 1658 (Reedic. Van Gorcum, Assen, 1981) define la lógica como "la ciencia del correcto pensar", dividida en cuatro partes, correspondientes a las cuatro operaciones mentales: 1) *bene imaginari;* 2) *bene proponere;* 3) *bene colligere;* y 4) *bene ordinari*. Y retoma los criterios de Epicuro para la distinción entre lo verdadero y lo falso. Tales criterios son las sensaciones y las anticipaciones. Las sensaciones se imponen por su evidencia, y las anticipaciones constituyen una especie de resultado de una acumulación de sensaciones semejantes.

En la Edad Media y Escolástica posterior, el psicologismo hace su aparición en algunos sectores[33] (Suárez y los conimbricenses, y después Lossada y Urráburu) que acatan como esfera de la Lógica los actos y conceptos formales del intelecto, extendiendo las connotaciones subjetivistas al silogismo, entendido como *syllogismus faciens scire*, y a la ciencia como *habitus conclusionis*. También la distinción entre *intentio prima* e *intentio secunda* tiene una base psico-

[29] *System des transzedentalem Idealismus*, en *Werke*, ed. cit., vol II, p. 365.
[30] *Ibidem*, p. 373.
[31] *Segundos Analíticos*, I, 3, 72 B, 20-25.
[32] Diógenes Laercio, *Vida de los filósofos*... X, 33.
[33]

"Había un sector del pensamiento escolástico, dice L. E. Palacios (*El juicio y el ingenio y otros ensayos*. Edit. Prensa Española, Madrid, 1967, p. 150-51), que, pretendiendo apoyarse en Suárez, afirmaba que el objeto de la Lógica era algo real, y en última instancia, psíquico, y esta doctrina constituía una anticipación del psicologismo. Mientras que del otro lado, Juan de Sto. Tomás sostenía la índole ideal del objeto de la lógica..."

lógica. Proviene de los árabes (Avicena en su *Lógica* escribe: subiectum vero logicae sunt intentiones intellectus...[34]; definición ésta admitida luego por Alberto Magno y otros lógicos occidentales. La Lógica tiene por objeto las *secundae intentiones*, y la *intentio secunda* es definida por Pseudo-Escoto[35] como una operación del intelecto mediante la cual percibe lo universal en las cosas. Con respecto a la primera operación del intelecto (concebir), en ciertas corrientes escolásticas se confundió lo expresado por el pensamiento (el concepto) con el pensamiento mismo. El concepto, en esta perspectiva, es una acto mental; y así Ockham lo define[36] como una "intentio seu passio animae".

Por lo que respecta a la segunda operación del intelecto, se introduce la noción del *juicio* como sustituta o al lado de la de *proposición*, pero, en todo caso, asociada al plano del espíritu. El juicio es "actio intellectus, qua componit vel dividit affirmando vel negando". Este carácter subjetivo del juicio queda señalado incluso por los tomistas que siguen la dirección *realista:* Juan de Sto. Tomás resume así la distinción entre juicio (operación subjetiva) y proposición (contenido objetivo): "Iudicium est assensus intellectus circa aliquid quod est capax talis iudicii; sed solum est capax talis iudicii veritas complexa significata per enuntiationem... ergo aliud est enuntiatio, aliud iudicium"[37].

Mas estas distinciones de Juan de Sto. Tomás (y de otros escolásticos anteriores a él) entre: a) la *enunciación* (un tipo especial de oración correspondiente al λόγος αποφαντικός aristotélico); b) el "juicio" (operación del intelecto); y c) el "complexe significabile" (el significado de la enunciación; noción introducida en el s. XIV por G. Rimini, y que podría ponerse en correspondencia con el λεκτόν estoico) tienden a desaparecer en los lógicos post-escolásticos, que distinguen exclusivamente dos planos: el mental (o subjetivo) y el lingüístico. Al primero pertenecen los conceptos (o ideas), los juicios y los raciocinios; al segundo, los términos, las proposiciones y los silogismos. Así, los lógicos de Port-Royal identifiacn la proposición con el acto de juzgar:

> "Después de haber concebido las cosas mediante nuestras ideas, comparamos estas ideas conjuntamente; y, reconociendo que algunas se acomodan entre sí, y otras no, las enlazamos o las separamos: esto es lo que se denomina *afirmar* o *negar* y generalmente juzgar. Este juicio se denomina también proposición"[38].

El término *psicologismo* fue usado por primera vez en Alemania para designar las doctrinas de Fries y Beneke, quienes, oponiéndose al idealismo post-kantiano, pretendían despojar a la Lógica de toda metafísica para dejarla desnuda ante el sol de la experiencia (psicológica). En sus obras, Fries critica el apriorismo trascendental kantiano, aunque manteniendo la forma *a priori*, pero entendida en sentido psicológico. El conocimiento es una operación psíquica. El entendimiento trabaja con intuiciones sensibles, a través del poder de la imaginación y la reflexión, y posee en sí la potencia necesaria para el conocimiento completo y para la adquisición de la verdad. Las leyes de la lógica no son leyes de las cosas, sino de la *pensabilidad de las cosas*.

Beneke critica, así mismo, el apriorismo de las formas del conocimiento. La Lógica es un arte de pensar *(eine Kunstlehre des Denkes)* que, como las demás ciencias, descansa en la Psicología, ya que ésta es la ciencia fundamental que explica las restantes. La Lógica, como parte específica de la Psicología, trata con el pensamiento, haciendo un análisis genético desde los elementos más simples (los conceptos) hasta los más complejos (los razonamientos), pero manteniéndose siempre en la esfera de la Psicología. El psicologismo en Lógica fue propagado en Alemania por Ch. Sigwart, W. Wundt, B. Erdmann, H. Maier, Th. Lipps, etc. Todos ellos hacen de las categorías lógicas productos psicológicos; y de la Lógica, una rama de la Psicología. Así, por ejemplo, escribe Lipps[39]: "La lógica o no es nada o es psicología"; "este hecho precisamente de que la lógica sea una disciplina particular de la psicología distingue una de otra con suficiente claridad"; y "la lógica es una disciplina psicológica, tan cierto como que el conocimiento sólo se da en la psique, y el pensamiento, que llega en él a su plenitud, es un proceso psíquico".

La oposición de los psicologistas alemanes al idealismo trascendental post-kantiano y la pretensión de despojar a la Lógica de adherencias metafísicas y hacer de ella una disciplina empírica (aunque psicológica) van a ser también las directrices para los empiristas ingleses, comandados por Jh. Stuart Mill. "La lógica,

---

[34] En la edic. de F. Zabeeh, *Avicenna's treatise on logic*. Nijholf. La Haya, 1971.
[35] *Quaestiones super Analytica Posteriora*, en *D. Scotus Opera Omnia*, edic. Vivés, Paris, 1891-95, vol. II, p. 82.
[36] *Summa logicae*, Pars. I, § 1.
[37] *Ars logica*. Edic. Reiser, Marietti, 1930, p. 145.

[38] A. Aranuld - P. Nicole, *La logique*... edic. cit., Parte II, cap. 3, principio.
[39] *Pincipien der Logik*. Hamburgo, 1893, § 3.

escribe Mill[40], no es una ciencia distinta de la psicología y coordinada con ésta. En cuanto ciencia, es una parte o rama de la psicología, que se distingue de ésta a la vez como la parte del todo y como el arte de la ciencia. La lógica debe sus fundamentos teoréticos íntegramente a la psicología, y encierra en sí tanto de esta ciencia como es necesario para fundar las reglas del arte".

2.2. John Stuart Mill (1806-1873)

Mill pretende que su *System of Logic* lo sea de *hechos* de experiencia, cosa que la antigua lógica había despreciado, buscando, según consigna de Aristóteles, la ciencia en lo universal, y despreciando los hechos particulares por pertenecer al mundo corruptible, donde los seres llegan a ser y dejan de ser y donde, por consiguiente, rigen las leyes de lo contingente, no de lo necesario. Mill, por el contrario, sostendrá que no hay ciencia más que de lo particular, porque sólo lo particular es lo real: "Todo lo que se puede observar son casos individuales. Y de ellos deben ser derivadas todas las verdades generales... porque una verdad general no es otra cosa que un agregado de verdades particulares, una expresión sintética por medio de la cual viene afirmado o negado al mismo tiempo un número indefinido de hechos individuales"[41]. Ahora bien, los hechos a los que aquí se refiere Mill no son realidades exteriores al espíritu, no son cosas en sí; son sólo *sensaciones* o *imágenes* producidas en nosotros por el contacto con las cosas; son *estados de conciencia;* y, puesto que estos estados de conciencia son inmediatos y primeros, son dados y concretos, podemos tomarlos por las cosas mismas y, sobre todo, distinguirlos como elementos primitivos y básicos de las ulteriores creaciones o combinaciones del espíritu.

El concepto

El principio de la Lógica no son, pues, para Mill ni las *ideas* o conceptos entendidas como entidades distintas de los fenómenos al modo *realista*, ni las *palabras*, como defienden los nominalistas y luego Locke y Condillac. Por eso, en Lógica hay que renunciar: a) a las exageraciones de los nominalistas que llegan a atribuir poderes misteriosos a los nombres ("Los nombres piensan por nosotros", dice Condillac); b) y también a expresiones que implican la realidad de la idea (o concepto) como cosa distinta. No es correcto, pues, hablar de la *comprehensión* o *extensión* de una idea. Una idea no comprehende nada, ni se extiende a nada, puesto que no es nada; debería emplearse en su lugar la distinción *connotación/denotación* de los términos: a) la *connotación* expresa que un sujeto posee ciertos atributos; y b) la *denotación* designa los sujetos que poseen los mismos atributos, y "la simplificación de los términos está, no en aquello que denotan, sino en aquello que connotan"[42]. El verdadero objeto del pensamiento no es el hombre o el caballo en general, sino un hombre o un caballo en concreto; sólo la representación de este hombre o de este caballo ofrece a mi espíritu un gran número de caracteres: algunos semejantes a los que poseen otros hombres; otros no. Y por efecto de hábitos adquiridos a lo largo de un gran número de experiencias, el espíritu es capaz de fijar su atención únicamente sobre los primeros y dejar los otros en la sombra. "En consecuencia, propiamente hablando, no tenemos conceptos generales: no tenemos más que ideas complejas de objetos concretos"[43]. "La sola realidad que hay en el concepto es que, de una u otra forma, nos hacemos aptos y quedamos preparados, no solamente una vez y por accidente, sino en el curso ordinario de nuestros pensamientos, para prestar una atención especial y más o menos exclusiva a ciertas partes de la presentación de los sentidos o de la representación de la imaginación de la que tenemos conciencia"[44]. La idea (o concepto) general no es más que la unidad de un grupo de imágenes o de sensaciones. Esa unidad está representada en el espíritu por un hábito. Este hábito está en nosotros, y el espíritu actúa bajo su influencia sin conocerlo.

El juicio (o proposición)

Supuesta la doctrina anterior sobre las ideas o conceptos no cabe decir, ahora, que juzgar es establecer una relación de inclusión entre cosas o ideas. Es absurdo interpretar las proposiciones en extensión: "Todos los hombres son mortales" no puede querer decir que la especie hombre forma parte del género mortal, sino que el atributo mortal forma parte de aquellos que poseen los hombres. "Se puede, ciertamente, escribir las proposiciones y los razonamientos en extensión, pero se

[40] *An examination of sir W. Hamilton's philosophy*, ed. cit., p. 461.

[41] *A System of Logic...*, II, 3, 3.
[42] *A System of Logic...* ed. cit., I, 2,5.
[43] *An examination of sir W. Hamilton's Phibsophy*, ed. cit., p. 371.
[44] *Ibidem*, p. 378.

siempre así. Todas nuestras primeras inferencias son de esta naturaleza"[53].

Con esta reintrepretación, la proposición general (premisa mayor) se convierte en una afirmación (o conjunto de afirmaciones) particulares, "es un simple *memorandum*, un registro, que resume los diversos casos particulares observados por nosotros pero sin añadir nada"[54]. El caso particular (la conclusión) no se infiere de la proposición general, sino de la experiencia, de los hechos observados en la experiencia. Estos son los garantes de ésta y de todo tipo de inferencia. Por eso, es lo mismo decir después de los casos particulares observados: "el duque de Wellington es mortal" que "todos los hombres son mortales". Las dos afirmaciones son contemporáneas e iguales. La una no es hija de la otra, son hermanas: "si de la observación y de la experiencia se puede concluir un hecho nuevo, se puede por lo mismo concluir un número infinito de esos mismos hechos"[55].

En resumen, la proposición general no resulta necesaria, bajo ningún concepto, para la prueba. El razonamiento se reduce siempre a una inferencia de lo particular a lo particular. Y los hechos reales observados en la experiencia son los únicos agentes de la demostración. Toda inferencia es, pues, inductiva; y el silogismo no es más que un caso particular de inducción. Por eso ocupa en el sistema de Mill un lugar secundario.

Múltiples han sido las críticas a esta crítica de Mill al silogismo. Reseñaremos, aquí, la de quien, aun compartiendo con él la crítica a la teoría tradicional del silogismo señala el *punctum dolens* de la tesis de Mill: "pero también él (Mill) mantuvo el error lógico de la teoría tradicional, aunque en una dirección contraria. La teoría tradicional dice que la mayor y la menor poseen la misma forma lógica, porque no se da cuenta de que una es no-existencial y la otra existencial; y que, por consiguiente, tienen que ser establecidas por operaciones tan diferentes como son la observación y el discurso racional. La teoría de Mill comete el mismo error, sólo que esta vez la mayor y la menor son tratadas como existenciales, de suerte que, en lugar de asimilar la forma de la menor a la de la mayor, como hace la teoría tradicional, asimila la forma de la mayor a la de la menor. Es decir, que Mill sostiene que la proposición mayor o general no es más que un compendio registrador de un número indefinido de proposiciones existenciales particulares. Pero lo que se le escapa a Mill es que las observaciones, si han de rendir material probatorio, tienen que ser dirigidas por ideas, y que estas ideas tienen que ser hechas explícitas, formuladas en proposiciones, y que tales proposiciones poseen la forma universal *si-entonces*. Cuando Mill habla de *suficiencia* de la prueba, está pensando en el número de casos particulares disponibles, y no en el principio que determina la fuerza probatoria en cualquier caso particular"[56].

3. Lógica dialéctica

3.1. Georg Wilhelm Friederich Hegel (1770-1831)

Hegel retoma las objeciones ya formuladas por sus colegas idealistas contra el carácter formal de la lógica tradicional, la cual presupone que "la materia del conocer subsiste ya en sí y por sí como un mundo acabado, fuera del pensamiento; que el pensamiento por sí mismo es vacío y que se añade como una forma extrínseca a aquella materia, se llena de ella, y solamente entonces adquiere un contenido y se convierte así en conocimiento real"[57]. Por eso, el contenido de la lógica es tan breve y está tan muerto y tan desprovisto de espíritu. Sus determinaciones sólo se relacionan entre sí de forma extrínseca, y las derivaciones, especialmente las del silogizar, "no valen mucho más que los ensayos hechos con palitos de desigual longitud, a fin de clasificarlos y unirlos según su tamaño o que el juego de los niños, en el que se intenta la recomposición de figuras previamente recortadas, juntando los recortes apropiadamente"[58].

Sólo hasta aquí llega el acuerdo de Hegel con sus colegas: Mientras que Fichte y Schelling trataban de buscar una fundamentación para la lógica formal, y consideraban que, pese a las protestas de Kant, tal fundamentación trascendental era la *Wissenschaftslehre* en cuanto desarrollo consecuente y necesario de la filosofía trascendental, Hegel, desde su idealismo absoluto, propone la superación del criticismo kantiano tachándolo de *abstracto*, y exige una reelaboración de la lógica en su totalidad.

---

[53] *Ibidem*, II, 3, 3.

[54] *Ibidem*, II, 3, 6.
[55] *Ibidem*, II, 3, 5.
[56] J. Dewey, *Logica*, Trad. E. Imaz. F. C. E., México, 1950, p. 360-61.
[57] *Ciencia de la Lógica*. Trad. cast., ed. cit., p. 42.
[58] *Ibidem*, p. 49.

Frente a la afirmación kantiana referente a la inmutabilidad de la lógica formal desde la Antigüedad clásica observa Hegel que "si desde Aristóteles en la lógica no se han efectuado modificaciones -en efecto, las modificaciones, como se ve si se observan los modernos compendios de lógica, consisten a menudo sólo en eliminaciones-, esto lleva más bien a la conclusión de que esta ciencia necesita con mayor razón una reelaboración total; pues una labor del espíritu continuada, durante 2000 años, debe haberle proporcionado una conciencia más elevada en torno a su pensamiento y a su pura esencia en sí misma"[59].

La reelaboración que Hegel propone consiste en hacer de la Lógica la "ciencia de la idea pura, esto es, de la idea en el elemento abstracto del pensamiento", de la cual se puede muy bien decir que es la ciencia del pensamiento, de sus determinaciones y leyes, advirtiendo, sin embargo, que "la idea es el pensamiento, no como algo formal, sino como la totalidad que se desarrolla en sus peculiares determinaciones y leyes, las cuales se proporciona él a sí mismo, y no ya las tiene simplemente y las encuentra en sí"[60]. Mas, como Hegel identifica idea y realidad (lógica y ontología), reivindica la metafísica como ciencia teórica, y hace una crítica a la crítica de Kant a la metafísica: Kant rechaza la metafísica porque fija como límite del entendimiento el conocimiento de lo fenoménico. El conocimiento termina en el pensamiento descriptivo y relacionante de la sucesión de los fenómenos. Fuera de la experiencia, la razón pura conduce a contradicciones y queda extraviada. Hegel, en cambio, quiere explicar todo el mundo, y no sólo los fenómenos históricos, como evolución de la Idea: todo es Idea. Y la ciencia que estudia la Idea (el Espíritu o lo Absoluto), en sus distintas manifestaciones, es la Filosofía. De ahí que la Filosofía es la ciencia de lo Absoluto. Y, por lo mismo, la Filosofía ha de ser sistemática, constituyendo un todo unitario y cerrado en sí mismo. Por eso la *Enciclopedia de las ciencias filosóficas* no se asemeja a otras enciclopedias que constituyen simple acumulación de conocimientos, ordenados, no con criterios sistemáticos, sino empíricos; por ejemplo, alfabéticamente. La *Enciclopedia* de Hegel, en cambio, queda estructurada según un criterio lógico-ontológico, de modo que sus partes no son partes yuxtapuestas, sino que cada una de ellas contiene el todo y constituye un momento necesario, un círculo que se cierra sobre sí mismo, siempre dentro del círculo total que es la Idea: "El todo preséntase, por tanto, como un círculo de círculos, cada uno de los cuales es un elemento necesario, de suerte que el sistema de los elementos peculiares a ellos constituye la Idea total, que aparece igualmente en cada uno"[61].

La Idea es todo, es la realidad; y en la realidad residen los opuestos: la diferencia, la contradicción, la privación, la posesión y la relación. También en Aristóteles la auténtica realidad, la sustancia, recibe determinaciones. Pero Aristóteles niega que los opuestos, en cualquiera de las tres primeras especies, pueden encontrarse al mismo tiempo en la misma sustancia. Para Hegel, sin embargo, los opuestos residen en el seno de la realidad (de la Idea); la negación y la afirmación (contradicción) intervienen en el desenvolvimiento de la Idea. Este desenvolvimiento, es de carácter circular y comprende (atraviesa) las siguientes fases: 1) El Espíritu (la Idea) en sí, antes de su desarrollo: Dios antes de la creación; 2) El Espíritu (la Idea) en su existencia exterior como naturaleza; 3) El Espíritu (la Idea) en su regreso a sí mismo: el Espíritu Subjetivo, el Espíritu Objetivo y el Espíritu Absoluto. En correspondencia con estas fases organiza Hegel su *Enciclopedia de las ciencias del Espíritu* en las siguientes tres partes: 1) *Lógica*, o ciencia de la Idea en y sí para sí; 2) *Filosofía de la Naturaleza*, o ciencia de la Idea en su existencia exterior; y 3) *Filosofía del Espíritu*, o ciencia de la Idea que vuelve sobre sí misma[62].

Tal es el desenvolvimiento de la idea en sus distintas fases. Internamente, este desenvolvimiento (o actividad) de la Idea (de la realidad) se realiza en un proceso entre opuestos, que marcha de oposición en oposición para llegar a la síntesis de esos opuestos, síntesis que engendra nuevas oposiciones. Y este proceso en tres tiempos: tesis (o posición), antítesis (o contraposición) y síntesis es lo que Hegel denomina *dialéctica.*

La dialéctica hegeliana

Para Hegel la dialéctica no es, como era para Aristóteles, lógica de las conclusiones probables, ni, como era para Kant, *lógica de la apariencia:* utilización ilegítima de la lógica general (utilización de ésta, no como *canon*, sino como *organon* de producción de conocimiento), sino que es el método adecuado de la fi-

[59] *Ibidem*, p. 48.
[60] *Enciclopedia*, § 19.

[61] *Ibidem*, § 15.

[62] Esta "Enciclopedia" o sistema filosófico, según expresa indicación de Hegel, tiene como introducción la *Fenomenología*, que constituye la gnoseología hegeliana.

losofía especulativa, y que constituye, no sólo el instrumento efectivo del conocimiento, sino el proceso mismo de constitución del ser, o lo que es lo mismo, el proceso de desenvolvimiento de la Idea. Esto es lo que pretende ser la lógica de Hegel, una lógica capaz de englobar a la vez lo que el pensamiento antiguo denominaba, por una parte, *lógica* y, por otra *ontología*. Esta nueva lógica presenta, como Hegel señala insistentemente, divergencias de principio con la lógica clásica, al menos sobre un punto: "La única manera de lograr el progreso científico, es el reconocimiento de la proposición lógica que afirma que lo negativo es a la vez positivo, o que lo contradictorio no se resuelve en un cero, en una nada abstracta, sino sólo esencialmente en la negación de un contenido particular"[63]. Al principio de no-contradicción de la lógica clásica es necesario oponer un principio de contradicción evolutivo y con un resultado positivo. Tal es el primer punto capital que podríamos señalar en la doctrina de Hegel: el dinamismo del Concepto.

En segundo lugar, la *Aufhebung* parece que comporta la liquidación de todo aquello que la lógica clásica tiene de matemática. Existe un contraste radical entre la lógica del Concepto y la del cálculo matemático hacia el que tiende la matematización de la lógica usual. Las entidades matemáticas están constituidas como algo absolutamente fijo y determinado frente a la entidad dialéctica que es fluida; aquéllas están afectadas por una condición de exterioridad radicalmente contraria a la interioridad de la que hay necesidad para la vida. Las matemáticas, por su objeto, representan a la luz del sistema hegeliano el momento más externo de la alienación del logos[64].

Estas ideas podemos encontrarlas en diversos textos, especialmente en la *Ciencia de la lógica* (ed. cit., pp. 49, 544-5, 602-3). La matematización de la lógica es considerada como el último eslabón del proceso a que el entendimiento somete la tradición de la lógica. La fijeza y exterioridad señaladas anteriormente como condiciones rigurosas del objeto de la matemática confieren a ésta su carácter puramente analítico[65]. El pensamiento analítico es el que opera bajo el principio de identidad clásico "*A* es *A*", al cual Hegel llama el principio de identidad abstracto-formal, que hace abstracción de la diferencia, y al cual otras veces llama "la identidad abstracta del entendimiento" (Hegel acepta la definición kantiana de *analítico*, pero rechaza el considerar a los juicios de igualdad artimética, "7 + 5 = 12", como juicios sintéticos)[66]. Frente a la identidad abstracta del entendimiento, el principio de la razón será el de la "identidad concreta", es decir, de la identidad en la diferencia, o bien "de la identidad de la identidad con la no identidad"[67]. Tal es la *Aufhebung* que Hegel lleva a cabo, cuya determinación es el Concepto con sus tres momentos esenciales: Universalidad, Particularidad y Singularidad. La razon tiene como característica el ser la facultad de la diferencia *interna*, y su forma lógicamente primitiva es la contradicción. Por tanto, la dialéctica significa poner en marcha la contradicción mediante la cual lo inteligible se diferencia.

El ataque de Hegel a la lógica clásica ha paralizado la investigación de su obra bajo el punto de vista formal. No obstante, mucha tinta ha corrido en el intento de dilucidar el entramado de la dialéctica hegeliana. Ello ha conducido a posiciones extremas. Por ejemplo, E. von Hartmann 1868[68] critica el método de la dialéctica hegeliana. Un tipo de dialéctica -dice- sin fundamento y sin legitimación, dado que debe desdeñar como falsa cada argumentación, justificación o suposición. Se basa tan sólo en su propia afirmación. En suma, dicho método es una aberración patológica del espíritu que funda su verdad solamente en su propia aseveración.

No son de este tipo los calificativos que merece el método hegeliano a muchos de sus investigadores[69], pero sí se produce una dispersión de interpretaciones

[63] *Ciencia de la lógica*, ed. cit., p. 50

[64] Cf. M. Vadée, "Nature et fonction des Mathematiques et de leur histoire dans le système dialectique hegelien", en *Hegel-Jahrbuch*, 1972, pp. 33-9.

[65] "El número debido a su principio, que es el uno, es en general una colección exterior, una figura absolutamente *analítica* que no contiene ninguna conexión interior" (*Ciencia de la Lógica*, ed. cit., p. 182). Véase, sin embargo, J. Szigetti, "Hegel und G. Cantor", en *Hegel-Jahrbuch*, 1971, pp. 283-93, quien considera el pasaje no como una prueba del antimatematicismo de Hegel, sino tan sólo de su antiaritmeticismo. Al contrario, Hegel habla con estima del pensamiento matemático; y aún más, la interpretación hegeliana de la cantidad fue la auténtica inspiración filosófica de la nueva teoría de conjuntos de Cantor.

[66] *Ciencia de la Lógica*, ed. cit., p. 696.

[67] *Ibidem*, pp. 63-9.

[68] *Ueber die dialektische Methode*, Darmastadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1968.

[69] De la abundante bibliografía al respecto mencionaremos: P. Janet, *Etudes sur la dialectique dans Platon et dans Hegel*, París, 1860; W.

T. Harris, *Hegel's Logic: A Book on the Genesis of the Categories of the Mind*, S. C. Griggs, 1890; W. Wallace, *Prolegomena to the Study of Hegel's Logic*, Oxford, 1894; Hibben, *Hegel's Logic*, Nueva York, 1902; G. Mure, *A Study of Hegel's Logic*, Oxford, 1950; J. Hyppolite, *Logique et existence. Essais sur la logique de Hegel*, París, 1953.

en el intento de sitematizar, ya la dialéctica hegeliana, ya la dialéctica en general. McTaggart 1896[70] propone una revisión del método dialéctico hegeliano. Señala: 1) que el método empleado por Hegel en su *Lógica* no es uniforme, sino que cambia constantemente desde la reflexión *externa* hasta la reflexión *interna;* 2) que lo negativo no es un elemento esencial en dicho método, sino la discrepancia entre lo perfecto y concreto, por una parte, y la imperfecto y abstracto, por otra.

McGilvary 1898[71] responde con un análisis del método y categorías hegelianas. Distingue tres clases de reflexión: la *pura* reflexión, la reflexión *externa* y la reflexión *interna*, cada una de las cuales es puesta en correspondencia con las diversas categorías manejadas en la *Ciencia de la Lógica*. Con respecto al segundo punto de crítica de McTaggart, considera McGilvary que la negación es esencial al método, y no un accidente que tiende a desaparecer. La negación es lo que da vida al proceso y aparece en la plenitud de su poder solamente cuando somete bajo sí a todas las cosas; cuando llega a la Idea Absoluta.

Un estudio de la contradicción y la negatividad con coordenadas más lógico-formales es el de Bosanquet 1906[72]. La negatividad aparece en el método dialéctico como una característica fundamental del mundo real, pero distinguiendo, en primer lugar, entre Realidad Ultima (en la que no puede darse contradicción lógica) y el mundo de los hechos, que es actual y contradictorio. La contradicción lógica es una característica de la Realidad en tanto que está presente en el actual mundo de los hechos. En segundo lugar, lo que sobrevive cuando la contradicción ha sido resuelta es la autorealización en el progreso hacia la perfección. La negatividad es el aspecto total o tendencia de algo real que encuentra como manifestación imperfecta lo expresado en la contradicción lógica. No hay que confundir, por tanto, contradicción y negatividad. La contradicción lógica es la inadecuación de los elementos en la que se alcanza la realización. Así, la estructura lógica última del sufrimiento y de la maldad es la misma que la de la satisfacción y de la bondad.

El auge de las filosofías empírico-positivas dominantes en Gran Bretaña y América durante el período de entreguerras provocó el hábito de atacar el espectro hegeliano, y la necesidad de alejarse cuanto antes de lo que Popper llamó la "farsa hegeliana". Desde las coordenadas empírico-positivas la dialéctica queda ridiculizada al máximun. En Popper 1940[73] -frente al método científico (el esquema del ensayo y del error), esencialmente método de la *eliminación*-, el método dialéctico (tesis-antítesis-síntesis) es presentado como una suma de metáforas que encubren inconsecuencias (como la conservación de la tesis y la antítesis en la síntesis), engaños (como la ley de la contradicción) y vaguedades (como la negación de la negación). Dicho método no tiene nada que ver con la lógica (teoría fundamental), sino que es una teoría meramente descriptiva; un modo más de describir los desarrollos. Finalmente, la combinación de la dialéctica y el materialismo (Marx) le parece a Popper aún peor que el idealismo dialéctico (Hegel). Los dos puntos principales del sistema marxiano: el énfasis en el método histórico y la tendencia antidogmática de su dialéctica, desembocan, el primero en el "historicismo" *(Miseria del historicismo):* la dialéctica de Marx, en cuanto conjunto de profecías que no quedan sometidas a refutación alguna, resulta acientífica. Y el segundo en la pura teoría, ya que en la práctica criticismo y antidogmatismo nunca han sido tolerados por los marxistas.

De este notorio desprestigio goza aún en círculos "analíticos" o positivistas todo cuanto se relaciona con la lógica dialéctica, por ejemplo, cuando Monod contrapone la lógica de Hegel a la de Boole[74]. No obstante, se ha ido purificando el ambiente, y el renacimiento de Hegel sigue un curso ascendente, como lo demuestran los actos y publicaciones organizados en torno a la celebración del segundo centenario de su nacimiento en 1970.

R. Heiss 1959[75] dedica un detallado estudio a la "lógica de la contradicción". El libro constituye "en parte una aclaración del fenómeno dialéctico y en parte una sistemática de los sucesos dialécticos". El autor se esfuerza -con bastante éxito- en mostrar cómo la dialéctica es un distintivo de nuestro pensamiento actual y de nuestra conciencia. En esta misma dirección comienzan a abrir brecha en inglés las obras de J. N. Findlay[76] y G. Mure (véase nota 69). Las cuestiones

---

[70] *Studies in the Hegelian Dialectic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1896.
[71] "The Dialectical Method I, II, III", *Mind*, vol. 7, 1898, pp. 55-70, 233-42, y 388-403, respectivamente.
[72] "Contradiction and Reality", *Mind*, vol. 15, 1906, pp. 1-12.
[73] "What is Dialectic?", *Mind*, vol 49, 1940, pp. 403-26.
[74] Monod, *Le hasard et la nécessité*, París: Seuil, 1970. Trad. cast. de F. Ferrer, *El azar y la necesidad*, Barcelona: Barral, 1970, p. 88.

[75] *Wesen und Formen der Dialektik*, Berlín: Kepenheuer & Witsch, 1959.
[76] Hegel: *A re-examination*. Londres, 1958. Trad. cast. de J. C. García Borrón, *Reexamen de Hegel*, Barcelona: Grijalbo, 1969.

relacionadas con la lógica dialéctica llegan a alcanzar gran difusión. Se escribe sobre ellas desde el punto de vista de la teoría general de la ciencia o del conocimiento (Gonseth[77] Piaget)[78]; se fundamentan ontológicamente (Adorno)[79]; y se confrontan con las de la lógica formal moderna, en el intento por llegar a una formalización de la lógica dialéctica de Hegel.

Formalización de la dialéctica de Hegel

El intento de la formalización de la lógica hegeliana encuentra un primer obstáculo en la crítica de Hegel a la silogística y a la matematización de la lógica. Esto plantea a los lógicos modernos la pregunta de si dicha lógica es suceptible de formalización. G. Günther[80] y algunos otros responden afirmativamente, lo que ha dado origen a varios ensayos para traducir a variables y constantes la *Ciencia de la Lógica* o la *Fenomenología del Espíritu*. No obstante, cada uno ha propuesto métodos de formalización diferentes que no convergen en absloluto.

Abre el camino R. Baer 1931[81], quien en el segundo congreso sobre Hegel pone de manifiesto el carácter isomórfico de la lógica bivalente y su significación para la lógica dialéctica. El isomorfismo significa la *coincidentia oppositorum* en cuanto a la interpretación del contenido del cálculo de enunciados. Cada enunciado es ciertamente distinto de su negación, pero no existe ninguna distinción esencial entre enunciados positivos y negativos; distinción más sutil aún entre un enunciado y su negación. Sobre esta idea montará Günther sus tablas morfogramáticas.

L. S. Rogowski 1964[82], apoyándose en los trabajos de su maestro Jaskowski referentes a cálculos modales polivalentes, intenta formalizar en lógica modal ciertos aspectos de la dialéctica. Introduce una modalidad direccional en una lógica modal con cuatro valores: $\overrightarrow{Np}(p$ comienza a ser verdadero); $\overleftarrow{Np}(p$ cesa de ser verdadero); más los otros dos valores usuales. Da tablas de verdad y establece una axiomática para su lógica direccional.

Un proyecto de mayor envergadura es el de G. Günther, que ha trabajado en la construcción de una lógica no-aristotélica[83]. En su extenso artículo citado en la nota 80 parte Günther del cálculo de enunciados, citando la advertencia de Lukasiewcz de que el cálculo de enunciados constituye la más profunda cimentación de todas las ciencias deductivas. Introduce una lógica trivalente derivada del modelo de Lukasiewicz para integrar en él la "lógica de la reflexión". Con la introducción de los símbolos * y □ , que suplen los valores de verdad, construye una tabla morfogramática de ocho columnas que sustituye la clásica de dieciséis columnas de las funciones diádicas. La tabla morfogramática muestra, así, la *coincidentia oppositorum* de las correspondientes oposiciones en la tabla clásica y que concuerdan con el punto de partida de Hegel, según el cual, el puro Ser es inmediato a la pura Nada; Positividad en general y Negatividad en general son idénticas.

Una vez completada la tabla morfogramática (la lógica de Aristóteles está compuesta de ocho columnas, mientras que un formalismo morfogramático completo exige quince), el operador *R* permite obtener las quince equivalencias que representan el esquema formal de lo que en la lógica trascendental aparece como "Reflexión mediadora".

Günther 1972[84] aplica la lógica hegeliana del Ser, la Nada y el Devenir a los números naturales. En la tradición clásica -dice- el orden de los números naturales -en el que cada número natural que sigue al uno tiene un inmediato antecesor y un inmediato sucesor- corresponde a un "mono-contexto". Pero cabe hablar de un "contexto universal" *(Universalkontextur)*: "lo que en el uso corriente del lenguaje se llama un con-

[77] "L'Epistemologie genetique et la methodologie dialectique I y III", en *Dialectica*, vol. 4, 1950, pp. 5-20 y 296-301.
[78] "Epistemologie genetique et Methodologie dialectique II", en *Dialectica*, vol. 4, 1950, pp. 287-95.
[79] *Negative Kialektik*, Frankfurt am Main, 1966. Trad. cast. de J. M. Ripalda, *Dialéctica negativa*, Madrid: Taurus, 1975, especialmente cap. IV: "Dialéctica negativa", pp. 139-208.
[80] "Das Problem einer Formalisierung der transzendental-dialektischen Logik" seguido de anotaciones de P. Lorenzen, en *Hegel-Studien*, Beiheft I, Bonn, 1964, pp. 65-130.
[81] *Hegel und die Mathematik* (Verhandlungen des zweiten Hegelkongresses von 18 bis 21 Okt., 1931) Berlin/Tübingen 1932, pp. 104-20.
[82] "Logika Kierunkowa a Hegelowska Teza O Sprecznosci Zmiany" (Directional Logic and Hegel's Tesis on the Contradiction of Change), *Studia scientiarum Torunensis*, Torun, 1964.

texto, un ámbito ontológicamente vacío, de total generalidad e ilimitada capacidad de contenido", y, no sólo de un monocontexto de dichas características, sino de una pluralidad de contextos universales. Para contar éstos podemos ir acomodándolos como indistinguibles o como distinguibles. En el primer caso mediante el proceso de iteración; en el segundo, mediante el proceso de acrecentamiento. Ambas interpretaciones muestran una abstracta relación de cambio, i. e., se comportan como lo positivo y lo negativo en la tabla de la negación clásica bivalente. Pero la situación cambia cuando contamos, a la vez, tres unidades. Al juntar dos veces lo igual y una lo distinto se produce en lo tercero, por primera vez, la idea del número dialéctico, idea desarrollada por Hegel en la unión dialéctica de la cualidad y la cantidad.

M. Kosok 1969[85] sigue la idea de que la lógica dialéctica debe constituirse como la lógica de la contradicción. A este respecto invoca lo que él llama el principio de No-Identidad y una operación de Reflexión. La lógica dialéctica es un tipo de lógica "temporal", frente a la lógica no dialéctica, que es a-temporal y corresponde a una visión del universo como esencialmente determinado y dado en el espacio. El principio de identidad resulta, pues, metafísico para la lógica de la reflexión, porque la actividad de ésta sobre una afirmación inicial "cambia la naturaleza de la afirmación presente". De ahí la necesidad de acudir a un principio de No-Identidad. Este principio actúa como fórmula recursiva que produce, por medio de la Reflexión *(R)*, una secuencia de términos que se autoexpansionan. La estructura formal que se desarrolla adopta la forma de una matriz de términos. Así, la reflexión de *e* en *e'*: $(R)\ e = e'$, producirá tres términos para el primer nivel, nueve para el segundo, veintisiete para el tercero, etc., según la expansión de potencia 3^n, donde *n* subsiste para las sucesivas reflexiones. La fórmula recursiva fundamental es: $(R)\ e^n = e^{n+1}$. Kosok se atiene casi exclusivamente a la *Fenomenología del Espíritu*, que describe la conciencia como devenir de sí de lo absoluto, y la mayor parte de su artículo queda dedicado a la interpretación metalógica.

F. G. Asenjo 1965[86] dedica una corta nota a la lógica de Hegel. En vez de partir de la lógica de enunciados como Günther, lo hace desde la lógica de predicados y propone una formalización basada sobre diez reglas de formación de un cálculo dialéctico de predicados de orden superior. "El principio dialéctico descansa en dos reglas de desarrollo: la 6ª y la 7ª". La regla 6ª dice: $S_2\ (t_1 \in R_i\ .\ \sim t_2 \in R_i)$, donde t_1, t_2 son términos; R_i una constantes individual; y S_2 constantes de predicados que tienen el valor de predicados binarios sintácticos. La regla 7ª dice: $S_{j+1}\ (P_j, \sim P'_j)$, donde el apóstrofo P'_j indica que los términos y, en particular, las variables individuales en P'_j son diferentes de las letras de P_j, aunque P_j y P'_j tengan las mismas constantes individuales. Con ello se propone Asenjo ofrecer una fórmula bien formada que contenga a la vez la oposición dialéctica (~) y la *Aufhebung* dialéctica.

Y. Gauthier 1967[87], a la vista de los trabajos expuestos, afirma: "Es necesario concluir que de nuevo el fin propuesto no se ha conseguido. No existe aún una formalización efectiva de la lógica hegeliana"[88]. Según él, ninguno de sus predecesores se ha metido de lleno con la *Ciencia de la Lógica*, y ese es su propósito. Para ello describe la estructura de conjunto de la *Ciencia de la Lógica*, que tiene los siguientes rasgos: a) *Circularidad:* un círculo que comprende, a su vez, círculos concéntricos con un punto de origen y otro de llegada coincidentes en la Idea o Absoluto. b) Siete órdenes o estratos de Implicación estructural que se corresponden dos a dos de la forma siguiente: la circunferencia central corresponde a la línea de la *Aufhebung*, y la circunferencia mediana del plan define, pues, la inducción completa. Gauthier establece un sistema acoplado a una teoría elemental de grupos. Las reglas de formación más importantes son [en donde N = imposición (tesis); K = subimposición (an-títesis); W = sobreimposición (síntesis); X = una conectiva que define el paso de N a K; I = constante individual (idea)]: Regla e): $N\ X\ K \rightarrow W$, define la fórmula de posición del sistema; *C(NKW)*, su cierre; y *S(NKW)*, su traspaso. $(N\ X\ K \rightarrow W)'_1 \leftrightarrow (N\ X\ K \rightarrow W)'_2$ formula la relación de dos posiciones sucesivas de sistema. La regla g): $I = (((NKW)P_1)\ X_1, X_2, \ldots)$; $I = (X^{-2}, X^{-1}, X^0, X^1, X^2)$: la idea que recorre todo el sistema queda formalizada en una fórmula cíclica que satisface el principio de la circularidad del sistema.

También D. Dubarle 1972[89] habla de tríadas, de esferas y de un círculo de círculos intentando llegar a un con-

---

[85] "The formalisation of Hegel's Dialectical Logic", en *International Philosophical Quarterly*, vol. 6, núm. 4, 1966. pp. 596-631.

[86] "Dialectical Logic", en *Logique et Analyse*, nº. 4, 1965, pp. 321-6. Trad. cast. "Lógica dialectica", *Teorema*, I, 1971, pp. 7-12.

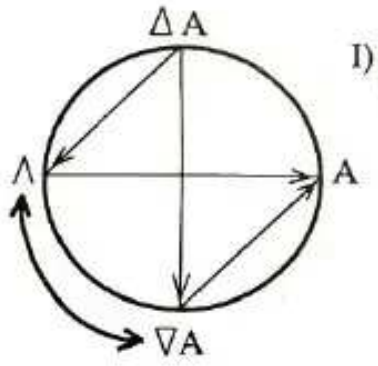
[87] "Logique hegélienne et formalisation", *Dialogue*, VI, 1967, pp. 151-65.

[88] *Ibidem*, p. 160.

[89] D. Dubarle y A. Doz, *Logique et dialectique*, París: Larousse, 1972. Este libro es una ampliación del artículo de Dubarle, "Sur une formalisation de la logique hegélienne", *Epistemologie sociologique*, París, núm. 7, 1969, pp. 48-61.

cepto matemático que responda a las relaciones existentes entre las esferas del Concepto. Considera la estructura elemental de la esfera conceptual de Hegel como una estructrura referida a un conjunto de cuatro términos (Λ, S, U, P), en vez de los tres explicitados por Hegel [Universalidad (U); Particularidad (P) y Singularidad (S)]. Este cuarto término introducido por Dubarle es el término lógica y funcionalmente vacío (Λ).

En vez de una estructura algebraica booleana que tiene por base un conjunto de 2^n elementos, nos encontramos ahora con otra que tiene por base un conjunto de 4^n elementos. Podríamos llamar a esta última -dice Dubarle- álgebra ultrabooleana, con relación a la primera simplemente booleana. Desde el punto de vista combinatorio tenemos en esta nueva estructura seis operaciones distintas relativas a un término A: 1) la operación idéntica; 2) cuatro operaciones de conversión de A en una de las cuatro constantes (Λ, S, U, P); 3) la operación de transformación de A en su complementario A'. Otras dos operaciones esenciales son: $\Delta A = A \cap U$; y $\nabla A = A \cap P$, siendo ∇ el operador "deposición". La figuración de las transiciones dialécticas hegelianas queda representada de la siguiente manera:



I) Universal en círculo de A

II) El particular en su escisión en el círculo de A

III) El singular en el círculo de A

Primera transición $U \rightarrow (\Lambda, P)$, paso del universal al particular con la emergencia al mismo tiempo del polo de la negatividad absoluta.

Segunda transición: $(\Lambda, P) \rightarrow S$, efectúa la síntesis del par disociado (Λ, P).

A continuación ofrece Dubarle una axiomática para el nuevo sistema formal, aunque no ofrece ningún desarrollo deductivo. "La intención era solamente mostrar que el discurso del pensamiento hegeliano, a pesar de lo que Hegel mismo ha pensado al respecto, da lugar a una formalización análoga a la de la lógica clásica".

El redescubrimiento de Hegel que comienza hacia el año sesenta y alcanza su punto más alto hacia el setenta (fecha del segundo centenario de su nacimiento), sigue aportando en la actualidad gran cantidad de material para la elucidación del concepto de lógica dialéctica y su relación con la lógica formal moderna. Baste citar la revista *Hegel-Jahrbuch* en la que se encuentran numerosos trabajos al respecto[90]. Pero, sobre todo, Hegel ha vuelto a cobrar su importancia a la luz de las discusiones marxistas. El inevitable tema, dentro de la filosofía marxista, de la relación Hegel - Marx ha obligado a precisar las categorías de la lógica dialéctica.

3. 2. El marxismo

La segunda vía de acceso a la lógica dialéctica es a través del marxismo. El término *dialéctica* en su uso común alude a algo que tiene que ver con el marxismo. No quiere eso decir que la lógica dialéctica, desde coordenadas marxistas, constituya un cuerpo de doctrina concreto, que pueda ser codificado y presentado de manera precisa. Antes bien, ocurre la contrario, se produce una dispersión de interpretaciones que llega a posiciones encontradas en el seno de los pretendidos ortodoxos. En ello se regodean sus adversarios, quienes bajo la capa (o sotana) de una pretendida imparcialidad desfiguran en lo posible la realidad. Basten como ejemplos, a nivel general, la obra del P. C. Wetter[91], y a nivel ya concreto de lógica dialéctica, su discípulo E. Huber[92]. A todo lo anterior añádase la campaña de los logísticos y empiristas lógicos contra la lógica dialéctica (S. Hook) y en general contra la lógica filosófica (Bochenski, Lukasiewicz, etc.)

La lógica dialéctica *marxista* va asociada a la filosofía soviética. Esta, a su vez, ha consistido, durante un largo período, en una exégesis de los clásicos del marxismo: Marx, Engels, Lenin y Stalin. Los textos clásicos sobre la dialéctica y la lógica se reducen a un

[90] Cf. entre otros: G. Günther, "Die historische Kategorie des Neuen", *Hegel-Jahrbuch*, 1971, pp. 32-61; Erdei, "Der Gegensatz und der Widerspruch in der Hegelschen Logik", *Hegel-Jahrbuch*, 1973, pp. 18-23; B. Hartmann, "Die Begriffslogik als dialektische Logik", *Hegel-Jahrbuch*, 1974, pp. 366-7; K. G. Havas, "Die hegelsche Dialektik und die moderne Logik", *Hegel-*

Jahrbuch, 1974, pp. 362-5

[91] *Der dialektische Materialiamus*, Herder Verlag, Viena, 1958. Trad. cast. E. Terrón, *El materialismo dialéctico*, Taurus, Madrid, 1963.

[92] *Um eine "dialektische Logik"*, Anton Pustet, München, 1966. Libro interesante por la cantidad de referencias bibliográficas que aporta.

pequeño número de breves pasajes, a los libros de notas de Engels *(Dialéctica de la naturaleza*, Moscú, 1927) y Lenin *(Cuadernos filosóficos*, Moscú, 1929 y 1930) y al *Anti-Dühring*, 1878, de Engels. Marx no trató la lógica de Hegel, aunque siempre estuvo con el proyecto de escribir una lógica o una dialéctica. En la carta a Engels del 14 de Enero de 1858 escribe: "En el método de elaboración del tema hay algo que me ha prestado un gran servicio: por pura casualidad había vuelto a ojear la lógica de Hegel (Freiligrath ha encontrado algunos libros de Hegel que habían pertenecido antes a Bakunin y me los ha enviado como regalo). Si alguna vez vuelvo a tener tiempo para este tipo de trabajo me proporcionaré el gran placer de hacer accesible en dos o tres pliegos impresos, a los hombres con sentido común el fondo racional del método que Hegel ha descubierto y al mismo tiempo mixtificado".

Pero "si Marx no nos dejó una *Lógica* (con mayúscula), dejó en cambio la lógica de *El Capital*, que en este problema debería ser utilizada a fondo"[93]. Con lo que comienzan una serie de estudios en el intento por sistematizar el método empleado por Marx en *El Capital*.

Tampoco Marx dijo una palabra acerca de lo que Hegel llamaba *Filosofía Natural* (en esto guardó una mayor y más sabia discrección que Engels). Y, si bien resulta muy discutible la tesis recientemente revitalizada por el existencialismo de un *engelsismo* naturalista e ingenuo frente a la *sabiduría* social de Marx, lo cierto es que esta tradición engelsiana determina la orientación escolástica del Diamat.

Finalmente, una tercera pauta configura el desarrollo de la lógica dialéctica: Su relación con la Lógica formal. Durante el período staliniano Marr señala que la lógica formal es un sustrato burgués, y que debía ser sustituida por la lógica dialéctica proletaria. Ello conduce a la supresión de la enseñanza de lógica formal hasta 1946. Pero en 1950, el propio Stalin, en sus *tesis sobre lingüística* proclama contra Marr que el lenguaje no pertenece a la superestructura dentro del esquema marxista base -superestructura, a la vez que niega su carácter de clase. Los lógicos interpretan la proclamación de Stalin como aplicable igualmente a la lógica, y en el mismo año 1950 la revista de Filosofía *Voprosy filosofii* abre sus páginas a una discusión pública para determinar qué es la lógica dialéctica y sus relaciones con la lógica formal. Dos fueron las tendencias predominantes en esta gran discusión:

a) La de aquellos que conocían y usaban los métodos de la lógica formal. Defendían la validez de la lógica formal en todos los campos del conocimiento racional y, por tanto, que no había dos lógicas, una dialéctica y otra formal, sino sólo una, y ella es la lógica formal. Su campo lo constituyen las *formas* del razonamiento correcto, mientras que la dialéctica tiene que ver con el *contenido* del pensamiento, y coincide con la gnoseología. De esta opinión era K. S. Bakradze, A. A. Zinoviev, D. P. Gorski, N. I. Kondakov, P. V. Tavanec.

b) El segundo punto de vista admitía que existían dos lógicas, aunque no separadas entre sí: la lógica formal, que trata con los fenómenos simples y estables desde un punto de vista estático, y la lógica dialéctica, completamente diferente y superior a los métodos formales, capaz de tratar con la realidad compleja y en desarrollo, constituyendo, así, el nivel superior del pensamiento. Defendía esta tesis, entre otros, M. N. Alexeiev, B. M. Kedrov, P. V. Kopnin, M. M. Rosental, V. I. Cherkesov.

Ambos puntos de vista no constituían, sin embargo, campos opuestos. Lógicos como Gorski y Tavanec han escrito sobre algunos de los más importantes problemas de la lógica dialéctica. Por otra parte, los lógicos dialécticos no llegan a un completo acuerdo sobre su disciplina, que se ha desarrollado en varias direcciones. La más importante consiste en la aplicación de la lógica dialéctica a la metodología de la ciencia. En este campo es donde los dialécticos, en colaboración con los lógicos formalistas, han efectuado trabajos de gran competencia y técnica, de valor incluso para los no marxistas.

Entre los lógicos dialécticos, V. I. Cherkesov 1959[94] sostiene que la lógica estudia las formas especiales de los conceptos y del razonamiento dialéctico. Las formas del pensamiento pueden dividirse en dialécticas y no dialécticas. Los conceptos no dialécticos no son flexibles ni elásticos, sino idénticos a sí mismos y resultan estancados, inmóviles. Los conceptos dialécticos opuestos a aquéllos, se caracterizan por su flexibilidad, movimiento, agilidad y no idénticos a sí mismos.

La versión más explícita de este punto de vista se debe a M. N. Alexeiev (véase la nota 118). Sin embargo, es el propio Alexeiev quien posteriormente critica, en otros, dicha teoría: "Es erróneo el punto de vista según el cual el pensamiento común y el dialéctico operan con distintas formas de los mismos conceptos,

[93] Lenin, *cuadernos filosóficos*. Ediciones Estudio, Buenos Aires, 1972, p. 309.
[94] *Problemy dialekticheskoi logiki* (Problemas de lógica dialéctica), Edic. de la Univ. de Moscú, 1959.

juicios y razonamiento. En verdad, tales formas son comunes a todos los hombres. El pensamiento dialéctico no se distingue del común por las formas del concepto, juicio y razonamiento, sino por el contenido, ya que en el contenido del pensamiento se produce la dialéctica del objeto estudiado"[95].

Tenemos, así, la concepción más generalizada dentro del Diamat: La lógica formal es la lógica pura general, la lógica de las formas puras del entendimiento (lógica subjetiva), mientras que la lógica dialéctica es la lógica material, la lógica de los movimientos reales (lógica objetiva). Este esquema es manejado constantemente por los ortodoxos del Diamat apelando a textos engelsianos como éste: "La dialéctica, la que se llama objetiva, impera en toda la naturaleza, y la llamada dialéctica subjetiva, el pensamiento dialéctico, es simplemente el reflejo del movimiento en contraposiciones que se manifiestan por todas partes, contraposiciones que, en su pugna constante y su disolución final unas en otras o en formas superiores, condicionan la vida de la naturaleza"[96].

Pero incluso este esquema general necesita ser especificado. Para K. S. Bakradze 1951[97] no existen dos ciencias sobre las formas y leyes del pensamiento correcto. Sólo exite una, y esa es la lógica formal. La lógica dialéctica es una metodología general del conocimiento, la metodología de la acción práctica.

D. P. Gorski 1958[98] y E. K. Boischvilló 1960[99] son los defensores más puros del esquema antes expuesto: la lógica dialéctica tiene que ver con el contenido ("ella enseña cómo hay que utilizar correctamente los conceptos según su contenido"), y la lógica formal se refiere al estudio de las formas del pensamiento en cuanto tales.

Un tanto modificada, pero enraizada en la misma tradición engelsiana, es la tesis defendida por V. I. Maltsev 1964[100]. Distingue entre: a) lógica *objetiva* (lógica del objeto, de la vida real), y b) lógica *subjetiva* (lógica del pensamiento, sólo en el sentido de que se halla en la cabeza del hombre y se concibe como algo ideal). Pero la lógica subjetiva, siendo un reflejo correcto de la lógica de los objetos, puede llamarse igualmente *objetiva* = lógica dialéctica, que considera los conceptos en relación con el objeto. Frente a la lógica formal, que considera los conceptos en sí, "la lógica dialéctica está destinada a investigar lógicamente los procesos y formas capaces de reproducir en la mente humana la dialéctica del mundo material. Entre el método dialéctico y la lógica dialéctica hay una estrecha relación y mutua dependencia; sin embargo, se diferencian por el campo de su investigación..." (p. 214). Maltsev, igual que M. M. Rosental 1960[101] critica la concepción de la lógica formal como la única ciencia que investiga las formas del pensamiento: la lógica dialéctica también "estudia las formas y leyes del pensamiento, el cual refleja el desarrollo sujeto a leyes del mundo real" (Maltsev). Pero Rosental se aparta de Maltsev en lo referente a la segunda cuestión profusamente debatida entre los lógicos dialécticos: La unidad entre la dialéctica, la gnoseología y la lógica en la filosofía marxista-leninista.

Rosental considera un error "la tendencia observada en algunos trabajos marxistas de separar nítidamente el objeto de la dialéctica, el de la lógica y el de la teoría del conocimiento"[102]. Los partidarios de la unidad lógica -dialéctica- teoría del conocimiento se apoyan en Lenin, quien en sus *Cuadernos filosóficos* escribió: "En *El Capital*, Marx aplicó a una sola ciencia la lógica, la dialéctica y la teoría del conocimiento del materialismo (no hacen falta 3 palabras: es una y la misma cosa), que tomó todo lo que había de valioso en Hegel y lo desarrolló"[103].

Entre los defensores de este punto de vista está V. I. Cherkesov 1962[104], M. M. Rosental 1960 V. P. Rozhin 1957[105] y V. P. Tugarinov 1958[106].

Otro grupo de autores llega a la conclusión de que la lógica dialéctica es una parte de la dialéctica materia-

---

[95] M. N. Alexeiev, *Dialektika form mishlenia*, Ed. Univ. Moscú, 1959. Trad. cast. Salomón Merener, *Dialéctica de las formas del pensamiento*, Ed. Platina, Buenos Aires, 1964, p. 8.
[96] F. Engels, *Dialektik der Natur*, en *Marx-Engels Werke*, vol. 20, p. 481.
[97] *Lógica*, Tbilisi, 1951.
[98] *Lógica*, Ed. pedagógica, Moscú, 1958.
[99] *Objeto e importancia de la lógica*, Edic. Univ. de Moscú, 1960.
[100] *Ensayos de lógica dialéctica*, Ed. Univ. de Moscú, 1964. Trad. cast. Teodosio Varela, Ed. Suramérica Ltda, Bogotá, 1966.
[101] *Principy dialekticheskoi Logiki*. Ed. Univ. de Moscú, 1960. Trad. cast. A. Vidal Roget, *Principios de lógica dialéctica*, Ed. Pueblos Unidos. Montevideo, 1965.
[102] *Ibidem*, p. 90.
[103] *Cuadernos filosóficos*, Ediciones Estudio, Buenos Aires, 1972, p. 309.
[104] *Materialisticheskaja dialektika kak Logica i teorija poznanija* (La dialéctica materialista como lógica y teoría del conoci-

miento), Ed. Univ. de Moscú, 1962.

105 *Marksistsko-leninskaja dialektika kak filosofskaja nauka* (La dialéctica marxista-leninista como ciencia filosófica) Ed. Univ. Leningrado, 1957.

106 "O ediustve dialektiki, Logiki i teorii poznanija" (Sobre la unidad de la dialéctica, la lógica y la teoría del conocimiento), en *Material y Vsesojuznogo soveschanija za kafedrami obschestrennych nauk*, Ed. Univ. Moscú, 1958, pp. 302-317.

lista. Su defensor más destacado es M. N. Rutkévich 1959[107]. Considera que la teoría del conocimiento y la lógica son partes de la dialéctica: "La dialéctica marxista, como ciencia de las leyes más generales del mundo objetivo y de la conciencia, ha de integrar la doctrina del proceso del conocimiento, es decir, la teoría del conocimiento y la ciencia del pensamiento abstracto: la lógica" (p. 301).

Defiende la separabilidad de la lógica dialéctica y del método dialéctico el alemán G. Klaus 1958[108]. En general, las posiciones fuera de la URSS giran en torno a los dos bandos en que quedaron divididos los lógicos soviéticos a raíz de la polémica del año 50[109].

P. V. Kopnin 1961[110] critica a Rutkévich que divide la filosofía marxista en ontología y gnoseología. No existen dos ciencias filosóficas independientes: la solución de los llamados problemas ontológicos supone, al mismo tiempo, la solución de los problemas gnoseológicos, ya que las leyes del conocimiento son el reflejo de las leyes del mundo objetivo. Pero Kopnin critica, a su vez, la tesis de los profesores leningradenses (Tugarinov y Rozhin) que defienden la *unidad* de la dialéctica, teoría del conocimiento y lógica como la coincidencia del todo con sus partes: un gran círculo que representa la dialéctica; otro menor, la teoría del conocimiento, y, el pequeño, la lógica. El enfoque leninista -según Kopnin- exige la *identidad* de la dialéctica, la teoría del conocimiento y la lógica. La dialéctica materialista es una ciencia única que elimina la división de la filosofía en partes autónomas.

Esta tesis, derivada de la teoría leninista del reflejo, es la que ha prevalecido. Ello significa que en ella ha adquirido cuerpo la unidad entre la teoría del ser (ontología) y la del pensamiento (gnoseología). "La lógica dialéctica -afirma Rosental-[111] se sustenta sólidamente sobre la base de la teoría materialista de la cognición, de la teoría del reflejo". Ello significa, a nivel filosófico, que no cabe examinar la esencia de la lógica al margen de las cuestiones gnoseológicas.

En lo concerniente a la relación entre la lógica formal y la lógica dialéctica, prevalece la tesis de lo que podríamos llamar *esquema de la continuidad lineal*. Según esto, la lógica formal y la lógica dialéctica no formarían dos estratos, sino uno sólo. La lógica formal constituye una etapa necesaria del conocimiento; etapa que prepara la intelección de una lógica más compleja: la lógica dialéctica. Tal posición es defendida por Rosental, Kopnin y Maltsev entre otros.

Estas tesis que podríamos llamar *clásicas* del Diamat son desarrolladas en uno u otro aspecto por autores incluso pretendidamente opuestos al dogmatismo y escolasticismo soviéticos. Así, R. Havemann 1964[112], que pretende liberar a la dialéctica de su dogmatismo y lograr una dialéctica *científica*, claudica ante la teoría del reflejo: "La lógica dialéctica es la lógica que se encuentra en las cosas mismas, y no en nuestra cabeza, sino en la realidad" (p. 187) y "la dialéctica en nuestra conciencia es el reflejo de la dialéctica objetiva" (p. 231).

E. de Gortari 1956[113] insiste igualmente en la actividad reflexiva del pensamiento dialéctico. Actividad que logra una comprensión más profunda y más clara de la realidad. La lógica dialéctica es la ciencia que estudia el conocimiento científico en su integridad; en el desenvolvimiento del pensamiento que lo refleja. La lógica formal es un caso particular y limitado de la lógica dialéctica.

A esta misma conclusión había llegado H. Lefebvre 1947[114]: "La lógica formal es uno de los momentos de la razón" (p. 195) Y "damos el nombre de *dialéctica* al movimiento más elevado de la razón..." (p. 197). La relación lógica formal/lógica dialéctica se entiende, no como una contraposición, sino como una continuidad lineal. La lógica no puede concebirse sólo como ciencia de la forma del pensamiento, separada de todo contenido; por eso la lógica formal, profundizada, no prohibe el pensamiento dialéctico, antes bien deja abierta su exigencia. La formal, lógica de la forma, es la lógica de la abstracción del contenido; el punto exacto en el que el contenido se desvanece y en el que casi sólo queda la forma. Cuando nuestro pensamiento, después de esta reducción provisional, retorna hacia el contenido, la lógica formal exige ser sustituida por la lógica concreta o lógica del contenido, es decir, la lógica dialéctica.

Plantea también Lefebvre la relación dialéctica/

---

107 *Dialektícheski materializm* (Materialismo dialéctico), Sozekgniz, Moscú, 1959.

108 *Einführung in die formale Logik*, Berlín, 1958.

109 Véase en el caso de Polonia, Z. A. Jordan, *Philosophy and ideology*, Reidel, Dord_recht, 1963, especialemente cap. IV: "Formal logic and dialectic", pp. 263-313.

110 *Diallektika kak logika*, Kiev, 1961. Trad. cast. Lidia Kuper, *Lógica dialéctica*, Grijalbo, México, 1966.

111 *Principios de lógica dialéctica*, ed. cit., p. 83.

[113] *Introducción a la lógica dialéctica*, 1956, F. C. E., México, 4ª edic. 1972.
[114] *Logique formelle, logique dialectique*, Anthropos, París, 2ª edic. 1969.

ciencia. Suscribe la tradición del Diamat y cita a la *Gran Enciclopedia Soviética:* "Los principios dialécticos son una guía para la actividad y la investigación científica". Y, aunque sea cierto que los sabios no tienen necesidad, para avanzar en el conocimiento, del materiarismo dialéctico, no deja de ser verdad que éste aporta -y sólo él- un nuevo espíritu científico".

La relación entre la lógica dialéctica y las ciencias es tratada con mayor profundidad por A. Joja[115]. La tesis central versa sobre la intrínseca conexión entre la lógica dialéctica y su metodología. La lógica dialéctica concibe las formas del pensamiento como las formas de algunos contenidos, revelando, así, la esencia misma y el contenido de las formas, de las categorías y de las leyes del pensamiento. "Esta es la razón por la cual la lógica (dialéctica), la teoría del conocimiento y la dialéctica coinciden, son sustancialmente una y la misma cosa y constituyen una trinidad en la unidad" (p. 56). Joja explica los principios básicos de la lógica dialéctica y trata algunos de sus aspectos en su aplicación a las ciencias naturales.

Pero donde la lógica dialéctica, en cuanto unida a la metodología materialista, ha recibido mayor atención es en su aplicación a la ciencia histórica y social. Lo lógico y lo histórico constituyen dos categorías presentes en todos los trabajos que, siguiendo la indicación de Lenin, tratan de explicitar el método dialéctico empleado por Marx en el *El Capital*.

M. M. Rosental 1955[116] es el primero que propone *El Capital* de Marx como el modelo clásico del paso ascensional de lo abstracto a lo concreto. Este modelo, aplicado a la economía política queda generalizado para cualquier otra ciencia; constituye la ley universal del desarrollo de los conocimientos humanos, sobre la cual se edifica la teoría de las formas del pensar. Dicha ley constituye, pues, el principio básico de la lógica dialéctica.

El problema que ahora se plantean los filósofos soviéticos radica en la interpretación de la relación categorías lógicas/categorías históricas. La tesis -de origen engelsiano- más generalizada es la que defiende la coincidencia de los procesos lógico e histórico; pero aún así, la cuestión se complica: ¿Qué proceso se toma como referencia de la coincidencia? ¿Es el proceso histórico mero desarrollo de proceso lógico que le tiene marcados sus límites, o es el proceso lógico mero reflejo del proceso histórico real?

Rosental[117] se inclina por la segunda opción: la lógica de la teoría refleja la lógica de la propia vida. Sin embargo, el estudio lógico de algunos problemas, como el de la acumulación primitiva del Capital expuesto por Marx, exige que los materiales sean dispuestos en un orden diametralmente opuesto al desarrollo real. Lo lógico refleja lo histórico, pero en una forma generalizada y reelaborada.

Alexeiev 1960[118] sostiene que el método empleado por Marx en *el Capital* ascendiendo de lo abstracto a lo concreto, es la reproducción de la estructura del objeto ya configurado, cuyos elementos se relacionan como fenómenos existentes. En esta ascensión, el orden sucesivo de las categorías no siempre coincide con el orden sucesivo real en su aspecto de contenido, pero siempre coincide con éste en su aspecto generalizado y formal. Es así como el contenido del proceso de ascensión puede reflejar tanto el desarrollo del objeto (si la tarea de la ascensión es la reproducción de la historia de dicho objeto), como el estado actual del objeto fijo y estable. Ejemplo de este segundo caso es *el Capital*.

E. V. Ilienkov 1960[119] considera el método que se eleva de lo abstracto a lo concreto como "El método científico correcto". Lo concreto en la realidad es el fin específico del pensamiento teórico, en tanto que lo abstracto es tan sólo el medio, constituye un momento, que no tiene significación por sí mismo. Pero lo que especifica al método marxista es la *praxis:* Cada paso del análisis, cada acto de reducción de lo concreto a lo abstracto debe tener en cuenta el *todo* y, en fin de cuentas, la práctica. De la teoría se pasa a la práctica, y ésta no tiene ya un fin más elevado fuera de ella. Aquí reside la diferencia entre Hegel y Marx. También Hegel concibió el desarrollo del conocimiento como la elevación de lo abstracto a lo concreto. Su idealismo comienza cuando admite como lo único concreto al Espíritu. La naturaleza que existe fuera del Espíritu no se desarrolla. Desde la inversión materialista llevada a cabo por Marx, la categoría de lo concreto puede ser empleada por todas partes, no importa en qué esfera del ser natural o social, y es independiente de todo espíritu. Hegel se interesaba por las cosas de la lógica, pero no por la lógica de las cosas.

---

[115] *La lógica dialéctica y las ciencias*, Trad. cast. Manuel Serrano, Juárez Editor, Buenos Aires, 1969.

De esta diferencia entre Hegel y Marx parte Della Volpe 1964[120] para acentuar aún más el carácter específico que la categoría de lo histórico juega en el método marxiano. Frente a la dialéctica hegeliana (dialéctica especulativa *a priori)* que hace abstracción de la historicidad de aquello que explica, la dialéctica de Marx radica en una concepción histórico-materialista que, no sólo indica las contradicciones subsistentes, sino que las explica y comprende su génesis histórica.

Della Volpe y sus discípulos (Merker, Colleti, Rossi, Cerroni) subrayan insistentemente la discontinuidad de Marx con Hegel, descartando la posibilidad de rescatar el núcleo racional de la dialéctica hegeliana. Della Volpe examina predominantemente el método empleado por Marx en la *Introducción* a la *Crítica de la Economía política* (1857) identificándolo con la dialéctica del marxismo: "El método correcto puede ser representado como un movimiento circular de lo concreto o real a lo abstracto o ideal, y de éste a aquél (el círculo positivo de materia y razón): o sea, que, con precisión lógica, consiste en un continuo e inevitable ajuste histórico de las abstracciones o categorías económicas..."[121]. En ese continuo ajuste, a) intervienen, no los simples precedentes cronológicos, sino los verdaderos *antecedentes históricos* por ser antecedentes *lógicos;* y b) el orden de las categorías no tiene por qué coincidir con aquella sucesión en que fueron factores determinantes en el curso de la historia.

La línea historicista de los dellavolpianos es atacada duramente por Althusser 1967[122]. Se mete directamente con la interpretación de Della Volpe que acabamos de exponer. En opinión de Althusser, la relación entre lo lógico y lo histórico como esencial al método marxiano es un pseudoproblema; no tiene sentido alguno preguntarse por la distinción de los dos órdenes. El término *inversión* empleado por Marx para señalar la relación entre ambos órdenes ocupa en *El Capital* el lugar de un uso analógico sin rigor teórico.

Los dellavolpianos subrayan la discontinuidad de Marx con Hegel, pero aceptan aún como "núcleo racional" el concepto de la unificación racional de los contrarios. Para Althusser y sus seguidores la discontinuidad es absoluta, y consideran insuficiente la crítica dellavolpiana a la sustancialización especulativa de Hegel. El *corte* establecido por Althusser lleva consigo la instauración de una dialéctica en la que la contradicción como unidad de contrarios es sustituida por la noción de totalidad compleja. Esta totalidad forma una unidad de estructura; una estructura en la que una parte (una contradicción entre las otras partes) se halla siempre en posición dominante. La *Sobredeterminación* define la diferencia específica de la contradicción.

En su argumentación apela Althusser[123] al folleto de Mao Tse-tung *Sobre la contradicción*, en el que encuentra expuesto, si bien en forma descriptiva, el motor de todo desarrollo.

La noción de *totalidad* -frecuentemente empleada hoy, como dice Althusser- ha jugado un papel central en el tema de la *inversión*. Señalan su importancia para los problemas de la dialéctica T. Adorno[124], L. Goldmann 1968[125], C. Luporini 1962[126]. Pero quien le ha dedicado mayor atención ha sido R. Kosik 1963[127]. Su noción básica es la de *totalidad concreta:* Totalidad que no equivale a todos los hechos, puesto que todos los hechos, por principio, no pueden ser abarcados por el conocimiento humano. Totalidad significa realidad como un todo estructurado y dialéctico, en el cual puede ser comprendido racionalmente cualquier hecho. Los hechos son conocimiento de la realidad cuando son comprendidos como hechos de un todo dialéctico; y la realidad es totalidad concreta que se convierte en estructura significativa.

Kosik sale, así, al paso de las acusaciones, tipo Popper (Miseria del historicismo), contra el método dialéctico como opuesto al científico. El método dialéctico no aparece en Kosik como opuesto al científico, sino como su complementación; como aquél que recoge los resultados del análisis para explicitarlos dentro de la totalidad concreta.

Posición ésta muy parecida a la sostenida por M. Sacristán 1964[128], quien entiende la tarea de una dialéctica materialista como la recuperación de lo concreto;

---

120 *Rousseau e Marx*. Roma, 4ª edic. 1964. Trad. cast.: *Rousseau y Marx*. Martínez Roca, Barcelona, 1969.
121 *Ibidem*, p. 150.
122 L. Althusser y E. Balibar, *Lire le capital*, Maspero, París, 1967. Trad. cast., M. Hamecker, *Para leer el Capital*, S. XXI, México, 1969.
123 *Pour Marx*, Maspero, París, 1965. Trad. cast. M. Harnecker, *La revolución teórica de Marx*, S. XXI, Buenos Aires, 1967.
124 *Drei Studien zu Hegel*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1963. Trad. cast. V. Sánchez de Zavala. *Tres estudios sobre Hegel*, Taurus, Madrid, 1969.

[125] "L'Idéologie allemande et les théses sur Feuerbach", en *L'homme et la société*, 7, 1968.
[126] "El círculo concreto-abastracto-concreto", en *Problemas actuales de la dialéctica*, Comunicación, Madrid, 1971, pp. 141-157.
[127] *Dialektika konkretniho*, 1963. Trad. cast. A. Sánchez, *Dialéctica de lo concreto*, Grijalbo, México, 1967.
[128] "Prólogo" a F. Engels, *Anti-Dühring*, Trad. M. Sacristán, Grijalbo, México, 2ª edic. 1968.

la comprensión de las concreciones o totalidades, sin hacer intervenir más datos que los materialistas del análisis reductivo: "El análisis marxista se propone entender la individual situación concreta (en esto es pensamiento dialéctico) sin postular más componentes de la misma que los resultados de la abstracción y el análisis reductivo científico (y en esto es el marxismo un materialismo)" (p. XVII).

La noción de *totalidad concreta* sirve para eliminar las acusaciones neopositivistas en el terreno de la metodología. Al mismo tiempo, sirve para escapar al problema de la inversión de la dialéctica hegeliana por la marxista. Pero ello a costa de relegar a un segundo plano la categoría que, parece, es esencial a la dialéctica: la contradicción.

Para G. Bueno 1972[129] no es suficiente decir que una *totalidad concreta* es dialéctica por definición. Será preciso presentarla de suerte que se conozca el nexo de necesidad que liga a los principios específicos de su constitución. Dialéctica en sentido fuerte implica contradicción, y "un sistema es contradictorio cuando su propio desarrollo le conduce a su desaparición -y, en tanto que ello no ocurre, no cabe hablar de contradicción" (p. 382).

La noción de *contradicción* -como hemos indicado más arriba a propósito de la dialéctica hegeliana- ocupa el núcleo mismo de la lógica dialéctica. En N. Lobkowicz 1959[130] se recogen trabajos de autores soviéticos sobre el principio de contradicción. En general, se parte de la distinción entre contradicción real y contradicción lógico-formal. Se rechaza la tesis que sostiene que un proceso sería dialéctico si la teoría de este proceso comporta contradicciones lógicas. La existencia de contradicciones en la naturaleza no implica la realidad de contradicciones lógicas en la ciencia.

Se plantea de nuevo la pregunta siguiente: ¿Es posible desarrollar la lógica dialéctica en forma de un sistema de constantes y variables? Los lógicos soviéticos opinan que no: Zinoviev 1960[131] explica que el carácter de la dialéctica excluye el que ésta pueda ser formalizada en un cálculo lógico. Todos los intentos de explicar la dialéctica en un sitema de cálculo -dice- sólo pueden dar como resultado situaciones paradójicas.

No llegan, en cambio, a esa misma conclusión otros lógicos. A los intentos de Günther o Kosok por formalizar la lógica hegeliana siguen otros desde la perspectiva marxista.

Formalización de la dialéctica marxista

L.Apostel 1967[132] basándose en los trabajos recopilados por Lobkowicz distingue entre contradicción real y contradicción lógica. Las contradicciones lógicas no pueden admitirse nunca, y, por tanto, la dialéctica no puede buscar la contradicción en el plano formal, sino en el plano material. "Decimos que existe una contradicción real entre dos sucesos, si existe un isomorfismo parcial entre la relación de estos dos sucesos, por una parte, y la relación de una proposición y de su negación por otra. La contradicción es en lógica el elemento cero de un álgebra boolena por relación a la intersección" (p. 364).

La mejor aproximación a la formalización de la dialéctica la ve Apostel desde la perspectiva que ofrece la teoría general de los sistemas. "Una combinación de una sintaxis, semántica y pragmática diacrónica de Suszko con las formalizaciones de Jaskowski, de Prior y de Rogowski, puesta en relación con los sistemas polivalentes y algoritmos automodificadores: Esto es lo que constituiría la mejor aproximación a una dialéctica" (p. 372).

El dualismo *formal-material*, como asidero para establecer la relación lógica formal-lógica dialéctica, adopta diversas modalidades. A la distinción entre contradicción material-contradicción formal cabe añadir esta otra: Verdad material (real)-verdad formal (analítica). Esta perspectiva fue adoptada por Chelpanov 1946[133], quien considera una proposición verdadera materialmente cuando corresponde a la realidad o a las cosas, y una proposición verdadera formalmente, si se deduce con verosimilitud de otras proposiciones.

Recientemente G. Bacca 1970[134] ha vuelvo a poner esta distinción en relación con la dualidad lógica formal-lógica dialéctica. La lógica dialéctica tiene que ver con lo real, de modo que, si formamos la tabla de valores con *1(v)* (lógicamente verdadero) y *r(v)* (realmente verdadero), la lógica dialéctica se guía siempre por el predominio de lo real. Así, una proposición *1(v)* & *r(f)* da como resultado *r(f)*; y si tiene los valores *1(f)* & *r(v)*, su resultados es *r(v)*. "En lógica dialéctica el predominio corres-

[129] *Ensayos materialistas*, Taurus, Madrid, 1972.
[130] *Das Viderspruchsprinzip in der neuren sowjetischen Philosophie*, Reidel, Dordrecht, 1959.
[131] *Filosofía y lógica*, Pueblo y Educación, La Habana, 1963. (Trad. cast. de lógica polivalente). Instituto de Filosofía, Academia de

132 "Logique et Dialectique", en *Logique et connaissance scientifique*, La Pléiade, vol. 22, Gallimard, 1967, pp. 357-374.
133 *Lógica*, Moscú, 1946.
134 "Lógica dialéctica" (L. D.) y lógica formal (L. F.)", en *Dianoia*, 16, 1970, pp. 144-156.

ponde a lo real. Lo real es realmente indiferente respecto de lo lógico (formal)" (p. 155).

Si bien un tanto modificada, esta dualidad: material (real)-formal está en la base del proyecto de J. Gorren 1969[135]. El dualismo queda establecido ahora entre hechos e ideas: "Hegel construye la dialéctica de las ideas en el lenguaje... la dialéctica de los hechos es, en Marx, un enderezamiento de la dialéctica de las ideas" (p. 13). La lógica dialéctica se aplica a los hechos; para ello es necesario sobrepasar el sistema de Boole, pero al mismo tiempo, como la lógica moderna, la dialéctica debe ser sometida al rigor de un algoritmo.

Parte Gorren del cálculo frecuencial como el verdadero álgebra de la dialéctica. Mediante él establece "un cálculo formal de hechos" y formula "analíticamente" sus juntores (conjunción, disyunción, implicación), sus oposiciones (contrariedad, subcontrariedad y complementariedad), sus contradicciones y las principales leyes de la dialéctica, de las cuales "la ley de acción y reacción es fundamental y universal", y queda formulada así: $A > B \rightarrow NB > NA$ (si una causa produce un efecto, la negación del efecto produce la negación de la causa). "La dialéctica de los hechos es aplicable a los términos que los representan en el discurso, en el diálogo, en el pensamiento, y esto constituye la dialéctica racional" (p. 44). Frente a la lógica clásica que inmoviliza el movimiento y expresa las cosas *en Ser*, el proceso dialéctico -dice Gorren- expresa las cosas en devenir, y consiste en una serie de fases que contienen cada una las síntesis de las contradicciones de la fase precedente. La síntesis de una contradicción es la conjunción de los negativos de los términos exclusivos. Su representación formal es como sigue:

tesis: $A < sB \quad B' \rightarrow A < B'$

antítesis: $B < sA < A' \rightarrow B < A'$

$\Big|$ $A'\,B'$: síntesis

"La lógica clásica ignora esto porque todos sus términos son bilaterales. El negativo se confunde, entonces, con el complementario y la síntesis reproduce la contradicción en el recortado sistema de Boole"(p.45).

B. V. Sesic 1972[136] critica la *lógica del ser* (lógica clásica) y se lanza a la formalización de la *lógica del cambio* (lógica dialéctica), cuyos principios básicos concuerdan con los desarrollados por F. Spisani 1970[137]. La lógica del cambio "representa la lógica del pensamiento sobre objetos cambiantes y en desarrollo". Sesic expone el sistema básico de dicha lógica. Basándose en la notación de Rogowski (ver *supra*), representa mediante $\overrightarrow{p}$ un cambio del significado de la proposición p o del hecho p en la dirección de la semiflecha; mediante $\overleftarrow{p}$, lo mismo, pero en sentido contrario; $\rightarrow$ significa la evolución en un determinado sentido. Su "lógica del cambio y del desarrollo" abarca la región de las *c d-proposiciones* (las proposiciones cambiantes y en desarrollo). Axiomas básicos son: a) El de la "identidad dialéctica", $\overrightarrow{p} \equiv \overrightarrow{pq}\ o\ \overrightarrow{p} \Rightarrow \overrightarrow{pq}$; b) el de la "contradicción dialéctica, por ejemplo, $\overrightarrow{pq} \Rightarrow (p \overrightarrow{\Leftrightarrow} q)$; c) el del "proceso de integración", $(pq \Rightarrow rs) \Rightarrow$ pqrs); d) el del "proceso de simplificación", $pqr \Rightarrow pq$; e) el del "proceso de disyunción", $\overrightarrow{pq} \Rightarrow (\overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \vee \overrightarrow{p}\ \overleftarrow{q} \vee \overleftarrow{p}\ \overrightarrow{q} \vee \overleftarrow{p}\ \overleftarrow{q})$ f) el del "cambio o desarrollo dialéctico", $(\overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \Rightarrow (\overrightarrow{p} \Leftrightarrow \overrightarrow{q}))\,(t_o)\ \overrightarrow{rs}\ (t_1)$. De los axiomas, junto con los principios de la negación, se deducen varios teoremas.

En la segunda parte de su trabajo desarrolla Sesic una "lógica modal-temporal del desarrollo", siguiendo el mismo esquema que en su "lógica del cambio y del desarrollo". Su sistema es *modal* tridimensional (posibilidad, probabilidad y necesidad) y *temporal* tridimensional (pasado, presente y futuro). Y su pretensión es presentarlo como, "no sólo el más complejo, sino también el más completo sistema de la lógica modal temporal del desarrollo" (p. 27).

En general, los intentos por formalizar la dialéctica han sido escasos, y el camino emprendido se pierde por múltiples senderos, la mayoría carentes del mínimo rigor lógico, lo que nos descarga de la obligación de mencionarlos.

G. Bueno 1973[138] propone plantear el problema en otros términos: En vez de formalizar la dialéctica, lo que se necesita es "dialectizar la lógica". La lógica dialéctica no puede construirse al margen de la lógica formal, pero sin que ello signifique la reducción de la primera a la segunda. La lógica dialéctica, en cuanto lógica trascendental, aun girando en torno a la *identidad* (y, por tanto, al principio de identidad) puede incorporar en su campo la *contradicción*. La identidad (lógica) y la contradicción (dialéctica) constituyen dos "conceptos conjugados" entre los que se establece un

[135] "Theorie analytique de la dialectique", en *Epistemologie sociologique*, 7, 1969, pp. 9-47.
[136] *Logic of Change*, Centro Superiore di Logica e Scienze comparate, Bologna, 1972.
[137] "Principles of Productive Logic", en *Internacional Logical Review*, nº 1, 1970 y siguientes.
[138] *Proyecto para una lógica de las ciencias humanas*, Multicopiado, Oviedo, 1973.

"esquema de conexión diamérica", es decir, cada término de la pareja es tomado como no enterizo, sino triturado en partes homogéneas, de suerte que la conexión entre dichas partes tiene lugar mediante el otro término. Así supuesta la identidad, no como una unidad abstracta, sino como la multiplicidad de esquemas de identidad, la contradicción aparecerá diaméricamente como una relación que en determinadas condiciones brota entre diferentes esquemas de identidad, y, a su vez, la identidad surge del ajuste entre contradicciones. De este modo, podría decirse que la contradicción (dialéctica) no excluye la identidad (lógica), sino que ciertamente la incluye, ya que tiene lugar en el seno mismo de las identidades; en el conflicto entre ellas. Con ello quedan eliminados los dualismos en los que habían quedado insertas las relaciones entre la lógica formal y la lógica dialéctica.

Finalmente, sobre un punto parecen estar de acuerdo todos los investigadores de la lógica dialéctica: En dejar de ver la lógica formal como la expresión de la legalidad generalísima de la logicidad y como puramente formal, neutral y, por consiguiente, carente de materia. Ello queda de manifiesto si adoptamos la tesis de que la Lógica gira en torno a la identidad como relación. En tanto que la identidad es una determinación ontológica, es precisamente a través de la identidad por donde se establece la conexión entre Ontología y Lógica. Ideas tales como las de *sustancia* o *esencia* son genuinamente ontológicas, pero estas ideas son precisamente esquemas de identidad.

Por este motivo los lógicos dialécticos insisten en incluir esquemas ontológicos en el campo de la lógica. Decisión, por lo demás, justificada históricamente. No sólo Hegel incluyó múltiples análisis de esquemas ontológicos en su *Ciencia de la Lógica*, sino también Kant, cuya *Lógica trascendental* contiene la teoría de las categorías; y en la misma *Logica maior* de los escolásticos se daba cabida a los conceptos de *individuo* (sustancia), de *especie* y *género* (esencia) y a otras muchas determinaciones ontológicas de identidad.

BIBLIOGRAFIA

Lógica trascendental

Textos:

Kant, Immanuel (1724-1804), *Werke*. Edic. de Ernest Cassirer et alii. 10 vols. Berlín 1912-1921. Por donde citamos. Sus principales obras concernientes a la Lógica:

-Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren (1762)

-Kritik der reinen Vernunft (1781). Trad. J. Perojo. Losada, Buenos Aires, 1938.

-Logik (1800) (compendio de las lecciones de Kant sobre Lógica, publicado por su discípulo G. Jäsche). Trad. frac. de J. Tissot. París, 1840. Trad. cast. de la edic. francesa por A. García Moreno y J. Ruvira. Madrid, 1875.

Fichte, Johann Gottlieb (1762-1814), *Über den Begriff der Wissenschaftslehre oder der sogenannten Philosophie*. 1ª edic. Weimar, 1794. Reedic. ampliada. Jena/Leipzig, 1798, en *Werke*, ed. de F.

Schelling, Friedrich Wilhelm Joseph (1775-1854), *System des transzendentalen Idealismus*. Tubinga, 1800, en *Werke*, ed. de M. Schröter, vol. II. Munich, 1927.

-Vorlesungen über die Methode des akademischen Studiums, 1803, en *Werke*, ed. cit., vol. III.

Estudios:

Barone, F., *Logica formale e logica trascendentale*, vol. 1. Turín, 1957.

Couturat, L., "La philosophie des mathématiques de Kant", en *Les principes des Mathématiques*. París, 1905, pp. 235-308.

Cassirer, E., *Kants Leben und Lehre*. Berlín, 1918.

Dubarle, D., "La logique du jugement et les catégories chez Kant", en *Revue des sciences philosophiques et theologiques* (París), L II (1968), pp. 3-37.

Medicus. vol. I. Leipzig, 1911, pp. 155-215.

-*Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre*. Jena/Leipzig, 1794, en *Werke*, ed. cit., vol. I., pp. 286.

Garulli, E., "Note sulla logica formale nel pensiero di Kant", en *Studi Urbinati* (Urbino), XLVI (1972), pp. 191-221.

Guzzo, A., *Kant precritico*. Turin, 1924.

Mangione, C., *Introduc.* a trad. ital. *La falsa sottigliezza delle quattro figure sillogistiche*, en *Rivista critica di storia della filosofia*, XX (1965), pp. 481-86.

Menzel, L., "Das Problem der formalen Logik in der Kritik der reinem Vernunft", en *Kantstudien* (Berlín) LVI (1965), pp. 396-411.

Neeman, U., "Analytic and Synthetic Propositions in Kant and Bolzano", en *Ratio*, XII (1970), pp. 1-25.

Reich, K., *Die Vollständigkeit der Kantischen Urteilstafel*, 2ª edic. Berlín, 1948.

Steckelmacher, M., *Die formale Logik Kant's in ihren Beziehungen zur transcendentalen*. Breslau, 1879.

Tonelli, G., "L'origine della tavola dei giudizi e del problema della deduzione della categorie in Kant", en *Filosofía* (Turín), VII (1956), pp. 129-138.

Psicologismo

Textos:

Stuart, Mill, John (1806-1873)

-*A system of logic ratiocinative and inductive*. 2 vols. Lodres, 1843. Edic. de J. M. Robson, Introduc. de R. M. McRae, en *Collected Works*, vol. VII. Routledge and Kegan, Londres, 1973.

-*An examination of sir W. Hamilton's philosophy*. Edic. de J. M. Robson. Introduc. de A. Ryan, *Ibidem*, 1979.

Fries, Jakob Friedrich (1773-1854)

-*Neue Kritik der Vernunft*. 3 vols. Heidelberg, 1807.

-*System der Logik*. Heidelberg, 1811.

Beneke, Friedrich Eduar (1798-1854)

-*Erkenntnislehre nach dem Bewusstsein der reinen Vernunft in ihrem Grundzügen dargelegt*. Jena, 1820.

-*Lehrbuch der Logik als Kunstlehre des Denkes*, Berlín, 1832.

Sigwart, Christoph (1830-1904)

-*Beiträge zur Lehre von hypothetischen Urteil*. Tubinga, 1871.

-*Logik*, 2 vols., Tubinga, 1873-78.

Wundt, Wilhelm (1832-1920)

-*Grundzüge der physiologischen Psychologie*. Berlín, 1874.

-*Logik*, 2 vols., Stuttgart, 1880-83.

Erdmann, Benno (1851-1921)

-*Logische Studien*. Leipzig, 1882-83.

Estudios:

Brochard, V., "La logique de J. Stuart Mill", en *Etudes de philosophie ancienne et de philosophie moderne*. Vrin, París, 4ª edic. 1974, pp. 384-445.

Gaos, J., "La crítica del psicologismo en Husserl" en *Introducción a la Fenomenología*. México, 1960.

Giulietti, G., *La dottrina dell'induzione nel sistema di G. S. Mill*. Verona, 1958.

Gómez Izquierdo, A., *Análisis del pensamiento lógico*. Granada, 1928.

Kantor, J. R., *Psychology and Logic*. Bloomington, Indiana, 1945.

Kubitz, D. A., *Development of J. St. Mill's System of Logic*. Urbana, 1932.

Stebbing, L. S., *Analysis of Logic of J. S. Mill*. Londres, 1867.

Towney, G. A., *J. St. Mill's Theory of Inductive Logic*. Cincinnati, 1909.

Lógica dialéctica

Textos:

Hegel, G. W. F. (1770-1831):

-*Die Phänomenologie des Geistes*, (1807). Trad. W. Roces: *La Fenomenología del Espíritu*. F. C. E., México, 1966.

-*Wissenschaft der Logik* (1812-16). Trad. A. y R. Mondolfo, *Ciencia de la Lógica*. Solar, Buenos Aires, 1968.

-*Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften in Grundrisse* (1817).

-*Logik*, 1ª parte de la *Enzyklopädie*, 1840. Trad. Antonio Zozaya. reimpres. Orbis, Barcelona, 1984.

Marx, K. (1818-1883)-Engels, F. (1820-1895), *Werke*. 30 vols. +. Berlín, 1957.

Estudios:

Croce, B., "Hegel et l'origine de la dialectique", en *Revue internationale de Philosophie* (Bruselas), VI (1952), pp. 12-26.

Günther, G., "Formalisierung der transzendentaldialektischen Logik", en *Hegel-Studien*, I (1964), pp. 64-130.

Dubarle, D. -Doz, A., *Logique et Dialectique*. Larousse. París, 1972.

Gorren, J., "Theorie analytique de la dialectique", en *Epistémologie Sociologique*, 7 (1969), pp. 9-47.

Gauthier, Y., "Logique hégélienne et formalisation", en

-*Logik*. Halle, 1892.

Lipps, Theodor (1851-1914)
-*Grundzüge der Logik*. Hamburgo, 1891.

Dialogue, VI (1967), pp. 151-66.

Hartmann, E., *Über die dialektische Methode*. Darmstadt, 1963.

Hyppolite, J., *Logique et existence. Essai sur la logique de Hégel*. París, 1953.

Joja, A., *La Lógica dialéctica y las ciencias*. Trad. M. Serrano. Juarez. Buenos Aires, 1969.

Klaus, G., "Hegel und die Dialektik in der formalen Logik", en *Deutsche Zeitschrift für Philosophie* (Berlín), XI (1963), pp. 1489-1503.

Kosok, M., "The formalization of Hegel's Dialectical Logic", en *International Philosophical Quarterly*, VI (1966), pp. 596-631.

McTaggart, J., *A commentary on Hegel's logic*. Cambridge, 1910.

Pelloux, L., *La logica di Hegel*. Milán, 1938.

Norman, R. - Sayers, S., *Hegel, Marx & Dialectic. A debate*. Harvester Press, 1980.

Rosen, M., *Hegel's Dialectic and its criticism*. Clarendon, Oxford, 1980.

Rossi, M., *Marx e la dialettica hegeliana*. Roma, 1960.

Sesic, B. V., *Logic of change*. Bolonia, 1972.

Spisani, F., "Principles of Productive Logic", en *International Logical Review*, 1 (1970) (y en todos los números siguientes).

Velarde, J.

-"Lógica dialéctica", en *Teorema*, IV (1974), pp. 177-197.

-"Lógica dialéctica", en *Teorema*, VII (1977), pp. 129-140.

XII. El álgebra de la lógica

1. Antecedentes

La situación por la que atravesaba la Lógica en las universidades del Reino Unido (las de Oxford y Cambrige, la irlandesa de Dublín, y las escocesas de S. Andrews, Glasgow, Aberdeen y Edimburgo) durante el siglo XVIII era de franca mediocridad.

En Oxford los estudios se orientaban a la formación de hombres de Iglesia, poniendo especial énfasis en las disciplinas clásicas y los problemas teológicos y religiosos. De obligada lectura eran allí el *Organon* aristotélico y las compilaciones o simplificaciones como el *Artis logicae compendium* (1691) de Aldrich. Esta universidad, en la que se habían formado figuras como Duns Scoto y Ockam, era la única en la que se mantenían discusiones en torno a la temática del *primer* romanticismo dominante en el continente, destacando: Hampden, Keble, Arnold, White, Whately y el futuro cardenal Newman. Y, pese a que en el Reino Unido la característica del pensamiento era precisamente la insularidad, se producían a la vez fermentos originales. En Oxford, concretamente, aparecen los primeros síntomas de reacción contra el tradicionalismo académico.

En Cambridge la enseñanza se encontraba subordinada a estudios de Física y Matemáticas, siendo el lugar donde existía una mayor oposición a la Lógica. En este centro había estudiado Barrow, maestro de Newton y contrario a los estudios sobre la Lógica aristotélica. Más tarde se comienza a profundizar en la filosofía griega y los profesores de materias científicas investigan sobre la metodología de las ciencias experimentales; entre ellos destacan John Herschel[1] y William Whewell[2], que constituyen el espíritu anticipador de Stuart Mill, el cual no es favorable a la consideración de los procedimientos deductivos, sino a la subordinación de los mismas a la técnica inductiva.

Dublín padecía una decadencia de las disciplinas filosóficas. Muestra de esa decadencia en Lógica es el *Compendium of logic* de Murray.

En las Escuelas escocesas habían descollado grandes figuras en el siglo XVIII, especialmente Dalgarno con su obra *Ars signorum* del año 1661. El programa general de estas escuelas se basaba en la silogística aristotélica acompañada de la *Isagogé* de Porfirio y de las *Summulae Logicales* de Pedro Hispano. En Glasgow, las líneas maestras de estudio se afianzaban en la división entre la *Logica Vetus*, que comprende el estudio de Porfirio sobre los universales y las *Categorías* y el *De Interpretatione* de Aristóteles, y la *Logica Nova*, que recoge a los *Analíticos*, *Tópicos*, *Elementos Sofísticos* y la obra de Pedro Hispano: *Summulae logicales*.

Pero, como se ha dicho antes, no obstante la postración en que se hallaban los estudios de Lógica, sin embargo, a pesar de, o precisamente por, su aislamiento respecto del pensamiento continental, aparecen en Inglaterra y concretamente en Oxford, los fermentos para una nueva vitalidad de la Lógica. En este sentido hay que mencionar los *Elements of Logic* de Richard Whately, publicados en Londres en 1826. La obra de Whately produce un doble efecto beneficioso para la lógica. En primer lugar, porque su publicación suscitó curiosidad y discusiones sobre la lógica, a las que siguieron nuevas publicaciones (de Bentham, de Huyshe, de Hamilton, etc.) con un estilo nuevo, no manualístico. Y, en segundo lugar, porque, si bien en la obra de Wathely no hay contribuciones de importancia técnico-formal, sin embargo, la definición que da de lógica muestra una nueva orientación en la que la lógica alcanzará el status que le correspondía.

[1] *A preliminary discourse on the study of natural philosophy*, Londres 1831.
[2] *History of the inductive sciences*, Londres, 1837, y *The philosophy of the inductive sciencies*, 2 vols., Londres, 1840.

La primera de las características de la lógica resalta-
da por Wathcley es su cientificidad: "La lógica en el
sentido más estricto en que sea oportuno usar este
nombre puede ser considerada como la ciencia y, por
lo tanto, como el arte de razonamiento... Su oficio
propio es el de instituir un análisis de los procesos de
la mente en el razonamiento; y, desde este punto de
vista, como se ha dicho, es estrictamente, una cien-
cia". Frente a la tradición continental de Wolff o los de
Port-Royal, quienes tendían a identificar lógica con
arte de pensar, relegándola al plano epistemológico o
gnoseológico, la determinación de Wathely supone
una elevación de rango de la lógica, colocándola en un
plano propio: ciencia de los procesos deductivos, y
atención al aspecto formal de la argumentación.

La segunda caracterización de la lógica, original de Wathely, es la conexión indisoluble de la lógica con el lenguaje: "Son muchos los que critican un tratado de lógica, como el presente, que sostenga tener por argumento el *lenguaje*, y hablan de la ciencia, como tratando de la comparación de ideas abstractas, de las que el lenguaje, sostienen, proporciona sólo los *nombres*... yo sostengo que no se conoce ninguna de estas 'ideas abstractas' o 'universales' al margen de los *signos*". "El lenguaje proporciona los signos con los que las operaciones de la mente son, no sólo expresadas y comunicadas a los demás, sino también, la mayor parte, comprendidas por nosotros mismos".

La tesis de la íntima conexión entre lógica y lenguaje explícitamente defendida por Wathely constituirá uno de los pilares en los que se apoyará la obra de Boole en su aspecto simbólico, y constituirá también una barrera contra las tesis psicologistas de Hamilton.

Entre los escritos sobre lógica que provocó la obra de Wathely merece recordarse el *Outline of a new system of logic* de Bentham[3]. El escrito de Bentham adquiere significación, no tanto por seguir o contradecir las tesis de Wathely, cuanto por estar relacionado con un *descubrimiento* que, según algunos, consiguió después de muchos siglos, revolucionar la Lógica: la cuantificación del predicado.

En el capítulo VIII del *Outline* estudia Bentham las relaciones de identidad y de diversidad que pueden mediar entre el sujeto y el predicado de una proposición considerada desde el punto de vista extensional, en el que los términos (sujeto-predicado) aparecen como clases de individuos. En tal caso la identidad y la diversidad pueden tener lugar:

1) Entre *cada uno* (uno cualquiera) de los individuos designados por uno de los términos y cada uno de los individuos designados por el otro término.
2) Entre *cada uno* de los individuos designados por uno de los términos y *cada uno, de una parte* tan sólo, de los individuos designados por el otro. Por ej.: la identidad entre hombres y animales.
3) Entre *todo* individuo de *una parte* tan sólo de los individuos designados por un término y *todo* individuo de *una parte* tan sólo de los individuos designados por el otro término. Por ej.: la identidad de los cuadrúpedos y de los animales nadadores. "Cuando un término es aplicado a *cada uno* de los individuos designados por un nombre común, es universal; cuando se aplica a *cada uno*, de *una parte* tan sólo, de estos individuos, es parcial... Las proposiciones simples, consideradas con respecto a dichas relaciones pueden también ser afirmativas o negativas, y todo término puede ser universal o particular. Estas proposiciones son reducibles a los ocho formas siguientes... He expresado los dos términos con las letras X e Y, la identidad entre ellas con el signo matemático =, la diversidad con el signo //, la universalidad con el término *in toto*, la particularidad con el término *ex parte;* o, para mayor brevedad, anteponiendo las tetras t y p como signos de la universalidad y de la particularidad. Estas formas son:

1. X in toto = Y ex parte, o $tX = pY$
2. X in toto // Y ex parte, o $tX \mathbin{/\!/} pY$
3. X in toto = Y in toto, o $tX = tY$
4. X in toto // Y in toto, o $tX \mathbin{/\!/} tY$
5. X ex parte = Y ex parte, o $pX = pY$
6. X ex parte // Y ex parte, o $pX \mathbin{/\!/} pY$
7. X ex parte = Y in toto, o $pX = tY$
8. X ex parte // Y in toto, o $pX \mathbin{/\!/} tY$"[4]

El número de estas formas sufre una reducción en virtud de que para el establecimiento de las relaciones de identidad y de diversidad, resulta impertinente el orden de los términos entre los que dichas relaciones se establecen. En consecuencia, las dos fórmulas 7. y 8. pueden ser consideradas idénticas, respectivamente a las fórmulas 1. y 2. También la 2. puede ser suprimida, puesto que la 4. la expresa de manera más convincente para la deducción. Quedan, pues, cinco formas proposicionales, de las que Bentham subraya la impor-

[3] George Bentham (1800-1884), sobrino del célebre moralista Jeremías Bentham. Descolló por sus investigaciones en botánica.
[4] *Opus. cit.*, pp. 130-34.

tancia de la forma $tX = tY$, que expresa la identidad perfecta; y avisa de los errores derivados de considerar sinónimos los términos entre los que rige sólo la relación $tX = pY$.

El mérito de Bentham no reside en ser el primero en señalar la posibilidad de cuantificar el predicado, sino en determinar todas las combinaciones posibles de proposiciones que permite la cuantificación del predicado.

William Hamilton (1788-1856)

Hamilton es el principal valedor de la doctrina kantiana en Inglaterra. Sus escritos sobre Lógica fueron poblicados póstumamente[5], constituyendo fuente de su pensamiento las reflexiones de T. S. Baynes en uno[6] de sus ensayos más destacados.

William Hamilton nació en Glasgow en 1788. Su padre murió dos años más tarde, pero dejó suficientes medios para la educación de sus dos hijos: William y Thomas.

En 1806, William fue a estudiar a Edimburgo y un año más tarde a Oxford donde pasó cinco años, dedicando la mayor parte del tiempo al estudio de disciplinas muy dispares, desde el lenguaje hasta la alquimia, y distinguiéndose pronto por su erudición. Viajó también a Alemania para tomar contacto con la filosofía continental.

En 1820, se presentó como candidato a una plaza de profesor de Filosofía Moral en la universidad e Edimburgo. Pero la plaza fue para John Wilson, amigo de Hamilton.

Hamilton publica su primer trabajo[7] en 1829, en el que se deja sentir la influencia kantiana. En opinión de Hamilton el pensamiento humano impone condiciones a sus objetos de conocimiento en el sentido de que, cuando se piensa algo, nuestra mente lo subsume bajo un concepto. En este sentido sólo "lo condicionado" deviene un objeto de conocimiento, mientras que lo absoluto o "incondicionado" no puede serlo. Pero lo condicionado se halla en el medio de dos opuestos incondicionados, los cuales no son concebibles, pero sabemos al menos que uno de ellos es verdadero y el otro falso, y ello en virtud de los principios de contradicción y de tercero excluido. De aquí parece inferirse que para Hamilton la verdad se obtiene tomando una vía intermedia entre opuestos absolutamente alternativos que *per se* no son objetos de pensamiento.

El trabajo anterior reportó a Hamilton una alta reputación en los círculos filosóficos porque mostraba muy buen conocimiento de la filosofía continental. Y esa reputación le ayudó a obtener en 1836 la cátedra de Lógica y Metafísica en la Universidad de Edimburgo. En 1844, probablemente a causa de pasar todas las noches trabajando, sufrió un ataque de parálisis. Desde entonces, hasta su muerte, ocurrida en 1856, decreció considerablemente su actividad intelectual.

Su afición polifacética por muchas disciplinas le impidió profundizar y ser un especialista en una particular. Había, empero, una disciplina por la que, si no sentía aversión, sí al menos desagrado: era la Matemática.

En su artículo "On the study of the mathematicas as an exercice of the mind"[8], con ocasión de un ensayo de William Whewell[9] sobre el estudio de la matemática como parte de la educación liberal, defiende Hamilton la educación humanística, que culmina en la Filosofía, contra la educación matemático-científica, contraponiendo el *método filosófico* al *método matemático*. Y comentando la comparación que Whewell hacía en su folleto entre Lógica y Matemáticas, sostiene Hamilton que tal comparación ni siquiera es posible, porque la lógica es una ciencia más amplia que las Matemáticas. Hamilton divide la Lógica en:

a) *Lógica teórica:* que analiza las leyes del pensamiento.

b) *Lógica práctica:* que tiene a su vez dos ramas.

b_1) Una trata con la materia necesaria.

b_2) La otra con la materia contingente.

Sólo la rama práctica que trata con la materia necesaria puede ser comparada, o mejor, identificada con las Matemáticas.

De manera que Hamilton asigna a las Matemáticas un lugar limitado dentro de la Lógica. Y añade las siguientes aserciones:

a) Cae fuera del dominio de las Matemáticas inquirir sobre los orígenes y naturaleza de sus propios principios.

[5] *Lectures on Metaphysics and Logic*, Edic. de H. L. Mousel y John Veitch 4 vols, Edimburgo, 1859-1861, (los trabajos sobre Lógica ocupan los vols. III-IV.
[6] *An essay on the new analytic of logical forms*, Edimburgo, 1850. En este ensayo el propio Baynes

[7] *On the philosophy of the unconditioned, in reference to Cusin's infinito-absolute*, *Edinburgh Rewiev*, 50 (1829), pp. 194-221.
[8] *Edinburgh Review*, 62, (1836), pp. 409-455.
[9] *Thoughts on the study of mathematics as part of a liberal education*, Cambridge, 1835.

b) Las Matemáticas nada dicen sobre las verdades necesarias, sino, más bien, sobre inferencias necesarias.

c) Poner el énfasis sobre una disciplina parcial como las Matemáticas produce un desarrollo desproporcionado de una potencia a expensas de otras.

d) Ninguna otra disciplina tiende a cultivar un tan pequeño número de facultades de una manera más parcial que las Matemáticas.

Contra Whewell, que había sostenido la superioridad de la Matemática sobre la Lógica tradicional para la educación de la capacidad racional, Hamilton acumula gran cantidad de citas de autores clásicos y modernos sobre la aridez, el mecanicismo y la abstracción de la Matemática, sin revelar que la mayor parte de tales citas en sus contextos originales están en función no sólo antimatemática, sino también antilógica.

El centro de la tesis de Hamilton es, sin embargo, la afirmación de la superioridad de la Filosofía (a la que pertenece la Lógica Formal) sobre la Matemática, sobre la base de su misma naturaleza: la Matemática no sabe ni puede fundar sus propios principios y apela, por ello, a la ciencia de las causas, a la Filosofía: "Las matemáticas no saben nada de las causas, y la filosofía es la ciencia de las causas. La primera enseña tan sólo *el qué* (τὸ ὅτι), y la segunda investiga, sobre todo, *el por qué* (τὸ διότι). La verdad de la Matemática es el acuerdo del pensamiento con la existencia. De ahí, lo absurdo de cualquier aplicación del método matemático a la Filosofía".

La determinación de la Matemática como limitada al *qué*, a las relaciones de cantidad, o para hablar más exactamente, a una sola relación de la cantidad: la igualdad y la desigualdad, es hecha por Hamilton de modo dogmático, con total indiferencia hacia todas aquellas exigencias metodológicas que precisamente por aquellos años venían siendo puestas de manifiesto por los matemáticos ingleses sobre fundamentos del Análisis y del Algebra.

El simbolismo matemático es, según él, un factor constitutivo de la mecanicidad de los procedimientos que evitan educar el pensamiento. La Lógica puede, ciertamente, valerse de signos oportunos en la exposición de sus doctrinas, pero en cuanto parte de la Filosofía no condivide la naturaleza, que es "ocuparse de aquellas nociones generales que son *pensadas* en el intelecto, pero que no pueden ser *representadas* en la imaginación"[10].

Naturaleza de la lógica

Entiende, al modo kantiano, la Lógica en sentido formalista. La Lógica queda vinculada, no a la cosa en sí proscrita por Kant, sino a la forma. Las leyes lógicas son las conexiones, no de las cosas, sino de las formas del pensamiento en cuanto que son las condiciones del pensamiento. Lógica es, según ésto, el puro operar bajo estas condiciones. Estas condiciones del pensamiento son *necesarias*.

> "La Lógica -dice Hamilton- no considera las cosas como ellas existen realmente y en sí mismas, sino solamente las formas generales del pensamiento bajo las cuales quedan concebidas por el espíritu... Siempre me ha extrañado que la Lógica no haya sido purgada desde hace mucho tiempo de esta mezcla de metafísica. Kant, cuyos puntos de vista sobre el dominio y la naturaleza de esta ciencia eran particularmente exactos, y de cuya sagacidad, unida a la de Aristóteles, permitía esperarlo todo, Kant, digo, lejos de eliminar la modalidad de los silogismos y de las proposiciones, sancionó su derecho de ocupación deduciendo de ella, como de un elemento esencial a la Lógica, la última de sus cuatro categorías genéricas o formas fundamentales del pensamiento. Nada más claro, sin embargo, que la modalidad nada tiene que ver con la Lógica. La Lógica es una ciencia formal: no se ocupa de la existencia real ni de sus relaciones, sino solamente de la existencia y de las relaciones que se manifiestan bajo las condiciones del pensamiento y que están regladas por estas condiciones... No se sabe nada de la falsedad o verdad de las proposiciones en sí mismas, y no las tiene en cuenta. En Lógica, todo lo que no es contradictorio es verdadero. La Lógica no garantiza las premisas ni la conclusión, sino únicamente la consecuencia de la última a las primeras. Pues un silogismo no es otra cosa que la afirmación explícita de la verdad de una proposición, en la hipótesis de que otras proposiciones que la contienen implícitamente sean verdaderas. Luego una conclusión puede ser verdadera como realidad (como aserción), y falsa lógicamente (como consecuencia)".

Por tanto, para Hamilton, las *condiciones del pensamiento* son *necesarias*, y tales condiciones son *criterio de verdad*, donde la *verdad* será la *no-contradicción*.

Hamilton, fiel discípulo del formalismo kantiano se convierte en sostenedor de un radical formalismo lógico. Y es en este formalismo donde comienza a germinar la más oculta raíz de este segundo movimiento precursor de la actual logística. Hamilton no considera objetos lógicos las actividades de concebir, juzgar o razonar, sino los conceptos, los juicios y razonamientos. Y aun éstos, sólo en su mera forma y desprovis-

imaginación".

[10] "On the study of the mathematics as an axercise of the mind", *Edinburgh Review*, 62 (1836), pp. 312.

tos de todo contenido material y de su valor de verdad, pues la Lógica -son sus propias palabras- no garantiza ni conclusión ni premisas, sino la mera *consecuencia* de éstas a aquélla. Ahora bien: este formalismo radical -al cual se adscriben plenamente De Morgan y Boole- lleva consigo la necesidad de un postulado lógico de la mayor importancia. En efecto, si el razonamiento y el juicio se realizan en el puro mundo de las formas; si es imposible -indeseable al menos- todo contacto con las cosas y contenidos, con la materia de juicios e inferencias, las entidades proposicionales que el lógico maneja deben bastarse formalmente a sí mismas. Mas, para ello, deben manifestar explícitamente todas sus determinaciones formales. Es decir, el lenguaje -plano de las proposiciones- debe expresar con absoluta fidelidad todos los datos de tipo formal contenidos en los juicios, de modo que no sea preciso recurrir a la materia del pensamiento. De ahí el nuevo principio indicado: la necesidad de que las proposiciones estén predicativamente cuantificadas.

Al exponer la primera parte de la Lógica -la doctrina de los elementos o *stoicheiología*-, centrada en torno a la formulación de las *leyes fundamentales del pensamiento* (de identidad, de contradicción, de tercio excluso y de razón suficiente; esta última, en una fase posterior de su pensamiento será excluida del nº de las leyes formales), Hamilton considera oportuno hacer algunas precisiones sobre el carácter de aquel pensamiento del cual tales leyes son *condiciones necesarias:*

Según Hamilton, la lógica considera el pensamiento, no como las operaciones del pensar, sino como su producto; ella no trata de las acciones de concebir, juzgar y razonar, sino de conceptos, juicios y razonamientos...

En un acto de pensamiento se dan tres cosas que podemos distinguir en la conciencia:

1) El sujeto pensante, esto es, la mente o yo, que ejercita o manifiesta el pensamiento.
2) El objeto en que pensamos, que es llamado la materia del pensamiento.
3) Una relación entre sujeto y objeto, de la que somos conscientes, una relación siempre manifestada en un cierto modo, que es la *forma del pensamiento*.

Pues bien, de estas tres relaciones, la Lógica no considera ni la primera ni la segunda. No toma en cuenta, al menos directamente, ni el sujeto real ni el objeto real del pensamiento, sino que se limita exclusivamente a la forma del pensamiento... La forma del pensamiento puede ser considerada en dos perspectivas o en dos relaciones... en relación con el sujeto o en relación con el objeto... En cuanto la forma del pensamiento es considerada referida a la mente pensante, a la mente por la que es ejercitada, es estudiada como un acto, una operación o una energía; y en esta relación pertenece a la psicología fenoménica[11]. Mientras que tal forma referida a lo que es pensado es estudiada como el producto de tal acto, y en esta relación pertenece a la Lógica.

La Lógica es una parte de la Filosofía y decir que la Lógica es *ciencia de la mente* conlleva que "en cuanto la Filosofía es conocimiento, y todo conocimiento es posible sólo bajo las condiciones a las que nuestras facultades están sujetas... el problema primario de la Filosofía debe ser el de investigar y determinar estas condiciones, como condiciones necesarias de la propia posibilidad. Y en segundo lugar, puesto que la Filosofía no es puramente conocimiento, sino conocimiento de las causas, y la mente misma es la causa universal y principal concurrente en todo acto de conocimiento, la Filosofía se ve obligada a hacer de la mente el primer y fundamental objeto de su consideración. Y en esta concepción de la Filosofía, la Lógica Formal viene a ser "un fragmento de la ciencia general de la mente". Y en este sentido, la Lógica viene definida por Hamilton como "ciencia de las leyes del pensamiento en cuanto pensamiento", que significa:

A) Que su objeto propio es la facultad elaborativa o discursiva de la mente, sin referencia alguna a la memoria, a la imaginación o a las leyes de la asociación.

B) Que el pensamiento es considerado puramente en cuanto tal, prescindiendo del objeto pensado, atendiendo sólo al modo y manera de pensarlo, esto es, la forma del pensamiento independientemente de la materia pensada.

C) Que tal forma pensada debe ser estudiada en sus manifestaciones universales y necesarias.

En *Lectures on Logic*..., (III, p. 31 y ss.) critica Hamilton repetidamente la determinación que Whately había hecho de la Lógica como ciencia del razonamien-

[11] Entiende por "psicología fenoménica": "Si consideramos la mente tan sólo con la intención de observar y generalizar los varios fenómenos que ella revela... tenemos una ciencia mental o una sección de la ciencia mental; y la podemos llamar la *fenomenología de la mente*. Ella es llamada comúnmente *psicología -psicología empírica*, o *filosofía inductiva de la mente*; podríamos llamarla *phaenomenal psychology (Lectures on Metaphysics)*, I, p. 121.

to y, al mismo tiempo del lenguaje. Objeto de la Lógica, dice Hamilton, es el λόγος ενδιάθετος, el interior de nuestras facultades intelectuales en general, y sólo accidentalmente y parcialmente el λόγος προφορικός, el lenguaje mediante el cual estas facultades se revelan. Esto significa la reducción del lenguaje a mero instrumento de comunicación y por eso queda cerrada para la Lógica Formal, aquella perspectiva abierta por Whately desde la cual habría sido posible encontrar un fondo común a la actividad matemática y a la actividad lógica en la búsqueda de las estructuras de los complejos de signos.

El principio teórico que Hamilton quiere imponer en Lógica es el de "expresar explícitamente lo que en el pensamiento está implícito"[12]. Se propone una *nueva analiticidad* destinada a "completar y simplificar la antigua", a poner la clave del arco aristotélico.

El postulado anterior para la Lógica expresa la exigencia de que antes de tratar un juicio o un razonamiento expresados lingüísticamente, se debe comprender plenamente el alcance de sus términos. Y su aplicación consiguiente es que "debemos tener en cuenta la *cantidad*, no sólo del sujeto, sino también del predicado de un juicio, aquella cantidad que está siempre comprendida en el pensamiento, pero que normalmente, por razones evidentes, es suprimida en la expresión del mismo"[13]. Olvidar este principio, como han hecho hasta ahora la mayoría de los lógicos significa reducir la Lógica a Gramática, hacer de ella el estudio de la expresión externa del razonamiento, en vez del estudio del razonamiento interno de la mente misma.

Por otra parte, el mismo lenguaje cuantifica a su vez explícitamente el predicado en las proposiciones *exceptuativas* y *limitativas*, como "nada sobre la Tierra es grande sino el hombre" y "sólo la virtud es noble", equivalentes respectivamente a "El hombre -es- todo lo grande sobre la Tierra" y "la virtud -es- todo lo noble"[14]. ¿Por qué no cuantificar, pues, por ejemplo, el predicado de "Todos los hombres son animales", según el significado efectivo, que es el de que "Todos los hombres -son- algunos animales"?

Hamilton aplicó la cuantificación del predicado, en 1833, a las proposiciones afirmativas, extendiéndola, luego, a las negativas. De este modo los cuatro tipos de proposiciones clásicas se desdoblan, y obtiene Hamilton las 8 siguientes[15]:

Afirmativas:

1) Toto-total: All—is all—
"Todos los triángulos son todos los triláteros".
2) Toto-parcial: All—is some—
"Todos los triángulos son algunas figuras".
3) Parti-total: Some—is all—
"Algunas figuras son todos los triángulos".
4) Parti-parcial: Some— is some—
"Algunos triángulos son algunos equiláteros".

Negativas:

5) Toto-total: Any—is not any—
"Todo triángulo no es todo cuadrado"
6) Toto-parcial: Any—is not some—
Todo triángulo no es algún equilátero".
7) Parti-total: Some—is not any—
"Algunos equiláteros no son todo triángulo".
8) Parti-parcial: Some—is not some—
"Algunos triángulos no son algunos equiláteros".

La cuantificación particular *(some)* debe ser entendida, como el mismo Hamilton indica, en sentido restricitivo: algunos; no todos. Y por lo que respecta a la cuantificación universal, Hamilton emplea el término *all*, que posee sentido colectivo, para las afirmativas; y el término *any*, que posee sentido distributivo, para las negativas.

La cuantificación generalizada a entrambos términos de la proposición trae como consecuencia, ante todo, la simplificación de la doctrina de la conversión: puesto que una proposición "es siempre una ecuación entre sujeto y predicado"[16], desaparecen las conversiones *per accidens* y *por contraposición* (ejemplos: "Todos los hombres son mortales"-"algunos mortales son hombres"; "Todos los poetas son hombres de ingenio"-"Quien no es hombre de ingenio no es poeta"), en cuanto que toda forma válida se reduce a la conversión simple, a la pura trasposición de los dos miembros de la ecuación.

[12] *Lectures*, IV, p. 252 y III, p. 114.
[13] *Lectures*, IV, p. 252 y III, p. 114.
[14] *Ibidem*, p. 262.
[15] Confert *Lectures*, IV, pp. 279-80 y 287.
[16] *Lectures*, IV, p. 252.

En cuanto a la *inferencia mediata o silogística*, la cuantificación del predicado aumenta ciertamente el número de modos, pero introduce una simplificación en los tipos de razonamiento: en una concepción de las proposiciones como ecuaciones, la simplificación podría, así, reducirse a la determinación de un solo tipo, fundándose sobre un procedimiento análogo al de la eliminación de una incógnita en un sistema de ecuaciones, para conseguir la conclusión silogística mediante la eliminación del término común de las premisas.

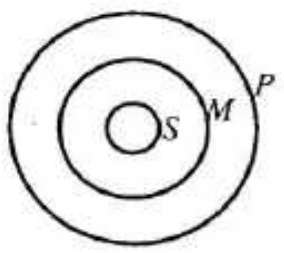
Hamilton, sin embargo, no sigue la vía indicada de la expresión de las proposiciones mediante ecuaciones; "las figuras silogísticas son todas igualadas y reducidas a modificaciones no esenciales; y mientras sus modos son multiplicados, la doctrina misma del silogismo queda reducida a la simplicidad de un solo y breve canon"[17], pero ese canon es establecido sin referencia al carácter específico de las proposiciones como ecuaciones. Este, en efecto, dice: "La relación peor que subsiste entre uno cualquiera de los dos términos y un tercero común con el que al menos uno de los primeros está en relación positiva subsiste también entre aquellos dos términos"[18]. Donde las relaciones son, así, ordenadas de mejor a peor: relaciones de coinclusión toto-total; relaciones de coinclusión incompleta (y coexclusión incompleta), relaciones de coexclusión toto-total. Por otra parte, al lado de ese canon, Hamilton pone el principio de la distinción entre el punto de vista de la comprehensión (o metafísico) y el punto de vista de la extensión (o lógico), para el cual la cópula viene a asumir respectivamente el significado de una pertenencia del predicado al sujeto como nota suya, o de una inclusión del sujeto en el predicado, en el sentido de una inclusión de clases. Y sobre tal distinción cree poder establecer uno de los resultados más importantes para la *nueva analiticidad:* la eliminación definitiva de la cuarta figura en cuanto depende de un subrepticio paso del punto de vista de la comprensión al de la extensión en el proceso de las premisas a la conclusión[19].

La cuarta figura *(P* es *M; M* es *S; S* es *P)* es considerada por él innatural, inútil y lógicamente no válida, porque la inferencia en ella es posible sólo por la oculta conversión de una cantidad en otra, que tiene lugar en el proceso mental, en cuanto que la inferencia *natural* debería ser *"P* es *S"*. Lo infundado de tal exclusión se evidencia fácilmente si mediante los círculos de Euler se representa diagramáticamente (desde el punto de vista de la extensión) el modo BARBARA de la primera figura y el modo BRAMANTIP de la cuarta:

BARBARA

Todos los *M* son *P*
Todos los *S* son *M*

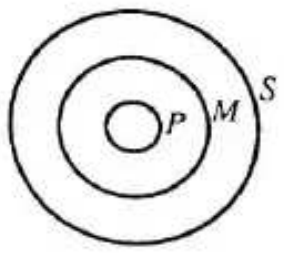
Todos los *S* son *P*



BRAMANTIP

Todos los *P* son *M*
Todos los *M* son *S*

Algunos *S* son *P*



Las dos conclusiones son entrambas recavables *naturalmente* (si ello significa "sobre la base de los diagramas") y sin abandonar el punto de vista de la extensión.

Aun prescindiendo de la dificultad con que se topa la tentativa hamiltoniana de eleminar la cuarta figura, tentativa que recuerda la obra kantiana *Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren*, y que está inyectada como ésta, de la preocupación extraformal de llegar a la determinación de las formas *naturales* del silogismo, queda claro que ello no guarda relación alguna con la teoría de la cuantificación. La consideración dinámica de ésta que para Hamilton habría debido ser el gozne de la revolución de la analítica, no le llevó muy lejos con sus resultados: lejos de ofrecer la clave del arco aristotélico le limitó a agregarle cierta extrínseca superestructura.

[17] *Lectures*, IV, p. 352.
[18] *Ibidem*, p. 352.
[19] *Lectures*, vol. III p. 424 yss.

Augustus De Morgan (1806-1871)

Nació en Madras, India, en 1806. Su padre murió cuando él era aún muy joven y la madre hubo de hacer grandes sacrificios para que él tuviese una buena educación. Estudió lenguas clásicas pero a partir de los 16 años, su centro de atención fueron las Matemáticas.

En 1823 ingresó en Trinity College de Cambridge, donde estudió Matemáticas con Peacock y Lógica con Whewell.

Tenía un defecto de nacimiento en uno de sus ojos, que le hizo ser retraído y le llevó al aislamiento. Sostuvo, además, posiciones duras sobre la libertad religiosa y académica que le crearon algunas dificultades. Pero a los 22 años se le presentó la oportunidad de enseñar Matemáticas en la universidad de Londres, por entonces creada, y allí fue, según su discípulo Jevons, un profesor sin rival.

En 1831 renunció a su puesto por diferencias con la Administración de la Universidad. El sucesor de De Morgan, White, murió a finales del verano de 1836 y De Morgan se ofreció a reemplazar a White hasta Navidad, pero amigos y estudiantes de la Universidad le rogaron que continuara y él aceptó, aunque con reticencia.

En 1837 se casó con Sophie Elisabeth Freud, hija de un amigo matemático. Fue Sophie quien después de la muerte de su marido escribió una *Memoir of Augustus De Morgan*, Londres, 1882.

En 1853 tuvo de nuevo problemas con la Universidad, por causa de ciertas estipulaciones religiosas, y en 1866 renunció definitivamente, cuando James Martineau fue recusado como profesor por motivos religiosos. Esta renuncia minó su salud, agravada por otras situaciones. Poco después de esta renuncia muere su hijo Georg Cambell, joven promesa en Matemáticas, y en 1870 su hija Cristiana muere también joven.

De Morgan muere en 1871.

Sus escritos más importantes sobre lógica están recogidos en:

-*Formal logic: or the calculus of Inference, Necesesary and Probable*. 1847.

-*Syllabus of a Proposed System on Logic*. 1860.

-Una serie de artículos en *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, entre los que se encuentran 4 importantes memorias "On the structure of the syllogism" (1841-47). Reimpresión a cargo de P. Heath, *On the syllogism and other logical Writings*, Londres, 1966.

Aunque contemporáneo de Boole, sus métodos y simbolismo le asocian más bien con sus predecesores que con Boole, y los que le siguen. Como para Hamilton, la base de sus trabajos es la lógica tradicional aristotélica, si bien en ellos aparecen muchas ideas nuevas y de detalle, "a menudo exactas, siempre ingeniosas". Y mientras que Boole ha construido una teoría unificada muy sistemática, la obra de De Morgan es más variada y dispersa.

La controversia entre Hamilton y De Morgan[20] sobre la prioridad en la doctrina de la cuantificación del predicado se inicia en 1846, y dura hasta la muerte de Hamilton en 1856, aunque con pausas; especialmente cuando De Morgan tuvo noticia de la deteriorada salud de Hamilton. Pero después de la muerte de éste, De Morgan siguió polemizando con algunos de sus discípulos. El 3 de octubre de 1846 De Morgan envía para su publicación a la Cambridge Philosophical Society un trabajo titulado "On the structure of the Syllogism"[21]. Comienza sosteniendo que es posible otro desarrollo que el aristotélico de la silogística, y divide el trabajo en 4 secciones. En la 1ª (De los términos) explica el significado del término simple y de los términos complementarios: A todo término va asociado otro que es su cara negativa, incluso cuando el lenguaje no posee término especial para designarlo. Ambos completan el *"Universo de discurso"* o totalidad de cosas consideradas, porque cuando se consideran términos contrarios, *hombre/no hombre*, por ejemplo, la oposición no juega ordinariamente en todo el universo, esto es, no se trata de situar en el segundo caso todo aquello real o imaginario a lo que no conviene el calificativo "hombre": una idea, un árbol, el amor, etc., sino que la oposición se establece en un dominio o *universo* más restringido a partir de un término o idea más general, pero próxima respecto de los términos contrarios. Así "hombre" constituye el universo de discurso de los términos "español"/"extranjero".

De manera que toda la idea tomada en consideración es el *universo* (significando meramente el todo del que nosotros estamos considerando partes) y los términos que no tienen nada en común, pero que entre ellos contienen el todo de la idea tomada en consideración, son llamados *contrarios en* o *con respecto a* ese universo". *(Formal Logic*, p. 37).

Otra definición de universo de discurso respecto de proposiciones (no de términos) es la siguiente: "Por universo de una proposición se entiende la colección de todos los objetos que son contemplados como obje-

[20] Véase L. M. Laita, "Influences on Boole's Logic. The Controversy between W. Hamilton and A. De Morgan", en *Annals of Science*. 36 (1979), pp. 45-65.
[21] En *Transactions of the Cambridge Philos. Soc.*, 8 (1846) pp. 379-408. Reimpr. en *On the syllogism*. Londres, 1966, pp. 1-17.

tos en torno a los cuales puede tener lugar una aserción o una negación".

Supongamos que todo objeto que no tiene el nombre *X* sea concebido entonces como indicado por el nombre *x*, que significa no-x, y que viene llamado el *contrario* de *X*. Así, cada cosa es o *X* o *x*.

De Morgan designó el concepto positivo o afirmativo por una letra mayúscula, y por la minúscula correspondiente el concepto negativo. Así, si *X* representa el concepto de *hombre*, *x* designa *no-hombre*.

Que un término *X* está distribuido (tomado universalmente) lo denota De Morgan con un paréntesis antes o después de la letra pero con las puntas vueltas hacia ella. Así: *X)* o *(X*. Y un término no distribuido es representado de modo análogo pero con las puntas del paréntesis hacia afuera. Así: *X(* o *)X*.

Por ejemplo.: *X))Y* indica que el sujeto *X* está distribuido y el predicado *Y* está no-distribuido, esto es, "Todo *X* es *Y*". Finalmente, la proposición negativa es denotada por un punto. Por ejemplo: *X). (Y* es "Todos los *X* no son todos los *Y*".

Y, así las cosas, siempre se puede expresar una proposición negativa bajo una forma afirmativa. Por ej., cabe transformar "Ningún *X* es *Y*" en "Todo *X* es *y*". La regla es: cambia la distribución del término y cambialo en su negativo y cambia la cualidad de la proposición.

De lo anterior resulta que cada una de las proposiciones tradicionales es susceptible de 4 formas posibles. De esas formas posibles de proposiciones, algunas poseen el mismo sentido. Así, por ejemplo, la forma de *X*: " Todo *X* es *y*" no constituye más que otra manera de decir que "Ningún *X* es *Y*". Realizadas las reducciones posibles quedan 8 formas irreductibles de proposiciones, a las que cabe retrotraer las restantes formas. Así, esas 8 formas pueden ser generadas por proposiciones afirmativas (universales y particulares).

Para las proposiciones *universales* tenemos:

(1)	*X))Y*	Todo *X* es *Y*
(2)	*x))y*	Todo no-*X* es no-*Y*
(3)	*X))y*	Todo *X* es no-*Y*
(4)	*x))Y*	Todo no-*X* es *Y*

y para las *particulares:*

(5)	*X( )Y*	Algún *X* es *Y*
(6)	*x( )y*	Algún no-*X* es no-*Y*
(7)	*X( )y*	Algún *X* es no-*Y*

obtener los otros 8 tipos más usuales en la lógica clásica: (en cada una de las fórmulas aparecen los términos *X* e *Y*, no *x* ó *y*).

Proposiciones universales:

(1)	*X))Y*	Todos los *X* son algunos *Y* (La *A* de la lógica tradicional)
(2)	*X).(Y*	Todos los *X* no son todos los *Y* (La *E* de la lógica tradicional
(3)	*X(.)Y*	Todas las cosas son algunos *X* o algunos *Y*
(4)	*X((Y*	Algunos *X* son todos los *Y*.

Proposiciones particulares, contradicciones:

(5)	*X(.(Y*	Algunos *X* no son todos los *Y* (La *O* de la lógica tradicional)
(6)	*X( )Y*	Algunos *X* son algunos *Y* (La *I* de la lógica tradicional)
(7)	*X) (Y*	Algunas cosas no son ni todos los *X* ni todos los *Y*
(8)	*X).)Y*	Todos los *X* no son algunos *Y*

Sobre esta base construye De Morgan la cuantificación del predicado, base bien diferente de aquella sobre la que la construyó Hamilton.

Con la regla de transformación de proposiciones antes citada, y esta otra regla: "cada universal afirma los particulares de la misma cualidad", queda resuelta en la silogística tradicional la inferencia inmediata.

Y para la inferencia mediata o razonamiento silogístico añade otras dos:

a) Hay inferencia: (1º) cuando ambas premisas son universales, (2º) cuando siendo una premisa particular, el término medio posee diferentes cualidades en las dos premisas.

b) La conclusión se obtiene borrando el término medio y sus cantidades.

Los silogismos son representados como ecuaciones. Por ejemplo:

X))Y + Y))Z = X))Z : "Todos los *X* son *Y*. Todos los *Y* son *Z*; luego todos los *X* son *Z*".

El trabajo citado lleva una *Addition*, fechada el 27 de febrero de 1847, en la que De Morgan introduce algunas reformulaciones de las ideas expuestas, en especial de las concernientes a la cantidad de las proposiciones. Precisó la necesidad de establecer explícitamente el número no sólo de los *Y* (término medio) sino también

(8)	*x( )Y*	Algún no-*X* es *Y*

Aplicando la regla de transformación, antes señalada y utilizando también la negación, podemos

de los otros términos de las premisas y del universo al que se refieren. Al comienzo de la *Addition* De Morgan menciona a Hamilton, señalando que éste puede quizás haberle precedido con la construcción de una teoría de la

cuantificación del predicado, pero que él no conoce el actual contenido de la teoría de Hamilton.

Antes de enviar el trabajo citado, De Morgan escribe a Hamilton -el 30 de septiembre de 1846, según señala su esposa en la *Memoir*- pidiéndole información sobre la historia del silogismo. La carta de contestación de Hamilton le llegó el 7 de octubre. En ella, según De Morgan, Hamilton le dice que ha pensado una ampliación y simplificación de su teoría que se brinda a comunicarle, pero no explicita en qué consiste tal simplificación, con lo que De Morgan pide más información y le llegan dos respuestas: una el 2 de noviembre con los "Requirements for a prize essay on the new analytic of logical forms". Estos *Requirements* consistían en una lista de 16 cuestiones que Hamilton había presentado o iba a presentar a sus estudiantes sobre una suerte de ensayo sobre la "nueva analítica de las formas lógicas", como él llamaba a su sistema lógico. Pero Hamilton no envió las respuestas a las cuestiones. Parece, incluso, que no llegó a escribirlas, pero sí las desarrolló en sus clases, puesto que uno de sus discípulos, T. S. Baynes publicó en 1850, *An Essay on the new analytic of logical forms*. (reimpr. New York, 1971). En él Baynes afirma que la obra refleja exactamente lo que él escribió en el curso 1845-46 cuando seguía las clases de Hamilton.

La segunda respuesta de Hamilton le llega a De Morgan el 28 de diciembre, junto con una copia del trabajo titulado "Prospectus on a new analytic of logical forms" (reelaborado, aparece en *Lectures*, IV, pp. 251-323). En este texto afirma explícitamente Hamilton que la silogística podía ser ampliamente mejorada si se cuantificaban no sólo los sujetos sino también los predicados de las premisas. Y, para justificar la cuantificación del predicado, Hamilton argüía que el silogismo procede en dos correlativos y consistentes "todos": *extensión* y *comprensión*. Según él, la lógica clásica ha olvidado la dimensión extensional de predicado, tomando en consideración exclusivamente la de los sujetos.

Luego de recibir el *Prospectus*, De Morgan pensó equivocadamente, que Hamilton le había precedido en la teoría de los "numerically definite syllogims", y envía a Hamilton cartas, fechadas el 31 de diciembre de 1846 y el 1 de enero de 1847, adjuntando detalles y copias de sus trabajos en donde estaban escritas sus teorías, así como algunas comparaciones precisas de los puntos de coincidencia de su teoría con la de Hamilton. El recibo de estas cartas le hizo sospechar a Hamilton que De Morgan le había copiado y robado sus ideas sobre la cuantificación del predicado, y el 13 de marzo de 1847 Hamilton escribe a De Morgan

y la controversia se hizo pública. El resultado fueron dos opúsculos, uno por cada uno de los contrincantes. El de De Morgan apareció primero; *Statement in answer an assertion made by Sir William Hamilton*, obra que está dividida en 3 partes:

En la primera De Morgan da cuenta de la correspondencia mantenida con Hamilton hasta entonces y de los motivos que le han llevado al hacer pública la polémica.

En la segunda incluye dos extractos de su trabajo *On the structure of the syllogism* con vistas a mostrar que la doctrina de la cuantificación del predicado había quedado sentada explícitamente en dicho trabajo. Luego transcribe la carta de Hamilton del 2 de noviembre de 1846 junto con la lista de las cuestiones de los *Requirements*, y adjunta también un extracto de su *Addition* al trabajo *On the structure...*

En la tercera parte, finalmente, De Morgan trata de concluir que nada de la *Addition* podía haber sido tomado de la carta de Hamilton o de la lista de cuestiones de los *Requirements*.

El folleto de Hamilton le llegó a De Morgan el 22 de mayo de 1847. Es más extenso que el de De Morgan. En él dice que Hamilton que, si bien en un principio pensó que De Morgan había intentado un plagio consciente, luego, una vez que conoció su carácter y personalidad, cambió de parecer. No obstante, existía plagio. Y prueba de ello es que De Morgan sigue tergiversando fechas.

La polémica continuó varios años después. Esta sirvió sobre todo para que los protagonistas precisasen más sus ideas; así, De Morgan recalca la importancia que la noción de *universo de discurso* tiene en su teoría del término medio y no simplemente del predicado, como la de Hamilton.

Hamilton, por su parte, en el folleto de la polémica trata de precisar las diferentes teorías sobe el tema en cuestión. Distingue 3 sistemas:

a) uno referente a la cuantificación de los sujetos;

b) otro referente a la cuantificación de los predicados;

c) el que presenta las cantidades explícitas, más bien que una determinada mayor o menor extensión (cantidad singular y universal) y una indeterminada parcial extensión (cantidad particular).

Y sostiene que el primer sistema estaba incorporado a la silogística tradicional; que el segundo era suyo propio; y que quisiera admitir que el tercero era original de De Morgan, pero ese tercero era más o menos consecuencia del segundo, y, en su aplicación, De Morgan ha

de marzo de 1847 Hamilton escribe a De Morgan acusándole de plagio. De Morgan exige, entonces, una retractación pública. El 13 de abril Hamilton le envía una carta conciliatoria, pero sigue insistiendo en reclamar para sí la prioridad. De Morgan se mantuvo firme

confundido los términos *definido* e *indefinido*.

Amén de los estudios de silogística y su reforma, De Morgan tiene otros estudios de variada importancia para la lógica moderna.

Así, se debe a De Morgan el redescubrimiento de una dualidad entre lo que él llama la *composición (XY)* y la *agregación (X, Y)*. La relación dual es la siguiente: "el contrario de un agregado es el compuesto de los contrarios agregantes: o uno de los dos *X*, *Y* o entrambos *no-X* y *no-Y*; *(X ,Y)* o *(xy)*. El contrario de un compuesto es el agregado de los contrarios de los componentes: o entrambos *X* e *Y* o uno de los dos *no-X* y *no-Y*; o *(X Y)* o *(x, y)*" *(On the Syllogism.*. Edic. de P. Heath. Londres, 1966, p. 181-82).

Estas leyes que regulan el comportamiento de la composición y de la agregación llevan el nombre de De Morgan, y con toda razón, porque, aunque no fue él el descubridor, a él se debe, sobre todo, una aplicación sistemática de ellas y una clara simbolización de su conexión dual. En virtud del isomorfismo entre el cálculo de clases y el de proposiciones estas leyes serán traspasadas del primero al segundo y válidas para las relaciones entre la conjunción y la disyunción.

La Logica de Relaciones

En este terreno la posición de De Morgan es más bien la de un continuador de la obra de Boole que la de un precursor o coetáneo. El cálculo de Boole, centrado esencialmente en la relación de inclusión entre clases, conserva aún una estrecha adhesión a la forma tradicional de la proposición sujeto-predicado. De Morgan, en cambio, prevé claramente la posibilidad de generalización: la cópula puede ser una relación cualquiera (no sólo de inclusión) y, así, en *Formal Logic* (cap. II y III) insiste en la multiplicidad de significados que puede asumir la cópula "es" sobre los elementos comunes que, no obstante la diversidad, permiten la inferencia: la *convertibilidad* y la *transitividad* de las relaciones por ella expresadas.

De esta manera De Morgan delinea el programa de una *lógica de relaciones* y se convierte, según palabras de Peirce[22], en "el padre de la lógica de los relativos". Los primeros desarrollos de esta lógica aparecen en *On the syllogism and other logical writings*. Edic. P. Heath. cit., pp. 220 y ss..

De Morgan establece símbolos para los diversos tipos de relaciones, para el producto relativo, para la conversa y la contraria de una relación dada, y establece las propiedades de las simétricas y de las transitivas.

Simbolizando por *X* e *Y* los elementos que están en relación binaria, De Morgan simboliza por las letras *L*, *M*... las diversas relaciones entre términos; por L^{-1}, M^{-1}... las conversas de esas relaciones; y por *l*,

Con la fórmula *X..LY* se significa *X* es alguno de los elementos que están con Y en la relación *L*, o *X* es uno de los *L* de *Y*.

La fórmula *X.LY* significa que *X* no está en relación *L* con *Y*.

Una realación *agregado de otras relaciones* -lo que luego se llamará *producto relativo*- se simboliza:

X.. LMY

o

X.. (LM) Y

que expresa el hecho de que *X* es uno de los *L* de uno de los *M* de Y. Ej: Si *L* es "ser hermano de" y *M* es "ser tío de", entonces esto significa que *X* es hermano de un tío de *Y*.

De modo análogo:

X. LMY

significará que *X* no es un *L* de algún *M* de *Y*.

Distingue otros tipos de composición:

LM:* significa un *L* de cada *M*, esto es, algo que tiene la relación *L* con cada miembro de la clase *M* (un amante de cada sobrino).

L$_*$*M:* significa un *L* de ninguno excepto de los *M* (un amante de nadie excepto de los sobrinos).

*LM*X:* significa un *L* de cada *M* de *X* (un amante de cada sobrino de *X*).

LM$_*$*X:* significa un *L* de ninguno excepto de los *M* de *X* (un amante de nadie excepto de los sobrinos de *X*).

L$_*$*M*:* significa un *L* de todos y sólo los *M* (un amante de todos y sólo los sobrinos).

LMX:* significa un *L* de un *M* de cada *X* (un amante de un sobrino de cada alpinista).

La relación *conversa* de *L*, L^{-1}, es definida en sentido usual: si *X..LY*, *Y..*L^{-1}*X:* si *X* es uno de los *L* de *Y*, *Y* es uno de los L^{-1} de *X*.

Supuesto que las relaciones existen entre dos términos cualesquiera, si *X* no es ningún *L* de *Y*, *X* está con *Y* en una *no-L* relación. Esta relación *contraria* es representada por *l*.

Las relaciones contrarias pueden formar relaciones compuestas: *LlX:* el *L* de un no-*L* de *X:* (El amigo de un no-amigo de *X*). Además estableció De Morgan las

m... las contrarias de esas relaciones.

---

[22] *Collected Papers*, III, 402.

1) Las contrarias de las conversas son conversas: no-L y no-L^{-1} son contrarias.
2) Las conversas de contrarias son contrarias: L^{-1} y (no-L)$^{-1}$.
3) La contraria de una conversa es la conversa de la contraria: no-L^{-1} es (no-L)$^{-1}$.

Estas son tres leyes o teoremas que rigen las relaciones entre relaciones, junto con las siguientes:

- Si una primera relación está contenida en una segunda, entonces la conversa de la primera está contenida en la conversa de la segunda; pero la contraria de la segunda, en la contraria de la primera:

$$M \subset L \Rightarrow M^{-1} \subset L^{-1}, \text{ pero:}$$
$$M \subset L \Rightarrow \textit{no-}L \subset \textit{no-}M$$

- La conversión de una relación compuesta convierte entrambos componentes e invierte su orden:

$$(LM)^{-1} \text{ es } M^{-1}L^{-1}$$

- Una relación es *transitiva* cuando un relativo de un relativo es un relativo del mismo género; en símbolos:

$$LL)\ )L, \text{ por lo tanto } LLL)\ )LL)\ )L,$$

y así sucesivamente.

- Una relación transitiva tiene una *conversa* transitiva, pero no necesariamente un *contraria* transitiva.

El tratamiento que De Morgan hace de las relaciones es siempre con vistas a la teoría de la silogística, de ahí que su lógica de relaciones hay quedado reducida a estos breves esbozos. A pesar de todo, De Morgan tiene conciencia clara de que "aquí surge la idea general de la relación, y por primera vez en la historia del conocimiento, son simbolizadas las nociones de *relación* y de *relación de relaciones*".

La Lógica Formal

De Morgan señala insistentemente el aspecto formalista de la lógica y en este sentido es un precursor de Boole. De esta manera cabe conexionar a la lógica con la Matemática y no con la Metafísica.

De Morgan recuerda a Whately por su contribución al resugimiento de los estudios de Lógica en Inglaterra y también por sus precisiones que han contribuido a dis-

siguientes relaciones entre relaciones (Teoremas):

La Lógica queda como disciplina autónoma, caracterizada porque "analiza la forma o leyes de acción del pensamiento. La Lógica es formal, no material: considera la ley de acción, separadamente de la materia sobre la que actúa. Ella no es psicológica ni metafísica" (*On the syllogism and other logical writings*, ed. cit., p. 153-54).

El desarrollo que las Matemáticas habían alcanzado por entonces en Inglaterra induce a De Morgan a trasportar los procedimientos operativos de aquéllas a las formas del pensamiento que no tienen inmediata relación con la magnitud, pero son susceptibles de análogo tratamiento: así, nociones lógicas, como verdadero-falso, afirmativo-negativo, posible-imposible, etc. En general, le lleva a acentuar, tanto la importancia del tratamiento simbólico, como la progresiva formalización. Contra el juicio de Hegel sobre el cálculo lógico de Ploucquet y el formalismo en lógica, "el escrito más acre publicado contra la ciencia", sostiene De Morgan que "toda ciencia exacta es tal sólo en cuanto sabe cómo expresar una cosa mediante un signo. Toda ciencia que ha progresado lo ha hecho sobre la base de sus símbolos; la lógica, la única ciencia de la que se admite no haber hecho progresos durante siglos, es la única que no había producido ningún símbolo" (*On the syllogism*, III, p. 184).

Y aquí aparece otra fructífera idea para el desarrollo de la Lógica Formal: la idea de un cálculo en el que los símbolos no representen ningún significado específico. Se concibe la posibilidad de una estructura que, disponiendo de símbolos y de leyes de combinación de símbolos, equivaliese a un álgebra "capaz, dice De Morgan, de convertirse en lo sucesivo en la gramática de centenares de álgebras diferentes, dotadas de significados particulares".

Con las obras de De Morgan, de Peacock, y de Gregory, nace el álgebra abstracta, en la que se estudian esencialmente las operaciones que conforman el cálculo y las propiedades fundamentales. Y tales propiedades son aplicables a otros elementos diversos de los números, con lo que la estructura algebraica sobrepasa el campo de la ciencia de la cantidad, siendo susceptible de una pluralidad de interpretaciones.

Los analíticos[23]

Tras la polémica entre Leibniz y Newton en torno a la prioridad en la invención del cálculo infinitesimal, los partidarios newtonianos mantienen en Inglaterra, en el campo del análisis, una rígida fidelidad a un tipo

linguir la Lógica de la Metafísica y de la Psicología.

[23] Véase W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*. Cambridge, 1889.

nente había quedado ya superada y abandonada, en favor de la notación diferencial elaborada por Leibniz. Ello produjo un aislamiento de la matemática inglesa durante el siglo XVII y buena parte del XVIII. Esto no fue obstáculo para que, sin embargo, surgieran matemáticos ingleses como Broock Taylor (1685-1731) y Colin Mac Laurin (1698-1746), pero había, sin duda, impedido una generalización del cálculo y una extensión a usos que no se prestaban inmediatamente a una representación "geométrico-mecánica". Pero a comienzos del siglo XIX la situación cambia progresivamente gracias a la escuela analítica de Cambridge.

Robert Woodhause (1773-1827)

Profesor en Cambridge, y desde 1824, año de la fundación, hasta su muerte fue director del observatorio de Cambridge.

En 1803 publica sus *Principles of analytical calculation*, en los que explica la notación diferencial y propone insistentemente su adopción. Y, si bien sus ideas no tuvieron inicialmente éxito en el ámbito oficial de su universalidad, debido a la resistencia nacionalista, recriminándole su posición "pro-leibniciana", su obra resultó muy eficaz en el círculo de jóvenes estudiantes que buscaban nuevos horizontes para el campo matemático. En 1812, por obra de algunos *undergraduates*, tiene lugar la fundación de la *Analytical Society*, siendo su promotor y propulsor Charles Babbage (1792-1871), compañero de estudios en el Trinity College de Herschel y de Peacock, y absorbido durante mucho tiempo en el proyecto y construcción de una máquina analítica capaz, no sólo de realizar cálculos aritméticos, sino también de determinar los valores de una función y de imprimir los resultados. El proyecto de la *Analytical Society* obtiene la aprobación del matemático Bromhead y se convierte en realidad, recibiendo las adhesiones de John Herschel, George Peacock, Charles Louis d'Arblay, W. Henry Maule, Thomas Robinson, Edward Ryan. Pronto produce un volumen de *Transactions* (al cuidado de Herschel y de Babbage) con el título de *The principles of pure D-ism in opposition to the Dot-age of the University;* y, en 1816, fue publicada la traducción del tratado de S. F. Lacroix, *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* (París, 1805), en el que aparecían claramente las ideas de Etienn Bonnot de Condillac incluidas en su última e inconclusa obra *La langue des calculs*. (edic., póstuma. París, 1798)[24].

Principalmente la concepción que Condillac tiene de la ciencia en general como fundada sobre el análisis, que revive el ideal leibniciano de la *Characteristica universalis*, en cuanto que, mediante la determinación de los elementos simples, distinguidos mediante símbolos, cabe una reestructuración de lo real en toda su complejidad. Y, si bien en Condillac prevalece el interés psicologista frente al ontológico que prevalece en Leibniz, es también indudable que la célebre afirmación de Condillac -"crear una ciencia no es otra cosa que crear una lengua, y estudiar una lengua no es otra cosa que aprender una lengua bien hecha"- está en perfecta consonancia con la orientación "filológica" (según la terminología de William Rowan Hamilton) en el estudio del álgebra que se convierte en característica de la escuela de Cambridge.

La difusión de las ideas de la *Analytical Society* comenzó pronto a ser importante, en buena medida también porque algunos de sus miembros habían alcanzado los grados académicos y podían implantar en la enseñanza oficial sus publicaciones, en las que ilustraban el nuevo método. Y, así, gradualmente los nuevos métodos conquistaron no sólo Cambridge sino toda Inglaterra, y hacia 1830 habían sustituido casi por completo a los tradicionales.

La renovación de la notación infinitesimal va acompañada del replanteamiento serio de los fundamentos del álgebra. También en este terreno fue Woodhause el primero en mostrar un planteamiento original que con el tiempo resultaría sumamente fértil. En su artículo "On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities", en *Philos. Trans. Royal Society*, 91 (1801)", replantea el problema ya tratado por Jonh Playfair, a saber: "si ciertas operaciones con caracteres o símbolos llevan a una conclusión justa, tales operaciones deben ser verdaderas en virtud de algún principio: y las objeciones contra la cantidad originaria van directamente contra la explicación insatisfactoria ofrecida de su naturaleza y de su uso". Según Woodhause, las operaciones con la cantidad imaginaria, puesto que conducen a conclusiones exactas, deben tener una lógica. Y desde el punto de vista de la conexión deductiva, los signos de la cantidad imaginaria vienen combinados de modo no menos rigurosamente demostrativo que los que indican la cantidad ordinaria, porque la "demostración es un método para establecer la conexión entre

[24] Recogida en *Oeuvres de Condillac*, Tomo XXIII. París, 1798. Sobre esta obra véase Louis Robert, *Les théories logiques de Condillac*. París, 1869; y la *Introduction à l'oeuvre philosophique de Condillac* de Georges Le Roy, en *Oeuvres philosophiques de Condillac*. I. París, 1947, pp. XXVII-XXIX.

ciertos principios y una conclusión, mediante una serie de proposiciones intermedias e idénticas, de las que cada una de ellas está conectada con su próxima, cambiando la combinación de símbolos que la representa por otra que resulta equivalente a ella" (*Ibidem*, p. 107).

Esta consideración lingüística de la estructrua deductiva es la que conduce a desbloquear el álgebra de su interpretación aritmético-cuantitativa así como de su sometimiento a la interpretación geométrica. Porque para los sistemas del análisis y del álgebra, sostiene Woodhause que las expresiones de origen geométrico no poseen una posición privilegiada: su uso se debe sólo a la conveniencia gráfica de sus símbolos.

Estas ideas de Woodhause encontraron un fértil terreno en el ambiente de Cambridge y una rigurosa formulación en las obras de Peacock.

George Peacock (1791-1858)

Fue la figura más brillante de la escuela analítica y también la más influyente debido a los cargos oficiales que ostentó. Entre sus obras más importantes para el análisis, cabe destacar:

Examples illustrative of the use of differential calculus. Cambridge, 1820.

A Treatise on Algebra, publicado por primera vez en 1830 y reeditado en 2 vol. aparecidos en el 42 y en el 45, respectivamente.

"Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis", en *Report on the third meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge 1834*. Londres, 1834, p. 185 y ss.

Establece Peacock en el *Report* una neta distinción entre Matemática pura y aplicada:

> "...en las ciencias especulativas consideramos simplemente los resultados de la ciencia misma y la precisión lógica del razonamiento mediante la cual aquéllos son deducidos de los primeros principios asumidos...; y si estas ciencias (abstractas) están de algún modo conexas con las ciencias físicas, la conexión es arbitraria y no afecta a la verdad de nuestras conclusiones, que atañe sólo a la conexión con los principios y no requiere, aunque permita, la ayuda de la interpretación física". (pp. 186-87).

Entre las ciencias abstractas están la Geometría y o abstracta. En la reedición en dos volúmenes, el primero está dedicado al álgebra aritmética, y el segundo al Algebra simbólica. La reflexión sobre el Algebra constituye un medio óptimo para la reflexión sobre la Matemática especulativa, porque sirve para distinguirla de su más difusa y general interpretación, la numérico-cualitativa. Según Peacock, no se distingue suficientemente entre Aritmética y Algebra, y suele mantenerse que la segunda no hace más que formular de modo general por medio de símbolos la propiedad de los números. Tal tesis es sostenible sólo si se refiere al Algebra "aritmética": ella es una "aritmética universal", sus símbolos generales representan tan sólo números y sus operaciones fundamentales, y los signos que las representan poseen el mismo significado, que es característico en la aritmética común. Pero si se considera los signos con los que efectivamente opera el Algebra, en su calidad de Algebra "simbólica", se hace patente la ampliación que en ella toman las operaciones aritméticas. En el álgebra simbólica no se trata de extender simplemente el significado de las operaciones aritméticas, sino, más bien, de determinar reglas para la manipulación de símbolos no interpretados (cualesquiera que hayan sido los modelos que han sugerido tales reglas), en donde lo que interesa son los aspectos estructurales o formales de las operaciones que allí se dan. Las reglas definen las operaciones y los términos generales sobre los que se aplican; la interpretación es algo eventual e inesencial a la definición. Las operaciones son, pues, consideradas, no en su sentido ordinario (en su interpretación aritmética), sino como leyes de combinación de entes cualesquiera. Peacock generaliza como exponente típico del Algebra simbólica, un procedimiento que en aquellos años, especialmente entre los matemáticos ingleses, encontraba particular aplicación en el campo del Análisis, y que era conocido como "principio o método de la separación de los símbolos de las operaciones". Este principio era ya conocido por el matemático francés François-Joseph Servois (1767-1847), quien en su "Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes de calcul différentiel", en *Annales Gergonne*, 5 (1814) constata el hecho de que el principio del cálculo simbólico consiste en la conservación de ciertas propiedades formales de las operaciones (conmutativa, asociativa, distributiva), y que la sumisión a tales propiedades de las operaciones del cálculo infinitesimal era el fundamento de la posibilidad de la exposición de éste sobre una base algorítmica.

Ese mismo año, uno de los miembros de la escuela analítica, John Herschel, defiende una posición análoga en su trabajo "Considerations of various points of

el Algebra. Estas quedan, pues, como autónomas por lo que se refiere a su interpretación.

En su *A Treatise on Algebra*, se propone Peacock tratar el Algebra en el ámbito de la Matemática especulativa

analysis", en *Philos. Trans. Royal Society*, 104 (1814), pp. 440-68: "En las páginas siguientes he hecho uso uniformemente de la notación funcional o característica junto con el método de separar (si se podía

realizar convenientemente) los símbolos de las operaciones de aquéllos de la cantidad" (p. 441). De modo que el método de la separación de los símbolos de las operaciones recibió gran atención en el ambiente matemático de Cambridge. La aplicación técnica de tal método favoreció la exposición tratadística del cálculo infinitesimal, así como también varias investigaciones específicas.

Las ideas de Peacock sobre el Algebra simbólica fueron desarrolladas por Gregory.

Duncan Farquharson Gregory (1813-1844)

Fundador, en 1838, con Richard Ellis del *Cambridge Mathematical Journal*, y amigo personal de Boole.

En una memoria leída en la Sociedad Real de Edimburgo -"On the real nature of simbolical algebra", en *Trans. of the Royal Society of Edinburg* vol. 14/1 (1839), pp. 208-16, se refiere Gregory explícitamente a las ideas de Peacock, y elabora una concepción del Algebra como:

> "la ciencia que trata de las combinaciones de las operaciones definidas, no por su naturaleza, esto es, por aquello que son o hacen, sino por las leyes de combinación a las cuales están sujetas" (p. 208).

El Algebra simbólica queda, así, decididamente desvinculada de la "ciencia de la cantidad", porque:

> "si bien es cierto que sus leyes vienen muchas veces sugeridas por las leyes de las operaciones sobre los números, no obstante, el paso del álgebra aritmética a la simbólica consiste en que, dejando fuera de consideración la naturaleza de las operaciones que los símbolos utilizados representan, suponemos la existencia de clases de operaciones desconocidas sujetas a las mismas leyes... Estamos así en situación de probar ciertas relaciones entre clases diferentes de operaciones, las cuales relaciones, cuando quedan establecidas entre símbolos, son llamadas teoremas algebraicos" (*Ibidem* p. 209).

En su obra *Examples of the processes of the differential and integral calculus*. (Cambridge, 1841) aparece (pp. 237-38) una clara y precisa exposición del método de separación de los símbolos que expresan cantidad de aquellos que expresan operaciones. El método permite una consideración abstracta de las operaciones y sus propiedades, independientemente del dominio particular de entes a los que las operaciones mismas se apliquen.

científica bajo el estímulo de su amigo Gregory, publicando, en 1841, en el *Cambridge Mathematical Journal*, un artículo sobre la teoría de las transformaciones analíticas: "Researches on the theory of analytical transformations", y en 1844, en *Philosophical Transactions Royal Society*, un estudio sobre "A general method in analysis". Y también después de sus tratados sobre Lógica, vuelve Boole a las investigaciones en el Análisis, utilizando el principio de separación de símbolos, en *A treatise on differential equations*. Cambridge-London, 1859, que se convirtió por largo tiempo en un texto clásico dentro y fuera de Inglaterra.

En la determinación del Algebra simbólica, según las ideas de Peacock y de Gregory, no quedaba totalmente precisada la relación de dependencia entre el Algebra "matemática" y el Algebra "simbólica". Peacock no ofrece una clara solución al respecto. La extensión de las operaciones del Algebra aritmética al Algebra simbólica le viene sugerida a Peacock por el llamado "principio de permanencia de las formas equivalentes": "una fórmula cualquiera es algebraicamente equivalente a otra, cuando expresada en símbolos generales, ha de continuar siendo equivalente, independientemente de lo que esos símbolos denoten". (*Report*, p. 199, y también *A treatise on Algebra*, vol. II, p. 59-60). De este principio -continúa diciendo Peacock en *A treatise, Ibidem*-, se sigue que todos los resultados del Algebra aritmética serán resultados, asimismo, del Algebra simbólica; y el descubrimiento de formas equivalentes en la primera ciencia, que poseen las condiciones exigidas, será, no sólo su descubrimiento en la segunda, sino la sóla autoridad para su existencia". Pero, por otro lado, Peacock (en *Report*, p. 198) sostiene que las reglas de combinación en Algebra simbólica "han sido tan sólo sugeridas por las reglas correspondientes en el álgebra aritmética. No se puede decir que estén fundadas en ellas, puesto que no son de ellas deducibles".

Finalmente, en su intento por aclarar la relación de dependencia pone Peacock una distinción entre la *asunción de una regla de operación* y la *definición* de la operación misma: los resultados de la adición y de la sustracción en el Algebra simbólica, por ejemplo, son obtenidos prescribiendo determinadas reglas de ejecución de las operaciones, y no recavables de la definición de las operaciones mismas (que según Peacock poseen el significado que se les ha asignado ordinariamente en el Algebra aritmética). La relación que, de este modo, se establece entre los dos tipos de Algebra, aritmética y simbólica, es, por lo tanto, la siguiente: Los símbolos empleados en el Algebra simbólica son "perfectamente generales en

Recurriendo a tal principio Gregory logra aislar la propiedad conmutativa y distributiva en álgebra estableciendo, así, una base segura para las ulteriores especulaciones de Boole. Este, precisamente, inició su actividad

su representación y perfectamente ilimitados en sus valores"; las operaciones sobre ellos, independientemente del modo en el que sean denotadas, son universales en su aplicación; pero en cierto sentido "los principios y las

conclusiones generales o reglas" del álgebra aritmética *sugieren y determinan"* la asunción de los primeros principios del álgebra simbólica" *(A treatise on Algebra*, vol. II, p. 9).

El principio de permanencia de las formas equivalentes toma una nueva dimensión en 1843, con la obra de William Rowan Hamilton (1805-1865), con el descubrimiento de un Algebra de números de 4 unidades, los "cuaternios", en la que se consideraba exclusivamente cuaternas de números, y en la que no vale la *propiedad conmutativa* de la multiplicación. Con su cálculo de los cuaternios (fundado, en 1844, en el opúsculo *On the Quaternions or on a new System of Imaginaries in Algebra*, y desarrollado en la obra *Lectures on Quaternions*, 1853, y en los póstumos *Elements of Quaternions*, 1866), Hamilton proporciona una prueba efectiva de la existencia de Algebras diferentes de aquéllas hasta entonces conocidas.

Hamilton no pertenecía a la escuela de Cambridge -a la que en sus tiempos jóvenes había aplicado el calificativo no positivo de "filológica"- y mantenía una concepción del Algebra bastante personal, que obedecía a una marcada influencia kantiana: el Algebra era para él "la ciencia del tiempo puro"; el tiempo en cuanto orden y sucesión es el fundamento del concepto de número, de modo que, para él, los números ordinales poseen psicológicamente una prioridad sobre los cardinales.

Ello no impidió a Hamilton, en el período maduro de su especulación, comprender el alcance y la importancia de sus resultados en la constitución del Algebra simbólica, y reconocer el progresivo acercamiento a las concepciones de la escuela "filosófica" de Cambridge.

La influencia de la escuela analítica en la obra de Boole

Las investigaciones de los matemáticos ingleses en el terreno del Algebra constituyeron la base segura para la síntesis booleana. La influencia de la escuela analítica de Cambridge en su obra es manifiesta. El formalismo del cálculo por él propugnado al comienzo de su *The mathematical analysis of logic* (1847), expresa el conocimiento del Algebra tal como lo había delineado la escuela analítica de Cambridge, y su asentimiento a las ideas de la escuela analítica: "Aquellos que están familiarizados con el estado actual de la teoría del Algebra Simbólica saben que la validez de los procesos del análisis no dependen de la interpretación de los

de combinación. Todo sistema de interpretación que no afecte a la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible, y de ahí que el mismo proceso pueda bajo un esquema de interpretación, representar la solución de una cuestión sobre las propiedades de los números; bajo otro, la de un problema geométrico; y bajo un tercero, la de un problema de dinámica o de óptica. Este principio es, ciertamente, de importancia fundamental y puede afirmarse con seguridad que los recientes avances del análisis puro deben mucho a la influencia que dicho principio ha ejercido al dirigir el curso de la investigación"[25].

Boole es, ciertamente, uno de los que estaban familiarizados con el estado actual del Algebra Simbólica: mantenía lazos de amistad con Gregory y De Morgan, y personalmente había realizado contribuciones técnicas específicas a la teoría del cálculo de las operaciones, fundada sobre el principio de la separación de los símbolos. Estaba, pues, en condiciones de acometer lo que es el proyecto de su obra: "establecer el Cálculo de la Lógica y postular para el mismo un lugar entre las formas reconocidas del Análisis Matemático"[26].

2. George Boole

Vida y obra

Nace en Lincoln el 2 de Noviembre de 1815. De familia humilde, es enviado a una escuela comercial y hubo de afrontar por sí solo el estudio del latín y del griego, así como del pensamiento patrístico, del francés, del alemán y del italiano (fue admirador del *Paradiso* dantesco). Por algún tiempo estuvo inclinado a tomar las órdenes religiosas. Constreñido por necesidades familiares a la enseñanza elemental y postelemental en Doucaster, Lincoln y Waddington, se dedicó por su cuenta al estudio de las Matemáticas, siendo en este campo autodidacta, y renunciando a seguir la carrera académica en Cambridge. Sin embargo, fueron las ideas entonces debatidas por los matemáticos de la "escuela de Cambridge", las que particularmente atrajeron su atención, y le llevaron a entablar amistad con uno de ellos: Ducan Farquharson Gregory. Gregory, fundador del *Cambridge Mathematical Journal* en 1840, brindó a Boole la revista para que éste publicase su primer trabajo en 1841: *"Researches on the theory of analytical transformations"*, que versaba sobre el concepto de invariancia. A los temas discutidos en

símbolos que se emplean, sino solamente de las leyes

[25] *El análisis matemático de la lógica*, ed. cit., p. 41.
[26] *Ibidem*, p. 42.

mas de Algebra simbólica, dedica Boole su trabajo de 1844: *A general method in analysis*, publicada en la *Philosophical Transactions of the Royal Society*, y basado en el método de la separación de los símbolos de las operaciones seguido por la escuela analítica de Cambridge. A través de estas investigaciones en el Algebra simbólica entrevió la posibilidad de construir un Algebra de la Lógica, aunque, como él gustaba declarar en los últimos años de vida, la idea de aplicar fórmulas algebraicas para expresar las relaciones lógicas se le había ocurrido ya en la primera juventud, antes de los veinte años, cuando trabajaba como maestro de escuela en Lincoln. La ocasión de sacar esas ideas a la luz se le presentó en la primavera de 1847, cuando Hamilton y De Morgan estaban enzarzados en la polémica sobre la prioridad en la teoría de la cuantificación del predicado. Boole escribió a De Morgan, cuyos puntos de vista compartía, y De Morgan, que estaba rematando su *Formal logic* sugiere a Boole que ambos debían hacer públicas a la vez sus investigaciones y resultados, antes de consultarse mutuamente. Esto motivó que la *Formal logic* de De Morgan y *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, aparecieran el mismo año 1847, y que, según se cuenta, llegasen juntos a las librerías el mismo día. En 1849 obtiene Boole la cátedra de Matemáticas y es llamado para enseñar en el Queen's College de Cork. La nueva situación académica le proporciona un mejor salario adecuado a sus necesidades y le deja tiempo libre para la investigación.

Fruto de sus enseñanzas e investigaciones sobre Matemáticas fueron las obras: *Treatise of differential equations* (1859) y *Calculus of finite differences* (1860). Pero las Matemáticas eran para él, según se complacía en declarar, un pasatiempo, en tanto que su estudio era la "ciencia mental". Y, efectivamente, dedicó mayor atención a la Lógica, informándose sobre lo que otros habían escrito sobre sus fundamentos y sus implicaciones filósoficas, conformando, así, su teoría al respecto. El resultado de su trabajo es la obra: *An investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, publicada en 1854 a expensas de Boole y un amigo suyo. En ella trata Boole, en primer lugar, de confrontar el Algebra de la Lógica con la bibliografía filosófica sobre la Lógica, y, en segundo lugar, de su aplicación al cálculo de probabilidades.

Siguió trabajando en la reelaboración de sus ideas sobre la naturaleza de la lógica. Al final de su vida se servido anteriormente. Pero la muerte le sobrevino el 8 de Diciembre de 1864, sin enviar su trabajo a imprenta. Los manuscritos fueron enviados por la viuda de Boole, Mary Everest, en 1874, a la Royal Society, si bien ésta, antes de la donación, intentó publicarlos, pero De Morgan, que los revisó tras la muerte de Boole, se mostró contrario a su publicación. Recientemente extractos de ellos fueron editados por R. Rhees: G. Boole, *Studies in logic and probablility*. Watts & G., Londres 1952. Han sido estudiados por Mery B. Hesse: "Boole's Philosophy of logic", en *Annals of science*, 8 (1952) pp. 61-81.

El sistema lógico booleano

Al año siguiente en que apareció el *Mathematical analysis of logic* (1847). Publica Boole una breve reexposición de su *Calculus of logic* en el *Cambridge and Dublin mathematical journal*, 3, 1848, pp. 183-98; reexposición que tuvo más lectores matemáticos que el *Mathematical analysis*. Allí aparecen claramente las dos perspectivas en las que Boole sitúa los resultados por él obtenidos:

- Una es la técnico-matemática en que Boole afronta la Lógica: "En una obra recientemente publicada he demostrado la aplicación de una forma nueva y peculiar de matemática a la expresión de las operaciones de la mente en el razonamiento". Y sobre esas operaciones ha establecido leyes que "son rigurosamente matemáticas, al igual que las leyes que gobiernan los conceptos puramente cuantitativos de espacio y tiempo, de número y magnitud".

- Otra es la filosófica, en la que Boole sitúa las reflexiones que sobre "la ciencia de la mente" le proporcionan sus investigaciones: "la concepción que estas investigaciones presentan sobre la naturaleza del lenguaje es realmente interesante. En ellas aparece (el lenguaje) no como una simple colección de símbolos sino como un sistema de expresiones, cuyos elementos están sujetos a las leyes del pensamiento que representan" (p. 198).

Situando a la Lógica en la primera de las perspectivas señaladas, Boole se convierte en el fundador de la Lógica Matemática o Lógica Formal. En esto están de acuerdo todos los comentadores, y este "descubrimiento" llevado a cabo por Boole es la culminación de las in-

sentía insatisfecho de la estructuración y exposición de sus *Laws of Thougth*, expresando la intención de reeditarlo en forma más sencilla y filosófica, prescindiendo del aparato simbólico-matemático del que se había

vestigaciones de los matemáticos ingleses sobre los fundamentos del Algebra, cuya esencial conclusión es que el vigor deductivo de la argumentación matematica reside en la consideración de la estructura formal de sus

expresiones simbólicas independientemente de sus posibles y múltiples interpretaciones.

La segunda perspectiva en la que Boole sitúa sus indagaciones lógicas no ha sido juzgada unánimemente por los comentadores. Para algunos[27] los excursus de Boole en consideraciones filosóficas resultan, si no dañosos, sí superfluos para la hechura de su obra. Y los 7 años que, tras la publicación de *Mathematical analysis*, invirtió Boole en estudios filosóficos, psicológicos y lingüísticos para preparar sus *Laws of Thought* son valorados de formas muy diversas por los críticos. Si para la presentación algebraica de la Lógica Boole recoge la herencia de los matemáticos ingleses, para la interpretación filosófica de la misma se acogió a las concepciones psicologistas consolidadas con la autoridad de William Hamilton.

El método empleado por Boole en *The mathematical analysis* consiste en el tratamiento simbólico y axiomatizado de las leyes elementales que rigen las operaciones mentales cuales son: "Nuestra capacidad de concebir una clase, de separar por un acto mental de cualquier colección concebible de objetos, los que pertenecen a la clase dada" (acto de elección); nuestra capacidad para "seleccionar mentalmente entre esos objetos los que pertenecen a alguna otra clase reconocida... Y este proceso puede ser repetido con otros elementos de distinción..."[28].

Son todas estas diversas operaciones mentales las que están sujetas a leyes peculiares y por lo que la lógica -ciencia de tales leyes- puede ser sometida a cálculo. Además esas leyes pueden ser expresadas simbólicamente (la teoría lógica está, así, íntimamente conectada con la del lenguaje).

El campo de aplicación de dicho método fue en un principio la Lógica tradicional y las formas del sistema aristotélico, pero pronto se hizo pantente que así se introducirían restricciones puramente arbitrarias sin fundamento de la naturaleza de las cosas... por lo que se halló que era imperativo prescindir de toda consideración de lo antiguo y de la autoridad, y buscar en el método mismo una expresión de los justos límites de su aplicación" *(ibidem.* p. 45). Los principios (o axiomas del nuevo cálculo son, pues, establecidos al margen de los que rigen la Lógica tradicional.

Simbología

-El símbolo "1", o la unidad, representa el *universo*, esto es, el conjunto de toda clase concebible de todo objeto, si posee más de una propiedad en común con otros objetos, puede pertenecer a más de una clase.

-El símbolo "0" indica la *nada* o la clase nula (este símbolo no fue introducido explícitamente por Boole en *Análisis matemático;* es definido,como se ha indicado, en *Laws of Thought*.

-Los símbolos *x, y, z...*, son símbolos *electivos* que representan la operación de elegir o seleccionar todos los objetos que tienen la propiedad *X, Y,* ó Z..., i. e., la *clase* de objetos que resulta de tal selección.

-Símbolos de relaciones y operaciones entre símbolos electivos:

- "+" para la agregación (suma) de clases (tales que no posean miembros en común): es rasgo distintivo del álgebra de Boole el que *x* e *y* no deben poseer miembros en común, por lo que $x + y$ significa "aquello que es o *x* o *y*, pero no ambos". Exigiendo que esta operación se dé exclusivamente entre clases disjuntas, consigue establecer la operación inversa o sustración simbolizada por "-"; así: $y - x$ indica la "separación de una parte, *x*, de un todo *y*. Si $x + z = y$, entonces, puesto que *x* y *z* son disjuntas, $y - x = z$ e $y - z = x$. Pero esta restricción puesta a + elimina de su sistema la ley $x + x = x$.
- El símbolo ".", o simplemente el acoplamiento sin símbolo alguno de los símbolos electivos, indica la repetición de otra operación de elección sobre el resultado de uno o más actos electivos previos, esto es, representa la intersección entre clases. Así *x.y* o *xy* simboliza la clase de aquellas cosas que son a la vez miembros de *x* y miembros de *y*.
- El símbolo "=" indica la relación de equivalencia entre clases. Así, $x = y$ significa que la clase *x* y la clase *y* poseen los mismos miembros, esto es, tienen la misma extensión.
- La fórmula *(1-x)* representa el universo excepto los *X*, o todas las cosas que son *no-X*.

Principios del cálculo

Sin necesidad de entrar en el análisis de la operación mental que hemos representado por medio del símbolo

so, esto es, el conjunto de toda clase concebible de objetos existentes o no, y dando por sentado que

electivo y considerando que el símbolo mismo significa

[27] *Confert*, por ejemplo, Rudolf Metz, *A hundred years of British philosophy*. Ed. orig. alem. 1935. trad. ingl. 1950.
[28] *El Análisis matemático*, ed. cit., pp. 42-43.

una clase, lo que interesa para el cálculo son las leyes de combinación y de sucesión de tales símbolos, las cuales pueden ser sintetizadas como sigue:

I) "El resultado de una acto de elección es independiente de la agrupación o clasificación del dominio". Simbólicamente:

(1) $x\,(u + v) = x\,u + x\,v$.

Y de modo paralelo tendremos:

(2) $x\,(u - v) = x\,u - x\,v$

Estas dos leyes dicen que los símbolos electivos cumplen la propiedad distributiva de la intersección respecto de la agregación y también respecto de la sustración.

II) Es indiferente el orden en que se ejecutan dos actos de elección. En símbolos:

(3) $x\,y = y\,x$.

Y en *Laws of Thought*, p.36, la misma propiedad es asignada a la agregación de clases:

(4) $x + y = y + x$

Estas dos leyes dicen que la intersección y la agregación de clases cumplen la propiedad conmutativa.

III) El resultado de un acto de elección dado, efectuado dos o más veces seguidas es el resultado del mismo acto efectuado una sola vez. En símbolos:

(5) $x\,x = x$ o $x^2 = x$ o $x^n = x$

De estas cinco leyes, las cuatro primeras rigen también en el Algebra numérica pero la (5), que se denomina la *Ley del Indice*, es el principio distintivo de este Algebra, y sólo cuando el conjunto numérico considerado consta de los elementos *1* y *0* se mantiene la ley del índice. Por consiguiente, todas las cinco leyes expuestas rigen para un Algebra de los símbolos *0* y *1*.

De manera que, en vez de determinar el ajuste formal entre los símbolos de la Lógica y los del número en general, resulta más inmediato confrontar los primeros con los símbolos de la cantidad que admiten sólo los valores *1* y *0*. En ese caso "las leyes, los axiomas, los procesos de un álgebra semejante serán completamente idénticos a las leyes, a los axiomas y a los procesos de un Algebra de la Lógica. Los separará tan sólo una diferencia de interpretación, y es sobre tal principio sobre el que se funda el método de esta obra" (*Laws of Thought*, p. 41).

susceptibles sólo de valores *0* y *1*, efectuar sobre ellos, en cuanto tales, todos los procesos requeridos para la solución y restaurar, finalmente, su interpretación lógica" (*ibidem*, p. 76).

Este modo de proceder resultaba completamente nuevo. Boole, partiendo de fórmulas con interpretación lógica, pasa a operar con ellas de modo cuantitativo y no ocupándose para nada de la interpretación de los resultados parciales obtenidos. Este modo de proceder parece sugerir una subordinación de los procedimientos simbólicos al modelo matemático y como si el Algebra de la Lógica fuese no otra cosa que la extensión del simbolismo matemático-cuantitativo a las operaciones lógicas. El evitar esta excesiva acomodación de la Lógica a la Matemática (cuantitativa) será el objetivo de Jevons, quien buscará hacer del Algebra de la Lógica una *Pure logic or the Logic of Quality apart from Quantity* (1864), más acorde con la "lógica del pensamiento común". Sin embargo, Boole no restringe su Algebra al conjunto de los valores *1* y *0*, sino que introduce coeficientes numéricos distintos de un *1* y *0*. Precisamente entre sus principios no se encuentra aquel que convertiría a su Algebra en un Algebra bivalente, a saber:

o bien $x = 1$, o bien $x = 0$.

Otra ley que Boole admite para su cálculo de clases es:

(6) Si $x = y$, entonces: $z\,x = z\,y$
$\therefore z + x = z + y$
$\therefore x - z = y - z$

Pero no admite la recíproca de este condicional, esto es, dado el primer caso:

(6a) Si $x = y$, entonces $z\,x = z\,y$,

no admite la recíproca:

(7) Si $z\,x = z\,y$, entonces $x = y$

La (7) no es una ley válida para el álgebra de clases y en cambio, sí lo es para el álgebra numérica (excepto cuando $z = 0$).

Ejemplo: Del supuesto en que la clase de los micólogos cazadores sea igual a la de los micólogos alpinistas no cabe inferir que la clase de los cazadores sea igual a la clase de los alpinistas.

La no admisión de esta ley va ligada a la dificultad para la interpretación lógica de la operación división x/y. Boole sugiere buscar la siguiente interpretación: supuesto que x, y, z representen clases tales que $x = y\,z$, obtenemos, entonces, la ecuación $x/y = z$, en la que, según

(*Laws of Thought*, p. 41).

Boole subraya su modo de proceder (o método) en Lógica: "podemos dejar aparte la interpretación lógica de los símbolos, convertibles en símbolos numéricos

$$\frac{x:\text{La clase de los hombres}}{y:\text{la clase de los racionales}} = z:\text{la clase de los animales}$$

Pero, aun así, esta interpretación sugerida por Boole presenta problemas: En primer lugar, x/y es significativa sólo si x es parte de y. En segundo lugar, x/y queda generalmente indeterminada en el cálculo de clases, porque puede haber muchas clases cuya intersección con y es coextensiva con x. Así, si sobre el ejemplo anterior, escribimos ahora:

$$\frac{x:\text{La clase de los hombres}}{y:\text{la clase de los racionales}} = u:\text{la clase de los bípedos}$$

Resultando que z no es igual a u ($z \neq u$).

Estas dificultades que presenta la interpretación de la división son las que probablemente motivaron el que Boole no la incluyese en los principios del cálculo de clases, si bien por analogía con el Algebra numérica aparece, a veces, en el curso del cálculo (*Análisis Matemático*, p. 113; *Laws of Thought*, pp. 102 y ss.) Pero los sucesores de Boole (Jevons, Peirce...), ocupados en perfeccionar el cálculo booleano, eliminaron completamente la división del cálculo de clases.

Aplicación del sistema formal a la lógica tradicional

La simbolización de los cuatro tipos de proposiciones categóricas (*A, E, I, O*)

Boole no dispone en su cálculo de la relación de inclusión entre clases, por consiguiente la única cópula mediante la cual puede ser expresada la relación que guardan los términos en la proposición es la relación "="; y, puesto que todas las relaciones son tomadas en extensión, $x = y$ simboliza el hecho de que la clase x y la clase y son coextensivas, con los mismos miembros. Según esto, las proposiciones deber ser representadas mediante ecuaciones. Para ello procede Boole como sigue:

Expresa los términos negativos sirviéndose del símbolo "universo" y la operación sustración. Así, la clase no-x, como complemento de x respecto del universo, es representada por $(1\text{-}x)$.

	1º Método	2º Método
A: Todos los x son y	$x(1-y) = 0$	$x = v\,y$
E: Ningún x es y	$x\,y = 0$	$x = v(1-y)$
I: Algún x es y	$x\,y \neq 0$	$v\,x = v\,y$ o $v = x\,y$
O: Algún x no es y	$x(1-y) \neq 0$	$xv = v(1-y)$ o $v = x(1-y)$

Siguiendo el primer método, tenemos que, expresadas las proposiciones universales, las particulares vienen expresadas sobre aquéllas, negando la igualdad (por ser $I = -E$ y $0 = -A$). Este método será el preferido por los sucesores inmediatos de Boole (*Confert* J. Venn, *Symbolic logic*. Ed. cit., pp. 160 y 184-188).

El segundo método exige la introducción de un nuevo símbolo electivo, v, que es un símbolo de clase, pero una clase especial, indefinida, interpretada expresando el término "algunos", esto es, denota la clase que posee al menos un elemento. El símbolo v es, pues, un símbolo de clase que sólo posee la determinación negativa de no coincidir con la clase nula.

En el *Análisis Matemático* sólo apela Boole al símbolo v para la expresión de las proposiciones particulares, pero en *The Laws of Thought* lo emplea también para la expresión de las universalidades, lo que parece indicar el deseo de Boole de absorber en su cálculo la teoría de cuantificación del predicado. La admisión de v en el cálculo, si bien permite operar correctamente en algunos casos, en otros permite la aparición de inferencias erróneas. Por ejemplo, la obtención de la conclusión no válida $x\,y = z\,u$ a partir de $x\,y = v\,y\,z\,u = v$. De modo que los errores -en los que Boole ciertamente no incurre- a los que puede dar lugar el uso de v sólo pueden ser sorteados por procedimientos *ad hoc*. Pero, pese a los posibles peligros, Boole veía en la utilización de v la posibilidad de legitimar las inferencias aristotélicas fundadas en la subalternación.

Conversión de las proposiciones

Sobre la base de las formas canónicas que expresan los cuatro tipos de proposiciones reconstruye Boole la doctrina tradiccional de la conversión de las proposiciones del modo siguiente:

1) *Conversión simple:* Examinando E: $x\,y = 0$ e Y: $x\,y = v$, resulta que E e I son simétricas con respecto a x e y, de tal manera que cambiando x por y e y por x las ecuaciones permanecen inalteradas, por lo tanto E e I admiten la conversión simple.

Las proposiciones son representadas por ecuaciones según dos métodos (ambos utilizados por Boole): bien igualando lo puesto a *0* o a *1*, bien cuantificado el predicado.

2) *Conversión por contraposición*. La ecuación A: $x(1-y) = 0$: "Todos los X son Y", puede escribirse en la forma: $(1-y)\{1-(1-x)\} = 0$ "Todos los no-Y son no-X".

Y la ecuación O: $v = x(1-y)$, "Algunos X no son Y", puede escribirse en la forma $v = (1-y)\{1-(1-x)\}$, "Algunos no-Y no son no-X". De donde obtenemos la conversión por contraposición para las proposiciones A y O.

3) *Conversión per accidens*. Las ecuaciones A y E escritas en las formas:

A: $(1-y)\,x = 0$

E: $y\,x = 0$

Dan como solución (ver luego resolución de ecuaciones) las formas respectivas:

$x = v\,y$: "Algunos Y son X".

$x = v(1-y)$: "Algunos no-Y son X".

De donde se deduce que A y E pueden convertirse *per accidens*.

Sobre los silogismos

Los silogismos serán tratados como sistemas de ecuaciones. Dadas dos ecuaciones que poseen un símbolo común -las premisas del silogismo-, es posible eliminar el símbolo común (término medio) y obtener otra ecuación (la conclusión) mediante un procedimiento análogo al de la eliminación de una incógnita en un sistema de dos ecuaciones. Así, por ejemplo, en el modo *BARBARA*, dadas las ecuaciones (premisas)

(1) $y(1-x) = 0$: "Todos los Y son X"

(2) $z(1-y) = 0$: "Todos los Z son Y"

Se obtiene multiplicando miembro a miembro las dos ecuaciones:

(3) $z\,y(1-y)(1-x) = 0$

y eliminando en (3) $y(1-y)$. En efecto, en virtud de (1) y (2), tenemos:

$$z(1-x)\,y = z(1-x)(1-y) = z(1-x)\,y(1-y) = 0$$

De donde:

$$z(1-x) = z(1-x)(1-y) = 0$$

obtenemos la conclusión:

(4) $z(1-x) = 0$: "Todos los Z son X"

La eliminación mencionada $y(1-y) = 0$ expresa el principio de no contradicción que deriva de la "ley del índice", considerada por Boole la más fundamental de toda la Lógica: En efecto, de:

$$(1)\ x = x^2$$

pasamos a $(2)\ x - x^2 = 0$

$$(3)\ x(1-x) = 0$$

Otro ejemplo de deducción silogística en la que el símbolo v entra en una de las ecuaciones pero no en la solución, es el modo *DARII*:

(1) $x(1-y) = 0$: "Todos los X son Y"

(2) $v\,z = v\,x$: "Algunos Z son X"

De donde se obtiene (ver luego resolución de ecuaciones "expansionadas")

(3) $v\,z(1-y) = 0$: "Algunos Z son Y"

Las funciones electivas

De la simple consideración de las formas canónicas de las proposiciones categóricas no siempre es posible obtener en el cálculo hasta ahora diseñado todas las inferencias inmediatas y mediatas tradicionalmente admitidas como válidas.

Pero la novedad de capital importancia en el sistema booleano es el método para transformar las formas canónicas o cualquier otra, en virtud de la "propiedad de las funciones electivas".

Las fórmulas con símbolos electivos son *funciones* de tales símbolos [utilizando el término *función* en su aceptación matemática (función analítica)]. Boole estudia la propiedad *expansiva* o de *desarrollo* de las funciones electivas. Puesto que los símbolos electivos se combinan según las leyes de la cantidad, Boole apela al teorema de Mc Laurin (o de Taylor)[29] para establecer el valor de una función: Desarrollar una función polinómica $f(x)$ según la Fórmula de Taylor consiste en expresarla así:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + Tn(x)$$

[19] Boole dice partir del teorema de McLaurin en *Analisis matemático*, edic. cit., p. 99. En cambio, en *Laws of Thought*, p. 79, nota, dice partir de la fórmula de Taylor.
Colin McLaurin (1698-1746) ofrece el desarrollo de la función **f(x)** según el teorema que lleva su nombre en *Treatise on fluxions* (1742). Y Brook Taylor (1685-1731) había desarrollado la función **f(x)** según la serie que lleva su nombre en *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715).

En donde $Tn(x)$ recibe el nombre de término complementario, y los coeficientes vienen dados a través de las derivadas sucesivas de $f(x)$: f', f'', f''',...

Si en la fórmula de Taylor hacemos $a = 0$, entonces la fórmula resultante es la fórmula de Mc Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + Tn(x)$$

A partir de esta fórmula procede Boole para obtener su función lógica como sigue: puesto que los valores que las variables booleanas (símbolos electivos) pueden tomar son 1 y 0, y supuesto el principio para Boole más importante de todo su sistema: $x = x^2 = \ldots\ldots = x^n$, la fórmula de Mc Laurin puede ser escrita así:

$$(1)\ f(x) = f(0) + \left(\frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots\ldots\right.$$

$$\ldots\ldots + \left.\frac{f^n(0)}{n!} + Tn\right)x$$

que para $x = 1$ obtenemos:

$$(2)\ f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{f^n(0)}{n!} + Tn$$

y por lo tanto:

$$(3)\ f(1) - f(0) = \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{f^n(0)}{n!} + Tn$$

Sustituyendo ahora en (1) todo el paréntesis por su equivalente [segundo miembro de la igualdad (3)] obtenemos:

$$f(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x = f(1)x + f(0) - f(0)x =$$

$$= f(1)x + f(0)(1 - x)$$

Nota: Este desarrollo es válido sólo admitiendo en un desarrollo numérico, como es la fórmula de Mc

De $x^2 = x$ cabe deducir los principios tradicionales lógicos como el de no contradicción. Así:

Si $x^2 = x$,

entonces $x - x^2 = 0$ y $x(1 - x) = 0$

En cambio, a partir de $x^3 = x$ y, por lo tanto, $x - x^3 = 0$, obtenemos:

(a) o bien $x(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x - x^3 = 0$

(b) o bien $x(1 - x)(-1 - x) = 0 \Leftrightarrow -x + x^3 = 0$

Pero tanto en (a) como en (b) aparecen elementos no interpretables en el álgebra de Boole (no sujetos a la ley $x(1 - x) = 0$. Estos elementos son: -1 y $1 + x$. Resulta que:

(1) $(-1)^2 \neq -1$

(2) Si $(1 + x)^2 = 1 + x$ y $x^2 = x$

entonces:

$$1 + x + x + x = 1 + x$$

de donde:

(4) $x + x = 0$

Pero este resultado plantea varios problemas:

a) (4) es válido sólo si $x = 0$. Esto es, hay que admitir el principio:

$$x + x = 0 \Rightarrow x = 0$$

o bien:

(5) $x \neq 0 \Rightarrow x + x \neq 0$

b) Pero el principio (5) exige que el "+" no puede ser entendido en sentido exclusivo, porque $x + x = 0$ si el "+" es exclusivo (diferencia simétrica):

$$(x - x) + (x - x) = 0.$$

Pero para que el "+" tenga significado, por ej., en "$x + y$", Boole exige precisamente que x e y sean clases mutuamente excluyentes, con lo que se elimina la ecuación $x + x = x$.

En cualquier caso, lo que sí cabe resaltar es el esfuerzo de Boole por mantener siempre el paralelismo entre su Algebra de clases y el Algebra numérica con valores 1 y 0. Para llegar a la fórmula definitiva de la función booleana se hace preciso tratar los símbolos electivos como símbolos cuantitativos con valores 1 y 0 para determinar los coeficientes en la función expansionada (o desarrollada). Pero para retornar de las fórmulas desarrolladas en el Algebra numérica 1 y 0 al

Laurin, un principio exclusivamente lógico, cual es: $x = x^2 = x^3 = \ldots\ldots = x^n$. Hay más, el principio que Boole mismo reconoce como fundamental de la Lógica es $x^2 = x$, y señala expresamente la diferencia entre $x^2 = x$ y $x^3 = x$.

Algebra de clases hay que ofrecer una interpretación a los coeficientes numéricos, hay que asignarles un significado lógico. Y Boole, valiéndose de analogías no siempre convincentes llega a las siguientes conclusiones: el coeficiente *1* indica la presencia de la clase

denotada por el constituyente correspondiente; el coeficiente *0* y el coeficiente *1/0* indican la exclusión de la clase (éste último porque implica la no existencia del costituyente correspondiente y es, por ello, prácticamente, igualado a *0*. (Confert *Laws*, pp.96-100).

El constituyente que sigue al coeficiente 1/0 "debe ser igualado por separado a cero". *(Análisis*, 113)[30]. La prueba, dice *(Ibidem)*, es evidente a partir de (62). Pero lo que allí prueba es que cualquier constituyente de una función desarrollada cuyo coeficiente no satisface la ley del índice $x^2 = x$, o su equivalente le ley de dualidad $x\ (1 - x) = 0$; debe ser igualado a *0*.

Razón:

Supongamos la ecuación:

(1) $w = at + P$

donde w es un símbolo lógico, t un constituyente de una función cuyo coeficiente a no satisface la ley del índice, y P la suma de los restantes constituyentes cuyos coeficientes satisfacen la ley del índice.

Tenemos entonces:

$w = w^2$; $t = t^2$ y $P = P^2$

y por tanto:

(2) $w^2 = (at + P)^2$

(3) $w^2 = a^2 t^2 + 2at P + P^2$

y puesto que el producto de dos constituyentes de una función desarrollada es *0*:

(4) $w^2 = a^2 t^2 + P^2$

y aplicando la ley del índice:

(5) $w = a^2 t + P$

Con (1) y (5) obtenemos:

(6) $0 = a^2 t + P - at + P$

(7) $0 = a^2 t - at$

(8) $0 = (a - a^2)\ t = a\ (1 - a)\ t$

y puesto que $a\ (1 - a) \neq 0$, ya que a no satisface la ley de dualidad, resulta, finalmente, que: $t = 0$

En resumen, si un coeficiente no satisface la ley del índice, su constituyente debe ser igualado a cero. Pero de aquí no se sigue que el constituyente que tiene como factor 1/0 ha de ser igualado a cero; ni que si es igualado a cero, entonces 1/0 no satisface la ley del índice.

Y el coeficiente 0/0, al que Boole llama "símbolo indefinido de clase" (por representar 0/0 en Aritmética un número indefinido), expresa una limitación del constituyente que le sigue; limitación traducible por "algunos" y simbolizada por "*v*", pero ahora el significado de "*v*" *(Laws of thougth*, p. 97) no coincide con el que le había atribuido antes en el *Análisis*, donde "*v*" se caracterizaba sólo negativamente por simbolizar una clase distinta de la clase nula. En *Laws*, en cambio, 0/0 indica que "se deben tomar todos, algunos, o ninguno de los miembros de la clase a la que antecede".

Boole no dejó resuelto de forma definitiva la cuestión de la interpretación de los coeficientes en las funciones desarrolladas. En sus indagaciones posteriores a las *Laws*, y expresadas en los manuscritos inéditos antes citados, Boole pretendía poner en correspondencia los cuatro tipos de coeficientes con "cuatro categorías del pensamiento": universal, no existente, indefinido e imposible.

Pese a estos problemas de interpretación, el concepto de "expansión" de las funciones electivas, constituye para Boole la llave de su cálculo de clases. Constituye, ante todo, un instrumento para el completo análisis de las proposiciones o ecuaciones lógicas, por cuanto que permite determinar las relaciones recíprocas entre los términos, y constituye, así, un procedimiento para la resolución de las ecuaciones electivas.

Desarrollo de la función booleana

Cualquier fórmula del álgebra que envuelva el símbolo electivo x o $(1 - x)$ puede ser llamada función de x: $f(x)$. Y una función de x se dice que está desarrollada cuando tiene la forma siguiente:

$$f\ (x) = ax + b\ (1 - x)$$

en donde x admite sólo los valores *1* y *0*; pero a y b son los coeficientes que pueden tomar otros valores distintos de *1* y *0*. Y, si una función dada no posee la forma "expansionada", puede ser puesta en tal forma, observando las leyes que rigen el establecimiento de los coeficientes, cuales son:

Dada la forma expansionada:

$$f(x) = ax + b(1 - x) \ldots\ (1)$$

puesto que x es susceptible de tomar los valores *1* y *0*:

Para $x = 1$ tendremos $f(1) = a1 + b\ (1 - 1) = a.$

Para $x = 0$ " $f(0) = a0 + b\ (1 - 0) = b.$

de donde, sustituyendo en (1), tenemos:

$$f(x) = f(1)\ x + f(0)\ (1 - x) \ldots\ (2)$$

[30] En efecto: Si $w = P + 1/0\ t$ (donde w es un símbolo electivo; t el constituyente del que es factor $1/0$ y P la suma de los restantes constituyentes) entonces: $w - P = t/0$; $t = (w - P)\ 0 = 0$.

Esta es la forma que Boole considera como un caso particular del Teorema de McLaurin (o la serie de Taylor).

De manera que dada una función, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1 + x}{2 - x},$$

se puede transformar en otra equivalente a ella, pero en forma expansionada. Puesto que:

$$f(1) = \frac{1 + 1}{2 - 1} = 2 \quad y \quad f(0) = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

tendremos que:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}(1 - x).$$

Cualquier función, pues, puede ser expansionada. Así, una función de dos variables (símbolos electivos) tiene el siguiente desarrollo:

$f(x, y) = f(1, 1)x\ y + f(1, 0)\ x\ (1 - y) + f(0, 1)\ (1 - x)\ y + f(0, 0)\ (1 - x)\ (1 - y)$;

y de modo análogo cabe desarrollar funciones con n varianes resultando el número constituyentes: 2^n.

Dos propiedades de las funciones desarrolladas que resultan útiles para la solución e iterpretación son:

1. El producto de dos constituyentes cualesquiera es 0, ya que si, por ej., uno de los constituyentes es de la forma xy, otro necesariamente habrá de contener $(1 - x)$ ó $(1 - y)$; y el producto de un término por su complementario es cero: $x\ (1 - x) = 0$.

2. Si cada constituyente de la función desarrollada posee el coeficiente 1, entonces la suma de todos los constituyentes es 1.

Resolución de ecuaciones

Puesto que toda ecuación electiva puede ser expresada en forma $f(x, y.....) = 0$, si efectivamente adopta esa forma, entonces cada uno de los constituyentes es igual a 0. Y dadas dos ecuaciones electivas $f(x, y.....) = 0$, y $f'(x, y.....) = 0$, éstas pueden ser *reducidas* a una sola, que incluirá todos y cada uno de los términos de cada una de las ecuaciones. Y sobre la base de esta reducción cabe llevar a cabo la *resolución* de ecuaciones.

(1) Por expansión de $f(x)$ tenemos:

$$f(1)\ x + f(0)\ (1 - x) = 0$$

de donde:

$$(2)\ [f(1) - f(0)]\ x + f(0) = 0 = \begin{cases} f(1)\ x - f(0)\ x + f(0) \\ f(1)\ x + f(0)\ (1 - x) \end{cases}$$

$$(3)\ x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)}$$

y asimismo:

$$(4)\ 1 - x = -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)}$$

ya que:

(a) $(1 - x)\ [f(0) - f(1)] + f(1) = 0$

(b) $f(0)\ (1 - x) - f(1)\ (1 - x) + f(1) = 0$

(c) $f(0)\ (1 - x) - f(1) + f(1)\ x + f(1) = 0$

(d) $f(0)\ (1 - x) + f(1)\ x = 0$

Y, puesto que rige el principio $x\ (1 - x) = 0$, podemos obtener, a partir de (3) y (4):

$$(5)\ -\frac{f(0)\ f(1)}{[f(0) - f(1)]^2} = 0$$

resultado de multiplicar $x\ (1 - x)$: a la izquierda de las igualdades (3) y (4) y de multiplicar:

$$\frac{f(0)}{f(0) - f(1)} \times -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)}$$

a la derecha de las igualdades (3) y (4), de donde, finalmente:

$$(6)\ f(0)\ f(1) = 0$$

La fórmula (6) tiene, pues, plena vigencia para la resolución de ecuaciones $f(x) = 0$, excepto cuando el miembro a la izquierda de = tenga valor 0.

Volviendo ahora a la deducción silogística, cabe presentar ésta como *reducción* y *resolución* de ecuaciones por el procedimiento de la expansión de funciones. Un silogismo será, entonces, tratado como dos ecuaciones (dos premisas) que son reducidas a una sola ecuación, y sobre ella se resuelve eliminando el término medio respecto del término sujeto de la conclusión. Así, cabe tratar el modo *BARBARA* de la siguiente manera:

Así, dada una ecuación $f(x) = 0$, en donde $f(x)$ representa una fórmula con símbolos electivos otros que x, y se desee despejar x, esto es, $x = f(y, z...)$, podemos resolver la ecuación (despejar x) del siguiente modo:

(3) $x - xy + z - z x = 0$

Y desarrollado ahora la función-ecuación con respecto a x (término medio):

(4) $(1 - 1y + z - z1) x + (0 - 0 y + z - z0) (1 - x) = 0$,

y simplificando:

(5) $(1 - y) x + z (1 - x) = 0$

Aplicando en (5) la regla de resolución: $f(0) . f(1) = 0$ para la eliminación de x:

(6) $[(1 - y) 0 + z (1 - 0)] . [(1 - y) 1 + z (1 - 1)] = 0$,

esto es:

(7) $z (1 - y) = 0$: "Todos los Z son Y"

Mediante este procedimiento de desarrollo de funciones y de reducción y resolución de ecuaciones es posible, obtener las inferencias inmediatas o mediatas clásicas pero a las que no cabía llegar por el simple procedimiento de la multiplicación miembro a miembro, tal como antes hemos visto. Y, así, se puede obtener ahora la solución adecuada a la conversión *per accidens* (inferencia inmediata) por la expansión de la función:

De (1) $x (1 - y) = 0$: "Todos los X son Y"

cabe inferir:

(2) $x - yx = 0$

(3) $y = x/x$

y desarrollando ahora $f(x)$:

(4) $y = 1x + 0/0 (1 - x)$

$y = x + v(1 - x)$:

La clase de los Y está formada por la clase de los X y de un número indefinido de miembros de la clase no-X. Esto es, "Algunos Y son X"

Asimismo, en la inferencia mediata (deducción silogísitica) la eliminación del término medio en el silogismo aparece como un caso particular de los procesos más generales de reducción y resolución. Por ej., podemos hallar por el procedimiento indicado la solución del modo *Darii*, en una de cuyas premisas entra el símbolo v:

De (1) $x (1 - y) = 0$: "Todos los X son Y"

(2) $vz = vx$: "Algunos Z son X"

obtenemos:

(1) $x (1 - y) = 0$: "Todos los X son Y"

(2) $z (1 - x) = 0$: "Todos los Z son X"

Reducidas estas dos ecuaciones a una sola, tenemos:

por desarrollo de $f(x)$:

(4) $(1 - 1y + vz - v1) x + (0 - 0y + vz - v0) (1 - x) = 0$

y simplificando:

(5) $[(1 - y) + vz - v] x + vz (1 - x) = 0$

(6) $(1 - y) x + vzx - vx + vz - v zx = 0$

(7) $x - yx - vx + vz = o$

Aplicando en (7) la regla de resolución $f(0) . f(1) = 0$ para la eliminación de x:

(8) $(0 - y0 - v0 + vz) . (1 - y1 - v1 + vz) = 0$

(9) $vz [(1 - y) - v + vz] = 0$

(10) $vz (1 - y) - vzv + (vz)^2 = 0$

(11) $v z (1 - y) = 0$: "Algunos Z son Y".

O, también, a partir de (10)

(12) $vz - vzy - vz + vz = 0$

(13) $vz - vzy = 0$

(14) $vz = vzy$ "Algunos Z son algunos Y"

Cálculo de proposiciones

El cálculo diseñado por Boole no se restringe al campo de las propociones categóricas, entendidas éstas como expresiones de relaciones entre clases. Tanto en el *Análisis* como en las *Laws* Boole indaga las conexiones deductivas entre las proposiciones que él llama "hipotéticas" o "secundarias" para distinguirlas de las "categóricas" o "primarias".

En el *Análisis* (p.87) define una proposición "hipotética" como "Dos o más categóricas unidas por una cópula (conjunción), y los diferentes tipos de proposiciones hipotéticas se nombran por sus respectivas conjunciones, a saber, condicionales (si), disyuntivas (o,o), etc".

De manera que el término "hipotético" no se limita a una sola especie: las "condicionales", sino que indica genéricamente las proposiciones conexas por cualquier tipo de conjunción.

En las *Laws* (p.152 y ss.) habla de proposiciones "secundarias". Son aquellas que no expresan, como las "primarias", relaciones entre "cosas", sino entre "proposiciones".

El aspecto fundamental, señalado tanto en el *Análisis* como en las *Laws*, es que las conexiones deductivas en tal tipo de proposiciones no dependen de ningu-

obtenemos:

por reducción de ecuaciones:

(3) $x - x y + v z - v x = 0$

vas en tal tipo de proposiciones no dependen de ninguna consideración que haga referencia a los términos considerados como representantes de individuos o clases sino de la verdad de las proposiciones elementales

que están incorporadas en las proposiciones hipotéticas.

El cálculo que Boole busca establecer ahora es, en suma, "el cálculo de proposiciones inanalizadas" que devendrá el fundamento de la lógica formal. Y Boole, es plenamente consciente de la distinción entre el cálculo de clases y éste otro, en que las proposiciones consideradas "conciernen o se refieren a otras proposiciones consideradas como verdaderas o falsas".

Pero también es cierto que para Boole ambos cálculos poseen una estructura formal análoga, aquella que expresa las leyes que se insertan en la constitución misma de la mente, y difieren sólo por las reglas de interpretación.

El símbolo *1* en el cálculo hipotético representa el "universo hipotético", que "abarca todas las cosas y cúmulos de circunstancias concebibles".

Los símbolos electivos *x, y, z*... representan la selección de aquellos casos en los que las proposiciones *X, Y, Z*... son verdaderas.

Y, si nos limitamos a la consideración de una determinada proposición *X*, y dejamos de lado cualquier otra consideración, sólo son concebibles dos casos: que la proposición dada sea verdadera o que sea falsa; y como quiera que estos dos casos conjuntamente agotan el universo de la proposición, y como el primero está representado por *x*, el segundo lo estará por el símbolo *1-x*.

Si se admiten otras consideraciones, cada uno de estos casos podrá resolverse en otros, individualmente menos extensos, cuyo número dependerá del número de consideraciones ajenas admitidas. Así, para dos proposiciones, *X* e *Y*, el número total de casos imaginables es:

xy	*X* verdadera, *Y* verdadera
$x(1 - y)$	*X* verdadera, *Y* falsa
$(1 - x)\, y$	*X* falsa, *Y* verdadera
$(1 - x)(1 - y)$	*X* falsa, *Y* falsa

En cualquier caso, el alcance del universo hipotético no depende en absoluto del número de circunstancias que se tienen en cuenta. En la tabla anterior si miramos las expresiones electivas para los dos primeros casos la suma es *x* (*x* es verdadera) independientemente de cualquier consideración sobre *y;* y si sumamos las expresiones electivas en las dos últimas, el resultado es *1-x* (*x* es falsa).

Por lo tanto, haya pocas o muchas circunstancias, la suma de las expresiones electivas que representan

tudiar las teorías de los autores clásicos sobre la lógica, y que recuerda la definición leibniciana de las "verdades eternas". Las relaciones entre las proposiciones componentes de las proposiciones *secundarias* vienen establecidas por su determinación temporal. Así, por ejemplo, en la proposición condicional: "si la proposición *X* es verdadera, la proposición *Y* es verdadera" significa, según Boole, "el tiempo en el que la proposición *X* es verdadera es el tiempo en el que la proposición *Y* es verdadera". Es esta relación de coexistencia la que, aun cuando no agote el significado de la proposición hipotética, al menos está presente en el enunciado de la proposición, y la que resulta suficiente para la inferencia lógica. Por lo que las proposiciones hipotéticas han de ser consideradas, en general, en cuanto a sus relaciones de coexistencia. Según esto:

Los símbolos *X, Y, Z*... denotan las proposiciones elementales sobre las que recaerán las aserciones; los símbolos *x, y, z* representan, entonces, los actos de la mente por los que fijamos en qué porción de tiempo las proposiciones *X, Y, Z* son verdaderas. *x* denota el tiempo en que proposición *X* es verdadera. *(Ibidem*, p. 168).

El símbolo *1*, utilizado para representar el universo "hipotético", también queda afectado por ese carácter temporal: en tanto que el *0* representa "nada en referencia al elemento del tiempo", *1* representará "el universo o la totalidad del tiempo al que se supone referido el discurso de alguna manera". Y así como en las proposiciones primarias el universo de discurso queda, a veces, limitado a una pequeña porción del actual universo de cosas, así también en las proposiciones secundarias el universo de discurso puede quedar limitado a una pequeña porción de tiempo o puede comprender toda la duración del tiempo, esto es, puede ser "eterno", y, a menos que se ponga expresamente alguna limitación, el símbolo *1* expresa, en las proposiciones secundarias, la "eternidad". *(Ibidem*,p. 167).

Obviando el matiz temporal, o no, dado a la interpretación del símbolo *1* como universo hipotético, es posible, y así lo hace Boole, desarrollar el cálculo proposicional partiendo de las reglas de interpretación de los símbolos anteriormente introducidos: puesto que el símbolo *(1 - x)* selecciona los casos en que la proposición *X* es falsa, cabe llegar a una nueva forma de representar la verdad de esta proposición: porque según esto, si la proposición *X* es verdadera, no se dan los casos *(1 - x)* en su universo hipotético, por lo tanto $(1 - x) = 0$, o lo que es lo mismo $x = 1$. Esto es, "*X* es verdadera" se representa por $x = 1$.

todos los casos concebibles será la unidad.

En las *Laws of Thought* (pp. 166-76) la interpretación de los símbolos es análoga, pero lleva añadido un matiz temporal. La verdad queda caracterizada temporalmente; caracterización que hace Boole después de es-

Y de modo análogo "*X* es falso" podría ser representado por $x = 0$. Y sobre la base de la representación de la verdad y la falsedad, mediante *1* y *0* cabe también expresar las proposiciones hipotéticas o secundarias en forma de ecuaciones. Por ej.: $x\,y = 1$ expresa que dos

proposiciones dadas, *X* e *Y*, son simultáneamente verdaderas (lo que actualmente se denomina conjunción de dos proposiciones). La "implicación material": "si *X* es verdadera, entonces *Y* es verdadera", es representada en esta simbología booleana así: $x\,(1 - x) = 0$, esto es, la proposición que afirma conjuntamente la verdad de *X* y la falsedad de *Y* es falsa. Y otros ejemplos(*Análisis*, p. 90 y ss.):

$xy = 0$: "Si *X* es verdadera, *Y* no es verdadera"

$(1 - x)y = 0$: "Si *X* no es verdadera, *Y* no es verdadera"

$x - 2xy + y = 1$: "O *X* es verdadera o *Y* es verdadera"

Si las proposiciones hipotéticas son tratadas como ecuaciones, los silogismos hipotéticos devienen sistemas de ecuaciones. Y cabe llegar a las conclusiones silogísiticas por deducciones algebraicas. Ejemplos:

1. Silogismo disyuntivo:

(1) $x + y - 2xy = 1$: "O *X* es verdadera, o *Y* es verdadera";

(2) $x = 1$: "pero *X* es verdadera";

luego:

(3) $y = 0$: "por lo tanto *Y* no es verdadera";

en efecto:

(4) $x + y - 2xy = 1$

(5) $(x - y)^2 = 1$

(6) $x - y = 1$;

y según (2): $x = 1$:

(7) $1 - y = 1$

(8) $y = 0$

2. Silogismo condicional *(modus ponens)*:

(1) $x\,(1 - y) = 0$: "Si *X* es verdadera, *Y* es verdadera"

(2) $x = 1$: "pero *X* es verdadera"

(3) $1 - y = 0$ ó $y = 1$: "por lo tanto *Y* es verdadera"

El desarrollo del cálculo de las proposiciones hipotéticas o secundarias es, pues, posible y efectivo cuando la verdad y la falsedad de una proposición son representadas, respectivamente, por los símbolos *1* y *0*. Es entonces cuando el álgebra boolena puede ser considerada como un álgebra bivalente. Pero las dificultades surgen cuando se tiene en cuenta el significado atribuido anteriormente al símbolo *1* como representando el "universo hipotético" o "la eternidad"; porque si "*1*" representa el "universo hipotético", esto es, "todos los casos y cúmulos de circunstancias concebibles", entonces el significado $x = 1$ es que la selección de casos en los que *X* es verdadera da el mismo resultado que la selección de todos los casos o posibilidades de verdad que el universo hipotético contiene. Y esto, evidentemente, no vale para toda proposición, sino sólo para aquellas que afirman la totalidad de las posibilidades de verdad y no dependen, por lo tanto, en cuanto a su verdad, de situaciones contingentes; en terminología wittgensteiniana, ello vale sólo para las "tautologías". Y, análogamente, el símbolo $x = 0$ expresará más que la simple falsedad; expresará la "contradicción". De manera que, si se tiene en cuenta el significado de *1* como "universo hipotético" (como "espacio lógico" en términos de Wittgenstein), el cálculo booleno de las proposiciones secundarias no es, propiamente hablando, un cálculo proposicional, sino, más bien, un método para la transformación de equivalencias puramente formales. Hay trasformación, no de operaciones lógicas, sino de relaciones (de implicación "formal" o de equivalencia lógica). Son sus sucesores, McColl y Johnson, quienes *ex novo* delinearon el cáculo proposicional, el cual constituirá la base y el primero en la jerarquía de los cálculos lógicos. En el ordenamiento actualmente consolidado de los cálculos lógicos se va del cálculo proposicional a través del cálculo funcional hasta el cálculo de clases y el de relaciones, y no a la inversa, como hace Boole, que da la primacía al concepto de clase y al sistema de clases. Pero las cuestiones de primacía de unos cálculos respecto de otros, vienen mediatizados, sobre todo en el caso de Boole, por concepciones filosóficas sobre la naturaleza de la Lógica.

Cálculo de probabilidades

En el *Análisis* no hace aún Boole mención de la probabilidad, pero en las *Laws* dedica 6 capítulos a la probabilidad y materias afines, aplicando en este terreno su cálculo lógico. Despues de las *Laws* escribió una serie de artículos[31] en los que desarrolla las ideas más significativas y también técnicas que justifican su método.

El método peculiar de Boole en el tratamiento de la probabilidad consiste en la aplicación de su cálculo lógico de proposiciones al cálculo de las probabilidades; este método reporta la ventaja práctica de "haber

[36] "On the conditions by wihch solutions of questions in the theory of probabilities are limited" (1854); "On a general method in the theory of probabilities" (1854); "On the application of the theory of probabilities to the question of the combination of testimonies or judgements" (1857); "On the theory of probabilities" (1862). *Confert* ed. en la Bibliog.

discutido ya la teoría de las proposiciones, haber definido sus unidades, principios y haber establecido métodos para determinar en cada caso el contenido y el carácter de su mutua dependencia" (*Laws*, p. 248). Por ello, la noción de (en vez de hablar de) "suceso", puede ser sustituida, de modo equivalente, por la de "verdad de la proposición", que establece que ese suceso ha tenido, o no, lugar.

Esta posibilidad de sustituir "suceso" por "proposición" había sido señalada, antes de Boole por Aucillon en 1794, y por Bolzano en 1837[32], pero sólo con la construcción del cálculo booleano de proposiciones consigue un desarrollo efectivo.

El planteamiento general que hace Boole de la probabilidad es éste: Buscar un método mediante el cual, dadas las probabilidades de sucesos cualesquiera, bien sean simples o compuestos, dependientes o independientes, condicionales o no, se pueda hallar la probalidad de algún otro suceso conectado con los anteriores, y cuya expresión venga expresada o implícita en un conjunto de *data* que forman ecuaciones lógicas.

Boole clasifica los sucesos en *simples* y *compuestos*. Un suceso compuesto es "aquel cuya expresión en el lenguaje o concepción en el pensamiento depende de la expresión o la concepción de otros sucesos, los cuales, con relación al primero, pueden ser considerados como sucesos simples". Así, decir "llueve" o decir "truena" es expresar que tiene lugar un suceso simple; pero decir "llueve y truena" o decir "llueve o truena", es expresar que tiene lugar un suceso compuesto" (*Laws*, p. 14).

Pero, sigue constatando Boole, no todos los problemas en probabilidad presuponen que los *data* son las probabilidades de los sucesos simples independientes. Hay, por ej., problemas concernientes a cuestiones de causación (o probabilidad condicional), en donde los *data* son probabilidades de sucesos compuestos expresados por proposiciones condicionales, cuyos antecedentes están sujetos a la condición de ser mutuamente excluyentes, pero existe un único consecuente, el suceso *E*. Tenemos entonces un sistema de proposiciones; y partiendo de la definición laplaciana de probabilidad -"la razón entre el número de casos favorables a un suceso y el número total de casos favorables o contrarios y todos igualmente posibles"-, Boole añade otro principio a los comunmente aceptados.

Este nuevo principio concierne a las circunstancias en las que los sucesos son considerados dependientes o

tre sucesos implicados en los *data*, entonces esos sucesos han de ser tomados como (estocásticamente) independientes. Por ej: "la probabilidad de un suceso x es medida por la fracción a/m; la de un suceso y por la fracción b/n; pero absolutamente nada se conoce de la conexión de los sucesos x e y. Se busca la probabilidad del suceso x y, i. e., de la conjunción de los sucesos x e y. .. Hay, así, a b casos en los que el sucesso x y tiene lugar en los m n casos favorables o desfavorables para su aparición... Por consiguiente, la probabilidad del suceso x y es ab/mn. O bien, si representamos la probabilidad del suceso x por p y la del suceso y por q, entonces la probabilidad de la combinación x y es $p\ q$"[33].

Boole introduce la siguiente simbología, fundada por analogía en la de su álgebra de clases:

x representa la clase de casos (en un total dado) en los que tiene lugar el suceso X, esto es, los casos favorables a la aparición de X.

p..... representa la probabilidad numéricamente expresada del suceso X.

1..... representa la clase total de casos, el universo lógico.

0..... representa la clase nula.

$x = 1$... representa que todos los casos son favorables a X, esto es: $p = 1$.

$x = 0$... representa que ningún caso es favorable a X; y, entonces, $p = 0$.

$1 - x$... representa la clase de casos en los que X no ocurre; la probabilidad de que X no ocurra, es $1 - p$.

Tenemos, pues, que $x + (1 - x) = 1$ y $p + (1 - p) = 1$

De modo análogo, en la combinación de dos o más sucesos tendremos:

x y representa la clase de casos en los X e Y ocurren ambos.

$x\ (1 - y)$..... representa los casos en los que ocurre X y no Y.

$(1 - x)\ y$..... representa los casos en los que ocurre Y y no X.

$(1 - x)\ (1 - y)$..... representa los casos en los que no ocurre ni X ni Y.

$x\ (1 - y) + y\ (1 - x)$... representa los casos en los

independientes, y Boole mantiene que si los *data* de un problema no implican una conexión o dependencia en-

no ambas; etc.

---

[32] *Confert* J. M. Keynes, *A treatise on probability* Macmillan, Londres, 1921. p. 5.
[33] "On the general method in the theory of probabilities", 1854, edic. cit., p. 433-34, y *Laws of Thought*, p. 256-57.

En la aplicación de su nuevo principio procede Boole *(Laws*, p. 258) "en el orden natural del pensamiento", yendo del caso menos complicado: los sucesos simples incondicionados, hasta el más complejo de los sucesos compuestos y condicionados.

1. Sobre cómo determinar la probabilidad de un suceso compuesto dependiente de sucesos simples incondicionados, que son por definición independientes.
   Si $p, q, r...$ son las respectivas probabilidades de sucesos incondicionados simples $x, y, z...$, la probabilidad de un suceso compuesto V será $[V]$, siendo esta función $[V]$ resultado de cambiar en la función V los símbolos $x, y, z...$ por $p, q, r,...$
   Mediante este resultado Boole puede pasar, sin más, de la expresión lógica de un suceso compuesto a una expresión algebraica que presenta su probabilidad en términos de los sucesos incondicionados simples de los que está compuesto.

2. Para hallar la probabilidad condicional de V', dado V, (probabilidad de V' dado que V haya tenido lugar):
   "Bajo las mismas circunstancias [siendo $p, q, r...$ las respectivas probabilidades de los sucesos incondicionados simples $x, y, z...$] la probabilidad de que si el suceso V ocurre, entonces también ocurrirá otro suceso V', será:

$$\frac{[V\,V']}{[V]}$$

   en donde $[V\,V']$ denota el resultado obtenido al multiplicar juntas las funciones lógicas V y V', y cambiando en el resultado $x, y, z...$ por $p, q, r...$
   Hasta aquí ningún resultado de (1.) y (2.) depende del nuevo principio de Boole. A continuación considera el caso de sucesos simples que son condicionados:

3. Sean $p, q, r...$ las probabilidades de sucesos simples $x, y, z...$ cuando se cumple la condición V. Se pide determinar las probabilidades absolutas $l, m, n...$ de $x, y, z...$ La regla exacta para resolver el problema planteado es:

$$\frac{[xV]}{[V]} = p, \quad \frac{[yV]}{[V]} = q, \quad \frac{[zV]}{[V]} = r,...$$

Así, por ejemplo:
Si $V = xyz + xy\,(1 - z) + (1 - x)\,yz + (1 - x)\,(1 - y)\,z.$
Entonces:
$xV = xyz + xy\,(1 - z)$
$yV = xyz + xy\,(1 - z) + (1 - x)\,yz$
$zV = xyz + (1 - x)\,yz + (1 - x)\,(1 - y)\,z$
Según esta regla, cualquier ecuación de la forma

$$\frac{[xV]}{[V]} = p$$

queda determinada como una ecuación numérica.
Y como ilustración ofrece Boole el siguiente ejemplo *(Laws*, p. 262): Sea la extracción de bolas de una urna, tomando exclusivamente en consideración los casos en los que las bolas extraídas son de color blanco o de mármol. En este supuesto hay una probabilidad p de que la bola a extraer sea blanca y una probabilidad q de que sea mármol. Y a partir de estos datos exclusivamente se pide hallar la probabilidad m de que en la próxima extracción, sin referencia alguna a la condición arriba mencionada, salga una bola blanca; y, asimismo, la probabilidad n de que salga de mármol.
Si x representa la extracción de una bola blanca e y la de una bola de mármol, entonces la condición V vendrá representada por la función lógica:

$$V = xy + x\,(1 - y) + (1 - x)\,y$$

De donde tenemos que:

$$xV = xy + x\,(1 - y) = x$$
$$yV = xy + (1 - x)\,y = y$$

Por lo tanto:

$$[xV] = m \qquad [yV] = n$$

Y las ecuaciones finales de problema son:

$$\frac{m}{m\,n + m\,(1 - n) + (1 - m)\,n} = p$$

$$\frac{n}{m\,n + m\,(1 - n) + (1 - m)\,n} = q$$

De donde obtenemos:

$$m = \frac{p + q - 1}{q}; \quad n = \frac{p + q - 1}{p}$$

en donde *[xV]* denota el resultado obtenido al multiplicar *V* por *x*, según las reglas del cálculo lógico, y cambiando en el resultado *x*, *y*, *z*... por *p*, *q*, *r*...

Precisando que, para obviar una posible objeción, en el planteamiento anterior no se requiere que las extracciones de una bola blanca y una de mármol sean independientes.

Pasa luego Boole a establecer la regla para determinar "en cualquier cuestión de probabilidades la conexión lógica del *quaesitum* con los *data*. Esto es, determinar la conexión del suceso *W (x, y,...)* cuya probabilidad es buscada como una función lógica de sucesos *S (x, y,...) T (x, y,...)* cuyas probabilidades están dadas.

4. En general, dadas las probabilidades *s*, *t*... de un sistema de sucesos independientes *S*, *T*... la probabilidad *w* de cualquier suceso *W* puede ser hallada por medio de la ecuación siguiente:

$$(1)\ w = A + 0B + \frac{0}{0}\,C + \frac{1}{0}\,D$$

en donde *A*, *B*, *C* y *D* son funciones de los símbolos de los otros sucesos.
Según se ha discutido anteriormente en la interpretación de los coeficientes de una función desarrollada, la ecuación anterior queda reducida a:

$$(2)\ W = A + vC$$

en donde *v* es arbitraria y $D = 0$

También tenemos, por la propiedad de que la suma de los constituyentes de la función desarrollada es *1*, que:

$$(3)\ A + B + C + D = 1$$

y dado que $D = 0$

$$(4)\ A + B + C = 1 = V$$

Por lo tanto $A + B + C$ es el "universo de los sucesos *s*, *t*, ... en cuestión, y las probabilidades *p*, *q*, ... dadas en los *data* han de ser interpretadas como condicionadas por:

$$V = A + B + C.$$

Por otra parte tenemos también que (2) presenta a *w* como una combinación de esas condiciones. Y, según la regla (3), si la probabilidad de un suceso *S* es *p*, de uno *T* es *q*, etc., entonces las supuestas probabilidades absolutas de *S*, *T*,..... son:

$$(5)\quad \frac{[sV]}{[V]} = p,\ \frac{[tV]}{[V]} = q,\ldots$$

donde *[sV]*, *[tV]*,... son las probabilidades absolutas

dad del suceso indefinido *q*: es, por lo tanto, arbitrario, pudiendo tomar valores entre *0* y *1*. Aparece sólo cuando los *data* son insuficientes para determinar la probabilidad buscada. Si aparece, puede hallarse la probabilidad del límite superior y del inferior, dando a *v* los valores máximo *(1)* y mínimo *(0)*. Así:

$$\text{lim. superior de la prob. } w = \frac{[A + C]}{[V]}$$

y

$$\text{lim. inf. de la prob. } w = \frac{[A]}{[V]}$$

Este es el método general de Boole para las probabilidades. A la ilustración de las aplicaciones e interpretaciones del mismo dedica Boole el capítulo XVIII de sus *Laws*, y en los escritos posteriores sobre la probabilidad estudia Boole las aplicaciones y las implicaciones filósoficas que provienen de su interpretación lógica de la probabilidad.

La Lógica como ciencia de las leyes del pensamiento

Según confiesa el mismo Boole, la novedad de un método en el tratamiento de la Lógica reside en el tratamiento simbólico de las leyes elementales que rigen nuestras operaciones mentales. La Lógica es la ciencia de las leyes de nuestro pensar y tales leyes pueden ser expresadas simbólicamente.

Que el objeto de la Lógica son las leyes del pensamiento es una tesis que Boole recoge de Hamilton, si bien éste reservaba la "ciencia mental" para la Filosofía, una de cuyas partes es la Lógica. Boole, en cambio, se ve contreñido a afirmar que la Lógica no constituye una parte de la Filosofía y a no asociar más Lógica y Metafísica, sino Lógica y Matemática, porque "la Lógica se apoya como la Geometría en verdades axiomáticas y sus teoremas están construidos sobre la doctrina general de los símbolos que constituyen el fundamento del análisis reconocido" *(Análisis*, p. 50). Y que las leyes puedan ser expresadas simbólicamente, por lo que la Lógica queda íntimamente ligada al lenguaje, es tesis que Boole recoge de Whately. La tesis propia de Boole, será la conjunción de ambas,

solutas buscadas. Y según la regla (2) la probabilidad del suceso W bajo la misma condición V será:

$$(6)\ prob.\ w = \frac{[A + vC]}{[V]}$$

en donde la constante v representa la probabilidad apoyada en la constatación de una feliz circunstancia: el hecho de que, sea investigando las leyes de los signos, sea haciendo objeto directo de investigación los procesos internos del pensamiento, los resultados obtenidos en ambos casos son formalmente equivalentes. Ahora bien ¿A qué obedece ese paralelismo?

En el *Análisis* Boole oscila entre la afirmación de la "conexión íntima" entre Lógica y lenguaje:

> "Aquello que hace posible la Lógica es la existencia en nuestras mentes de nociones generales -nuestra capacidad de concebir una clase y de designar sus miembros individuales con un nombre común. La teoría de la Lógica está, así, íntimamente conexa con la del lenguaje" *(edic. cit.*, p. 42),

y la afirmación de la instrumentalidad no indispensable del lenguaje respecto de la Lógica:

> "Sostengo que tanto la Lógica como el lenguaje dependen, de manera esencial, de nuestra capacidad de formar nociones generales por la facultad de abstracción. El lenguaje es un instrumento de la Lógica, pero no un instrumento indispensable". (p. 123).

La misma oscilación se encuentra en las *Laws of Thought* y en los manuscritos. Así, por un lado, declara que "es una verdad generalmente admitida que el lenguaje es un instrumento de la razón humana y no meramente un medio para la expresión del pensamiento: *(Laws*, p. 24). Por otro lado, en cambio, sostiene que no es necesario entrar en la famosa discusión de las escuelas: si el lênguaje ha de ser considerado como un instrumento esencial del razonamiento, o si, por otra parte, es posible para nosotros razonar sin su ayuda". *(Ibidem).*

Y, si con tal oscilación se deja sin resolver la esencialidad o no del lenguaje para el pensamiento, entonces el fundamento del análisis booleano se tambalea, porque la concordancia entre leyes simbólicas y leyes del pensamiento podría ser meramente casual, y el álgebra de la lógica no sería, en tal caso, más que un simple algoritmo para la "matemática de la gramática" y no para "la matemática del intelecto humano".

Para salir de esta embarazosa situación busca Boole partir del "concepto" como "dato", al que se asigna un "nombre".

"La facultad de abstracción" no es presupuesta, sino que es analizada en su acto operante: Se examina la posibilidad misma del simbolismo. En sus últimos escritos (edic. de Hesse, cit., p. 62 y ss.) Boole distingue dos acepciones de lógica: el sentido lato de la Lógica Formal, y el sentido restringido de la Lógica, como ciencia de las leyes del pensamiento, en cuanto que éste viene expresado en el uso de los términos generales o universales, de nombres que indican clases de objetos que poseen una cierta semejanza.

En la primera acepción, la Lógica no se reduce a los particulares. Hablando de las verdades axiomáticas de la Geometría, sostenía que eran verdades generales que primeramente eras vistas, y sólo podían ser vistas, en la aplicación particular. Una observación similar vale también aquí. Los principios generales de la Lógica, considerada como la ciencia de todo pensamiento que admite expresión, sólo pueden ser aprehendidos a través de sus manifestaciones particulares que están fundadas en la Lógica de clases, en la lógica de los números y en las otras ciencias en las que ella puede ser desarrollada". *(Ibidem*, p. 80).

Y, aun admitiendo que no se agota el análisis de la función simbólica y de la filosofía de la Lógica con la ilustración particular de la Lógica de clases, Boole sostiene, sin embargo, que:

> "no existe alguna otra ciencia particular capaz de satisfacer igualmente bien los fines de tal ilustración. Ninguna otra ciencia nos pone tan directamente cara a cara con algunas de las más profundas cuestiones que implica la conexión entre pensamiento y lenguaje" *(Ibidem*, p. 80).

Se acoge a la vieja doctrina que divide el pensamiento en concepto, juicio y razonamiento, que, pese a los intentos por reducirlos a una unidad intelectual, "parece estar fundada sobre una distinción real en la naturaleza de esta facultad", de modo que el orden de su desarrollo -del concepto al razonamiento-, reconocido en la concepción aristotélica, sigue vigente, según Boole, con pleno derecho:

> "Al contemplar un grupo de objetos nos damos cuenta, quizá, del hecho de su semejanza recíproca. Nos percatamos de las múltiples cualidades que posee esa semejanza, las combinamos mentalmente en un concepto (*concepción*) y expresamos ese concepto con un nombre. Las cosas que ese nombre representa, separadas en el pensamiento de todas las otras cosas del Universo, constituyen una *clase*. Quizá parangonemos esta clase con otras clases, cuyas nociones han sido formadas mediante un proceso similar de pensamiento. Nos hacemos, así, conscientes de relaciones entre clases. Vemos que una clase está contenida en otra como una parte en el todo -una especie en un género-" *(Ibidem*, p. 65).

Boole se acoge, pues, al ordenamiento jerárquico que en el plano gnoseológico va del concepto al razonamiento, y esta *metafísica* del *concepto* condiciona los desarrollos de los cálculos efectivos. Explica el predominio que en el Algebra boolena de la Lógica posee el cálculo de clases y el tratamiento de las proposiciones categóricas, como *primarias* así como la *secun-*

En la primera acepción, la Lógica no se reduce a la lógica de clases. Pero:

> "es imposible llegar a una concepción adecuada de la Lógica en su sentido más alto sino es a través del estudio de sus formas y manifestaciones particu-

dariedad del esbozo de cálculo proposicional.

Pero, a su vez, el desarrollo de los cálculos afectivos y la posición privilegiada atribuida a uno de ellos -el cálculo de clases- influye en la filosofía de la Lógica, imponiendo condiciones y estableciendo límites al análisis del pensamiento en la determinación de su estructura: la Lógica quedará definida como la ciencia de las leyes del pensamiento, pero esas leyes, si no vienen determinadas por, al menos vienen en conformidad con, las leyes del cálculo privilegiado. De manera que, si bien en el esquema general los principios generales de Lógica, considerada como la ciencia de todo el pensamiento, admiten expresiones múltiples en cálculos o lógicas particulares, sin embargo, la hipóstasis de uno de los cálculos impondrá una determinación absoluta de la estructura mental: las leyes del pensamiento (y de la Lógica) serán las leyes del cálculo privilegiado (las leyes del Algebra de clases: conmutativa, distributiva, del índice). Boole eleva, así, a la categoría de Lógica general, la Lógica de clases. Prueba de que esto es así es el empeño de Boole en buscar el fundamento de los principios lógicos en los principios de su Algebra de clases. Así, en *Laws of Thought* (pp. 48-51), Boole considera que el principio de no contradicción, que ha sido considerado comunmente como el axioma fundamental de la Metafísica, no es otra cosa que la consecuencia de una ley del pensamiento, cuya expresión es $x^2 = x$. En efecto, esta ley "del índice" o "de dualidad" puede ser escrita en forma de $x - x^2 = 0$, de donde se infiere que $x (1 - x) = 0$, expresión ésta que corresponde al principio de no contradicción.

Esta tesis de Boole produjo críticas de muchos de sus contemporáneos (R. Harley, R. L. Ellis, J. Venn, etc.), y las críticas coinciden en objetar que, aun siendo la ley del índice una verdad elemental, querer considerarla como fuente de la ley de no contradicción es simplemente fruto de una inversión del orden natural de las cosas. Porque, argumenta Venn ("Boole's logical system", en *Mind*, 1, 1876, pp. 479-91), sin presuponer la ley de no contradicción "no podríamos ni siquiera distinguir una cosa de otra; no podríamos ni siquiera, para restringirnos a estos símbolos, distiguir x de aquello que no es x sin hacer uso de ella" (p. 491).

La discusión entre Boole y sus críticos así planteada no tiene salida. Porque Boole hace una constatación exacta: que para la deducción lógica no son lo más importantes ni son imprescindibles, los principios tradicionales. Y ante esta situación (situación que se reproduce actualmente ante la construcción de sistemas lógicos divergentes del cálculo proposicional o del funcional) cabe ensayar la vía del convencionalismo. La tesis de Carnap de que la Lógica no es una moral soluciona como *deus ex machina* el problema: la Lósistemas formales que obedece sólo a postulados convencionales. Pero "el convenconalismo no toca, sino acentúa la cuestión de la que nace toda la filosofía boolena de la Lógica: la posibilidad de construir cálculos que no sean agregados casuales de "signos", sino coordinación intencional de 'símbolos'"[34]; la posibilidad de construir sistemas formales, no como conjunto coordinable de signos según estipulaciones convencionales, sino como conjunto de símbolos que poseen capacidad significativa, aun cuando no esté aún costituida una interpretación específica.

La salida de Boole fue la de hispotasiar los axiomas de su sistema lógico en leyes del pensamiento cometiendo una ilícita μετάβασις εἰς ἄλλο γένος.

Así, sostiene que la ley del índice es una ley del pensamiento ejemplificada en el lenguaje. Decir "bueno, bueno" en relación a cualquier cosa es inútil; es lo mismo que decir "bueno". Así, hombres "buenos, buenos" es equivalente a hombres "buenos". Semejantes repeticiones de palabras son a veces empleadas para acentuar una cualidad, "pero este efecto es puramente secundario y convencional; no está fundado en las relaciones intrínsecas del lenguaje y del pensamiento" (*Laws*, p. 33). Pero ¿Por qué este efecto no está fundado en las relaciones intrínsecas del lenguaje o del pensamiento? Porque así lo prescribe la ley del índice.

Y análoga conclusión se desprende de la argumentación exhibida por Boole para mostrar que la propiedad conmutativa del producto lógico, $xy = yx$, es una ley del pensamiento (*Laws*, p. 31): Si en el lenguaje hay licencias poéticas que permiten invertir el orden natural de términos (adjetivos y sustantivos), ello se debe a que "esas licencias son las expresiones naturales de una libertad sancionada por las leyes íntimas del pensamiento, pero no ejercitada en el uso ordinario del lenguaje por razones de conveniencia".

En realidad, esta hipóstasis de las leyes del Algebra de clases en leyes del pesnamiento produce una explicación circular de las leyes por parte de Boole.

Esta circularidad queda patente en el caso de la ley del índice o de dualidad, tal como la explica en *Laws*, (pp. 47-48). Veamos el caso:

En este pasaje dice Boole que la tal ley tiene la siguiente expresión matemática $x^2 = x$ (En el *Análisis*, p. 55, en cambio, su expresión es: $x\,x = x$ ó $x^2 = x$ ó $x^n = x$, y recibe el nombre de ley "del índice").

Boole llama la atención sobre la circunstancia de que la ecuación que expresa "esta ley fundamental del

gica no es una ciencia de las leyes del pensamiento; la lógica está abierta a una multiplicidad indefinida de

ciendo en nota, podría pensarse que la exitencia de la

[34] F. Barone, *Logica formale e logica trascendentale, II*, ed. cit., p. 109

ecuación $x^2 = x$ exige la existencia de la ecuación de 3er grado $x^3 = x$. Pero no; la ley del pensamiento ha de ser de 2º grado. ¿Por qué? Pues porque la ecuación $x^3 = x$ no es interpretable en el sistema de Lógica. En efecto, escribiéndola en cualquiera de sus formas:

(1) $x\ (1 - x)\ (1 + x) = 0$

(2) $x\ (1 - x)\ (-1 - x) = 0$

Topamos con elementos "no interpretables": $1 + x$ y $-1 - x$. El primero no es interpretable, porque no podemos concebir la adición de una clase x al universo 1. El segundo no es interpretable porque el símbolo -1 no está sujeto a la ley $x\ (1 - x) = 0$, a la que se sometan todos los elementos del Algebra de clases. Por lo tanto, la ecuación $x^3 = x$ no admite interpretación análoga a la de la ecuación $x^2 = x$.

Si cortamos aquí la argumentación de Boole, resulta que el criterio para determinar qué sea una ley del pensamiento es la interpretación en el sistema de la Lógica de clases. Porque, incluso llega a avisar Boole, la ley expresada en la ecuación $x^3 = x$ rige en algunos campos matemáticos. Pero lo que realmente cuenta para no elevarla al rango de ley del pensamiento es que no tiene interpretación en el Algebra de clases. En definitiva, las leyes del pensamiento serán aquellas que rigen (tienen interpretación) en al Algebra de clases.

Pero Boole, luego de explicar por qué la ecuación $x^3 = x$ no es ley de pensamiento, pasa a explicar por qué lo es la ecuación $x^2 = x$, y es ahora cuando el psicologismo funciona a plena marcha. La ecuación fundamental del pensamiento es la de 2º grado, porque así está formada nuestra mente,

> "porque operamos en el análisis y en la clasificación por división en pares de opuestos, o, como se dice técnicamente, por *dicotomía*. ...Si la ecuación en cuestión fuese la de 3er grado... nosotros deberíamos haber procedido por una especie de *tricotomía*, cuya real naturaleza resulta imposible para nosotros con nuestras facultades actuales".

La razón, pues, positiva aducida ahora por Boole para asignar a $x^2 = x$ el rango de ley del pensamiento es que él sabe de buena tinta cómo está constituida nuestra mente. Sabe con arreglo a qué leyes funciona.

Se podría especular tomando como hipótesis la vigencia de $x^3 = x$ y estudiando sus consecuencias. Pero en tal supuesto todo el proceso de nuestro entender habría sido diferente de lo que es. Y el hecho, no la especulación, es que nuestro pensamiento se rige por ley expresada por la ecuación $x^2 = x$, a la que, llama ahora Boole "ley de dualidad".

Boole considera conveniente recordar (*Laws*, p. 11) que "es tarea de la ciencia no crear leyes, sino descubrirlas, y que nosotros no originamos la constitución de nuestras mentes... y que las leyes del intelecto humano no dependen de nuestro deseo". Bien podrá quedar definida la Lógica, según esto y siguiendo a Hamilton, como una "psicología fenoménica".

3. Continuadores de Boole

Al igual que el sistema de Boole no invalidaba el de la Lógica tradicional o silogística, sino que suponía una profundización de los procesos lógico-formales y deductivos, así también los desarrollos posteriores al Algebra boolena no imponen una superación de ella, sino que la engloban manteniendo su validez original. La Lógica como ciencia se constituye con Boole como un núcleo de cuestiones que pueden ir ampliándose, tomando nuevas trabazones, pero que por sí mismas mantienen un "cierre" en sus relaciones y en sus resultados propios de una disciplina autónoma y científica. De ese núcleo booleno parte, en la segunda mitad del siglo XIX, una renovación muy considerable de las investigaciones lógicas, Tanto desde el punto de vista cualitativo -mejoramiento de los sistemas formales construidos-, como desde el punto de vista cuantitativo. Beth[35] señala, basándose en la bibliografía de A. Church en *The journal of symbolic logic*, el extraordinario crecimiento del número de publicaciones de Lógica a partir de la segunda mitad del siglo XIX.

El Algebra de la Lógica no queda limitada al cálculo de clases elaborado por Boole, sino que desde sus comienzos y en virtud de sus mismos principios metodológicos, por su misma naturaleza "calculatoria", no puede limitarse a un único tipo de cálculo, sino que siempre queda abierta la posibilidad de una multiplicidad de cálculos, incluso sobre una misma interpretación: cual la de la Lógica de clases.

William Stanley Jevons (1835-1882)

Reelaboración del cálculo de clases

Jevons, discípulo de De Morgan, toma de éste y de Boole interés por la Lógica. Fue profesor de Lógica y de Filosofía Mental y Moral en el Owen's College de

[35] "Hundred years of symbolic logic", *cit.* p. 331. Para las siguientes décadas y omitiendo las obras de Boole y de De Morgan:
1798-1807: 1. 1828-1837: 1. 1858-1867: 8.
1808-1817: 1. 1838-1847: 0. 1868-1877: 31.
1818-1827: 1. 1848-1857: 3. 1878-1887: 100.

Manchester desde 1866 hasta 1876, y luego profesor de Economía Política en la universidad de Londres desde 1876 hasta 1880.

En Lógica se mostró pronto crítico con el sistema de Boole con quien mantuvo al respecto comercio epistolar entre 1863 y 1864[36].

Según Jevons, los principios del sistema de Boole no son, como su autor pretende, expresión de la generalización del proceso del razonar; antes bien, el sistema puede ser desarrollado de una manera más simple: hay al menos un principio -la "ley de la unidad"- que debe ser introducido, y este principio es inconsistente con la notación de Boole ("llena de errores, cuando no de falsas analogías").

El principio que es necesario integrar en el cálculo es una "verdad evidente por sí misma", a saber, la de que "es la mismo A o A o A que A". Esta "ley autoevidente del pensamiento" será llamada en *Pure Logic* "la ley de la unidad": $A + A = A$. De la ignorancia de esta ley por parte de Boole procede, según Jevons, "al menos algunas de las principales dificultades, oscuridades o incluso errores de su sistema", siendo así que es tan evidente como la ley booleana de la dualidad: $xx = x$.

> "El reconocimiento de esta ley es inconsistente con la notación y con algunos de los principios y procedimientos admitidos por el profesor Boole. No puedo por menos de pensar que el numeral *1* y el signo de negación quedan privados de un riguroso significado en vuestro sistema, y que $1 - x$ es usado realmente por usted como el negativo lógico o contrario de x, exactamente igual que la x minúscula es usada por el profesor De Morgan como el negativo de la mayúscula X" (Jourdain, *o.c.*, p. 115).

En respuesta a estas objeciones, Boole admite la validez de la ley de la unidad para las ecuaciones pero no para las expresiones lógicas. Y, ante las réplicas de Jevons, contesta Boole que:

> "no es verdad que en lógica $x + x = x$, aunque es verdad que $x + x = 0$ es equivalente a $x = 0$". (Jourdain, *o.c.* p. 117).

La correspondencia terminó, pues, con desacuerdo, y esto llevó a Jevons a formular una cuestión de fondo:

> "¿corresponde vuestro sistema a la lógica del pensamiento común?".

La respuesta negativa a esta cuestión es la que origina las investigaciones de Jevons en Lógica, simplificando el cálculo de Boole, desechando aquellas expresiones

"Nos encontramos, así, con dos sistemas de notación, que ofrecen los mismos resultados, uno de ellos los ofrece con fuerza y significado auto-evidentes; el otro por procedimientos oscuros y simbólicos. El peso de la prueba recae sobre el autor o sobre los defensores del sistema oscuro para demostrar que es de algún modo superior al sistema evidente" (*Pure Logic*, p. 74).

La "artificialidad" del sistema booleno es resultado, según Jevons, no sólo de la interpretación en sentido exclusivo de la suma de clases, sino de la introducción de la sustración y la división entre clases. Todo ello porque Boole está obsesionado por mantener la máxima analogía con el cálculo numérico. Este "matematicismo" del sistema booleno quedaría justificado si condujese a resultados a los que no puede llegar otro sistema. Pero Jevons sostiene que su sistema posee la misma capacidad que el sistema de Boole. Y:

> "las formas de mi sistema pueden, además, ser obtenidas despojándo a su sistema de un hábito matemático que, al menos, no le es esencial. Quedando, así, su sistema reducido a su propia simplicidad, se puede inferir que no es la Lógica parte de la Matemática, como queda implícito en los escritos del profesor Boole, sino que más bien es la Matemática un derivado de la Lógica" (*Pure Logic*, p. 3).

El proyecto de Jevons es, pues, la reconstrucción del sistema booleno despojado del revestimiento matemático y tratando la Lógica como "ciencia de la cualidad distinta de la cantidad", porque la forma primitiva y fundamental del razonar es la forma cualitativa. Baste como prueba de ello (*The principles of science*, p. 48) el hecho de que "el significado extensivo de un nombre es una cosa cambiante y fluctuante, mientras que el significado intensivo puede, sin embargo, permanecer fijo". Por ello, Jevons se propone construir un cálculo de los términos tomados en intensión. Pero en realidad su sistema puede ser interpretado en extensión. Y así lo examinaremos para su comparación con el de Boole.

Sistema de Jevons

a) *Simbología.*

Utiliza símbolos de De Morgan y de Boole, e introduce otros nuevos. Utiliza tres letras mayúsculas para los términos positivos: A, B, C... y minúsculas para los negativos: a, b, c...

AB representa aquello que es tanto A como B, o (en intensión) la suma de los significa-

que no poseen una interpretación obvia en Lógica y estableciendo procesos de desarrollo más simples.

dos de los dos términos combinados.

$A+B$ (o también $A \cdot/\cdot B$) representa aquello que

---

[36] Confert Jourdain, "The development...", *cit.*, vol. 44 (1913), pp. 113-128.

es A o B o entrambos, o (en intensión) un término con uno de los dos significados.

$A = B$ significa que A es idéntico a B, o (en intensión) A significa lo mismo que B.

0 es la clase nula, la nada, o (en intensión) lo que es contradictorio o "excluido del pensamiento".

No usa el símbolo 1 para representar el universo, sino lo que él llama, primero, "abecedario" y, luego, "alfabeto lógico": los 2^n términos que son la expansión de n términos. Así, para $n = 2$, A y B, el alfabeto lógico es: AB, Ab, aB, ab. Jevons usualmente los escribe en columna en vez de en fila y poniendo la suma igual a 1. En esto, pues, no hay diferencia esencial respecto de Boole.

Puesto que también, al igual que Boole, la única relación que Jevons utiliza es =, la simbolización de las proposiciones de la lógica tradicional es también similar a la de Boole. Así:

-Todo A es B: $A = AB$

-Ningún A es B: $A = Ab$

-Algún A es B: $CA = CAB$ ó $UA = VAB$

-Algún A no es B: $CA = CAb$ ó $UA = VAb$

b) *Principios.*

Estos no aparecen todos explícitamente formulados. En *Principles of science* usa implícitamente algunas leyes. Recuerda las tradicionales de identidad, contradicción y tercero excluido. Pero en *Pure Logic* aparecen otros explícitamente formulados. Ordenados sistemáticamente son:

(1) Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

(2) $AB = BA$.

(3) $AA = A$.

(4) $Aa = 0$.

(5) $A + B = B + A$.

(6) $A + A = A$.

(7) $A(B + C) = AB + AC$.

(8) $A + AB = A$: "ley de absorción" para la simplicación; no posible en Boole.

(9) $A = A(B + b)(C + c)...$: regla para la expansión de un término A con respecto a cualesquiera otros términos B, C... Equivale a la ley no formulada:

El "alfabeto lógico" de cualquier término se construye con él y su negativo $(A + a)$... Habida cuenta de esto y junto con la ley (9), el alfabeto lógico de cualquier número de términos A, B, C... será:

(11) $(A + a)(B + b)(C + c)...$

Junto con estos principios utiliza Jevons unas reglas que resultan fértiles para los procesos deductivos y sirven para simplificarlos.

Una de estas reglas es la "sustitución de similares"; su principio es: "lo que es conocido de un término puede ser afirmado de su igual o equivalente"; y la regla permite sustituir A por B o B por A cuando $A = B$. Jevons considera este principio como el primer principio del razonamiento, más fundamental que el *dictum de omni et nullo* de Aristóteles.

Otro principio que subyace al *dictum* de Aristóteles, que resulta igualmente fundamental, a la vez que no se reduce a la "sustitución de equivalentes", es la sustitución de las variables por sus valores.

Sobre la base de estos principios y reglas acomete Jevons la construcción del "procedimiento de inferencia", en el que distingue dos momentos o procesos: el de la *deducción* y el de la *inducción:* "En la deducción procedemos a desarrollar las consecuencias de una ley. Captamos el significado, los contenidos, los resultados o las inferencias referentes a una proposición dada. La inducción es exactamente el proceso contrario. Dados ciertos resultados o consecuencias, se trata de descubrir la ley general de la que ellos derivan: (*Principles*, p. 11). En el capítulo VII de los *Principles* examina en detalle la diferencia entre el proceso de inferencia deductiva, que es sintética, y el proceso de inferencia inductiva que es analítica y constituye el proceso inverso del deductivo. Y como todos los procesos inversos, el inductivo es más complejo que el directo (deductivo). Y la complejidad aumenta con el aumento de los términos que entran en combinación y las leyes cuya regulación hay que buscar. Jevons se limita a la investigación de las combinaciones lógicas posibles para el caso de dos y de tres términos, y reconoce que si se tratase de aplicar el mismo método a las relaciones de cuatro o más términos, "el trabajo resultaría impracticablemente grande". Si bien las dificultades prácticas del cálculo podrían quedar obviadas mediante la utilización de "instrumentos calculatorios", en los que Jevons siempre tuvo puesta la idea.

En 1869 construyó una máquina lógica que presentó al año siguiente ante la Royal Society[37]. La máquina fue la primera con capacidad suficiente para

(10) $A + 0 = A$.

[37] Véase M. Gardner, *Máquinas lógicas y diagramas*. Trad. Eli de Gortari. Grijalbo. México. 1973. pp. 141-159.

menos tiempo que el empleado para resolverlo sin la ayuda de la máquina. Jevons explica en "On the mechanical performance..." la construcción y funcionamiento de su "piano lógico", así llamado por la apariencia de la máquina: En el frente del piano se pueden ver las letras que representan las 16 combinaciones posibles de cuatro términos y sus correspondientes negaciones. El teclado consta de 21 teclas: ocho teclas con letra desde el centro hacia la izquierda y otras ocho hacia la derecha. Y las otras cinco letras son: para la igualdad (en el centro); para el punto final; para el punto y aparte; y dos para la disyunción no-exclusiva (la conjunción no tiene signo).

Jevons consideraba que su máquina, si bien no tenía uso práctico, sí era valiosa didácticamente para demostrar la naturaleza del análisis lógico, y también proporcionaba una prueba convincente de la superioridad de la lógica boolena sobre la aristotélica; pero la exigencia metodológica de transcribir proposiciones en forma de ecuaciones la hizo innecesariamente complicada. A ello se añade el hecho de que no hay procedimiento eficiente para transcribir a la máquina las proposiciones particulares (=algunos). Y, finalmente, la máquina puede trabajar con un número muy reducido de términos. Pero la objeción de principio a la máquina (como al método) de Jevons es que la máquina no ofrece una solución, sino que ofrece todas las filas que resultan consistentes (no contradictorias) en la columna del alfabeto lógico. Pero no ejecuta el paso adicional de analizar esas línaeas y mostrar la solución (o la conclusión) buscada. La tarea de reducir la respuesta, la identificaba Jevons con el proceso de inducción o "problema inverso". Pero no proporcionó el método mecánico para ejecutar tales reducciones.

En la regulación del proceso deductivo el método de Jevons, análogo al de Boole, consiste en la aplicación de la regla de expansión a las premisas y en la eliminación de los términos. Las eliminaciones son de dos tipos: "intrínsecas" y "extrínsecas". Las eliminaciones intrínsecas pueden efectuarse sustituyendo una parte de un miembro de una ecuación por el otro miembro. Así, si:

(1) $A = BCD$

podemos obtener:

(2) $A = ACD = ABD = AC = AD$

ya que AA = A; AB = BA,y, si A = B, entonces AC = BC.

Así, pues, si tenemos (1), entonces tenemos, por

$$A\,(B + b)$$

o la forma:

$$Aa$$

Tenemos que:

$$A\,(B + b) = A$$

y

$$Aa = 0$$

La eliminación extrínseca consiste en la simplificación o "solución" de ecuaciones y puede tener lugar cuando se unen dos o más ecuaciones. El método de Jevons consiste en aplicar la regla de expansión a las ecuaciones (a las premisas de un silogismo, por ejemplo), y se eliminan los términos que no concuerdan entre sí. Por ejemplo, dadas las premisas:

Todos los A son B: $A = AB$

Todos los B son C: $B = BC$,

podemos determinar A respecto de B y C expandiendo A:

(1) $A = AB + Ab$

(2) $A = AC + Ac$

Sustituyendo en (1) A por su equivalente en (2), o, lo que es lo mismo, por el principio (9): $A = A\,(B + b)\,(C + c)$... tenemos:

(3) $A = ABC + ABc + AbC + Abc$

Sustituyendo, ahora, en el segundo miembro de la igualdad de (3) los valores de A y de B dados en las premisas, tenemos:

(4) $A = ABBC + ABBCc + ABbC + ABbc$

Simplificanado en (4), por la aplicación de las leyes $AA = A$ y $Aa = 0$, obtenemos, finalmente:

(5) $A = ABC$

y

(6) $A = AC$ (por la primera premisa).

Y, en general, dado un número cualquiera de premisas o condiciones lógicas, se trata de dar "la descripción de toda clase objetos o de todo término en cuanto gobernado por tales condiciones"; esto es, se trata de construir el "alfabeto lógico" de todas las posibles combinaciones de los términos de las premisas, y, luego, eliminar las combinaciones contradictorias con ellas. Es el mismo planteamiento que hace Boole: la

Así, pues, si tenemos (1), entonces tenemos, por ejemplo:

$$A.A = BCD.BCD = BB.CC.DD = BCD.D = AD$$

Otra eliminación intrínseca es posible cuando un término tiene la forma:

determinación de un elemento de una proposición cualquiera compleja como función lógica de los restantes. La diferencia reside en que el método de Jevons resulta más intuitivo o gráfico. Como los diagramas de Venn, el "alfabeto lógico" es una lista de las diferentes com-

binaciones (diferentes compartimentos) en el diagrama. El método de Jevons resulta, como el de los diagramas, más intuitivo, porque exhibe todas las posibilidades a la vez. Renuncia al revestimiento matemático dado por Boole al desarrollo de las funciones electivas y a la solución de las ecuaciones reducidas.

Pero en lo referente a la laboriosidad de los procedimientos no queda claro que el método de Jevons aventaje al de Boole, porque al aumentar el número de proposiciones y de términos, la construcción del "alfabeto lógico" y las operaciones ulteriores resultan muy laboriosas y engorrosas. Por ejemplo: para tres ecuaciones con dos términos cada una (seis en total) tendríamos un "alfabeto lógico" de 64 miembros, cada uno de los cuales ha de ser investigado por separado en cada ecuación, exigiendo 192 operaciones.

No es, pues, de extrañar que quienes posteriormente (Schröder, por ejemplo) trabajaron en el álgebra de la lógica, prefirieran acogerse a los métodos booleanos de expansión, reducción y resolución de funciones.

Desde el punto de vista técnico, por lo tanto, las contribuciones realmente positivas de Jevons al Algebra de la Lógica son: introducción de la suma lógica en sentido no exclusivo, y la introducción, por resultas de lo anterior, de la ley de la unidad A + A = A, ley que quedará como fundamental del Algebra de la Lógica. Su admisión supone una mayor simetría entre las operaciones suma y productos lógicos, semetría señalada ya por De Morgan, pero que alcanzará pleno rendimiento con la formulación de las relaciones de dualidad y con la axiomatización (por Whithead y por Huntington) del Algebra de la Lógica.

La mayor divergencia entre Jevons y Boole no reside, pues, en los aspectos técnicos del sistema, sino en la concepción de la Lógica -y el sistema que la representa: la Lógica de clases- con respecto a la Matemática. Porque la Lógica Algebraica de Boole, dice Jevons, si bien es cierto que no queda reducida a la matemática en cuanto ciencia de la cantidad, sin embargo queda excesivamente sometida a la Matemática, y, en todo caso, fue un error de Boole no reconocer el *status* superior de la Lógica respecto de la Matemática. "A mi juicio, la Lógica es la ciencia superior, la base general de la Matemática como de todas las otras ciencias. El número no es más que una discriminación lógica, y el Algebra, una Lógica altamente desarrollada. Así es fácil comprender la profunda analogía señalada por Boole entre las formas de la deducción algebraica y las de la Lógica. La Lógica se parece al Alge-

ciencia de la cantiad (la Matemática). Con ello anticipa la tesis logicista de la fundamentación de la Matemática en la Lógica. No resulta, así, extraño que el principal propulsor del logicismo, Frege, cite favorablemente a Jevons en su *Grundlagen der Arithmetik*, p. 55 (traducción castellana: *Los fundamentos de la aritmética*, p. 62) y preste especial atención a la caracterización de "número" ofrecida por Jevons, quien entiende "número" como sinónimo de "diversidad", porque la identidad es unidad y sólo la diferencia produce la pluralidad. Las unidades numéricas no son tales en cuanto perfectamente semejantes, sino en cuanto diferenciadas, y sólo así su unión puede generar los otros números. El número abstracto es, pues, "la forma vacía de la diferencia" *(Principles*, p. 158).

Ahora bien, la tesis logicista de Jevons no pasa de ahí: de una afirmación categórica de la subordinación de la Matemática a la Lógica. No hay elaboración de técnicas para la reconstrucción de conceptos y proposiciones matemáticos sobre la base de conceptos y proposiciones lógicos. Y es que, en realidad, Jevons no presta suficiente atención a la filosofía de la Lógica. Frente al consistente psicologismo de Boole, al que se opone, Jevons se limita a hacer suya la tesis de Spencer acerca de la naturaleza "objetiva" de la Lógica. Y, así, las leyes de identidad, de contradicción y de tercero excluido son leyes "objetivas": "verdaderas tanto en la naturaleza del pensamiento como de las cosas" e inherentes a la base común de toda existencia. El psicologismo de origen hamiltoniano es sustituido por el monismo de tipo spenceriano que funde en un único nexo símbolos, pensamiento y cosas.

John Venn (1834-1923)

Lecturer de Lógica y de Ciencias Morales en la Universidad de Cambridge. A él se debe el término "lógica simbólica", que dio luego título a su obra más importante sobre lógica. Obra importante, no sólo por su orientación metodológica con su esquema de notación diagramática, sino también por sus "notas históricas" sobre el desarrollo de la Lógica formal (simbólica) y sus relaciones con la Lógica "ordinaria".

Porque, según Venn, la lógica "ordinaria" (la silogística tradicional) no queda anulada o sustituida por la lógica simbólica, como tampoco la geometría euclídea fue sustituida por la generalización de la geometría analítica.

Y la lógica ordinaria, aunque constituye un sistema

bra como el molde a la colada. Boole trocó la colada por el molde" *(Principles*, pp. 155-56).

Jevons trata, pues, invertir la subordinación establecida por Boole, de la "pura cualidad" (la Lógica) a la

y la lógica ordinaria, aunque constituye un sistema más restringido que la lógica simbólica, conserva, sin embargo, su mérito propio en la restricción del punto de vista, cual es el de mantener sus reglas y sus formas en una estricta armonía con el lenguaje de la vida

ordinaria. Y "la dependencia de la lógica respecto de los accidentes del lenguaje es mucho más estrecha de cuanto los lógicos han, generalmente, admitido" *(Symbolic logic*, Introd., p. XXVI, nota).

Por lo que respecta a la relación de la Lógica con la Matemática, Venn, si bien se muestra de acuerdo con Jevons en despojar a la Lógica del excesivo revestimento matemático que le había proporcionado Boole, no obstante, se muestra siempre moderado en sus críticas, como también en sus modificaciones técnicas. Como Boole, afirma la existencia de "una ciencia de las leyes y de las combinaciones de los símbolos". Tal ciencia no debería ser llamada "matemática", porque ésta posee en la tradición un significado más específico. La lógica simbólica y la matemática pueden ser consideradas como "ramas de un lenguaje de símbolos que poseen algunas, aunque muy pocas, leyes de combinación en común. Esta comunidad de legislación o uso, en tanto en cuanto existe, constituye nuestra principal justificación para adoptar un reconocido sistema para ambos" *(Ibidem*, p. XVI).

Conviene, según Venn, determinar y aclarar las leyes de combinación que tienen en común los distintos lenguajes de símbolos, y atenuar en lo posible las diferencias "dialectales" que tienen lugar, aunque legítimamente, en los lenguajes particulares (Matemática, Lógica).

En el lenguaje de la Lógica es conveniente atenuar las diferencias de uso de los símbolos, a fin de acentuar las estructuras generales comunes a usos diversos, debido, precisamente, a la alta capacidad del lenguaje simbólico para sacar significados nuevos e inesperados de las viejas y familiares formas *(Ibidem*, p. XIV).

La lógica "ordinaria" tiene su dialecto, pero, sin poner en duda su legitimidad, es también indudable que la lógica simbólica posee superior capacidad generalizadora y proporciona mejores instrumentos para resolver cuestiones que quedan ambiguas en la perspectiva tradicional. Una de esas cuestiones es el tratamiento de las formas proposicionales. Distingue Venn tres interpretaciones de los significados de las proposiciones:

(1) La explicación tradicional o *predicativa*, que considera las proposiciones como expresando la inherencia de un predicado en un sujeto.

(2) La que considera las proposiciones como expresando relaciones de inclusión y de exclusión entre clases (interpretación ésta que aparece, según Venn, por primera vez en Gergonne y fue, luego, elaborada por Schröder en el volu-

"lleno" o el "vacío" de tales combinaciones, esto es, la existencia, o no, de cosas que poseen las propiedades por ellas expresadas.

Cada una de estas explicaciones tiene sus pros y sus contras. La conveniencia depende de las circunstancias, y varían según el propósito. Así, cada una de ellas tiene su propia base, obtiene su apropiado número de proposiciones fundamentales distintas y posee sus propios méritos y defectos; la primera mantiene una estrecha correspondencia con el lenguaje ordinario, y la segunda hace "intuibles" las proposiciones. Pero, con todo, Venn prefiere la tercera, en la que ve las ventajas de las anteriores, pero no sus defectos: falta de ilustración y de generalización en la primera; falta de simetría y poca potencia para expresar las relaciones entre más de dos clases en la segunda. La tercera "posee la simetría y la potencia que viene de la simetría"*(Ibidem*, p. 30).

Para la simbolización de las proposiciones procede Venn como sigue: Parte del hecho bien conocido en Lógica de que "toda proposición universal puede ser puesta en forma negativa: "Todos los x son y" equivale a "Ningún x es no-y" (o, en forma hipotética, "Si éstos son x, entonces son y")". Nada se afirma sobre si existen, o no, x e y. De manera que, en las universales, lo que es afirmado es afirmado de manera hipotética, y lo que es negado es negado manera absoluta. Quedan simbolizadas las proposiciones universales por:

$x\bar{y} = 0$: "Todos los x son y"

$xy = 0$: "Ningún x es y"

Y puesto que las universales son negaciones de las particulares, y las primeras no afirman la existencia de x e y, cabe concluir que las particulares afirman la existencia de aquellas combinaciones que niegan las primeras. Por lo que se pueden representar:

$xy > 0$ "Algunos x son y"

$x\bar{y} > 0$ "Algunos x no son y"

"La expresión $xy > 0$ es simplemente la negación de $xy = 0$, y puede leerse: "x y es algo", *id est*, es no-nada; o más coloquialmente, "hay x y", o 'x e y se encuentran algunas veces juntas'" *(Ibidem*, p. 184-85).

Queda, en cualquier caso, patente el *carácter existencial* de las proposiciones particulares. Esto conlleva la no admisión de la conversión *per accidens* ni de la subalternación, lo que exige, a su vez, la reducción del

men 2 de sus *Vorlesungen*).

(3) La explicación existencial o compartimental, que corresponde al procedimiento booleano de considerar las cuatro combinaciones posibles de dos términos y de sus negaciones, y el número de modos silogísticos válidos (quedan eliminados todos los que de premisas universales sacan conclusión particular; por ejemplo, *Darapti*). Y esta perspectiva, adoptada también por Schoröder, será fundamental y característica de la Lógica formal moderna.

El no haber distinguido el diferente carácter existencial de las universales y las particulares fue lo que imposibilitó, según Couturat *(La logique de Leibniz*, p. XV), la tentativa leibniciana de axiomatizar la silogística.

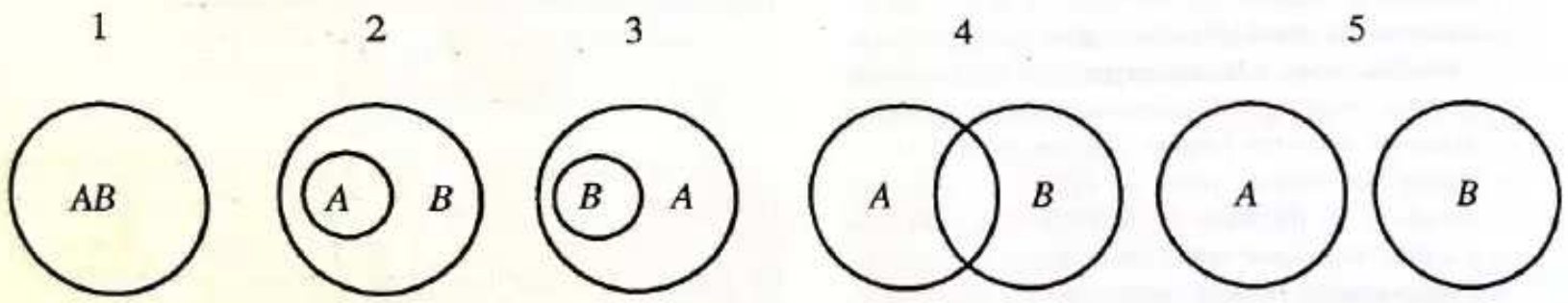
En la Lógica formal moderna tal diferenciación resulta fundamental en la construcción de los sistemas axiomáticos.

Algo similar ocurre con las proposiciones "hipotéticas" o "secundarias" (en terminología de Boole): Así como en las proposiciones "primarias" la universal afirmativa, "Todos los x son y", no comporta la afirmación de existencia, de modo análogo, cuando x e y representan proposiciones, la forma proposicional correspondiente será la condicional o hipotética: "Si x es verdadero, entonces y es verdadero", que también será simbolizada $x\bar{y} = 0$. Y tampoco esta forma proposicional comporta que los hechos expresados por x e y están conectados o que una proposición es formalmente inferible de otra. En consecuencia, según Venn *(Symbolic Logic*, p. 442), cuando los símbolos x, y, z... representan proposiciones, la ecuación $x\bar{y} = 0$ representa: "Si x es verdadera, entonces y es verdadera", esto es, "x implica y". Y "debemos admitir que la frase "x implica y" no implica que se conozca que los hechos considerados están conexos o que una proposición es inferida formalmente de otra". Esta interpretación que hace Venn de las proposiciones condicionales corresponde a la noción de "implicación material" precisada luego por Russell.

Aparte de esta aportación, Venn sigue en general a Boole en el desarrollo del cálculo de las proposiciones hipotéticas, si bien prescindiendo del matiz temporal que Boole había puesto en la definición de la verdad de las proposiciones. Venn abandona el uso de las nociones temporales e introduce variables y sus negaciones pra expresar la verdad y falsedad de las proposiciones. Y pasa también luego, al igual que Boole, a representar la verdad de x por $x = 1$ y la falsedad de x por $x = 0$, para desarrollar las deducciones lógica como resolución de ecuaciones. Las críticas hechas a este respecto a Boole son aplicables a Venn.

La contribución técnica más importante de Venn al desarrollo del Algebra de la Lógica es la representación diagramática, en forma precisa, de las relaciones entre clases o de las condiciones de verdad de las proposiciones.

El método diagramático de Venn supone una ampliación del procedimiento utilizado por Euler para la representación de relaciones de inclusión o exclusión entre clases. Los diagramas (círculos) de Euler adolecen de ambigüedades, dice Venn, que son subsanables. En efecto, en las cinco representaciones de Euler:



el número cinco es el único que no resulta ambiguo: a "Ningún A es B" corresponde solamente el número cinco. Pero a "Todo A es B" puede corresponder tanto el número *1* como el número 2. Y el número 4 puede describir "Algún A es B" o "Algún A no es B" o "Algún B no es A". A estas ambigüedades se añade lo inadecuado de tales círculos para representar relaciones simultáneas de tres o más clases, por lo que resultan inservibles para la representación de los modos silogísticos.

en modo alguno, derivado directamente de él. En efecto, Boole no hace uso de diagramas ni ofrece sugerencia alguna para su introducción" *(Symbolic Logic*, 114, nota). El método ideado por Venn consiste en representar mediante diagramas todas los poibles combinaciones de relaciones entre las clases consideradas.

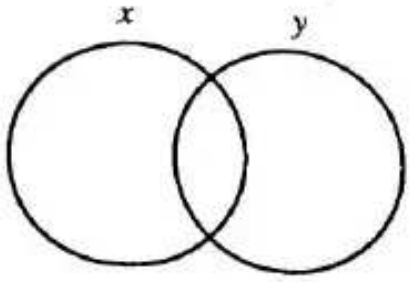
Cada combinación tiene asignada su área o compartimento. Y estos compartimentos, como sus correspondientes constituyentes de función expansionada, son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. No consiste sino en la generalización de un

tales defectos. Su método se base en la teoría de las funciones desarrolladas de Boole: "Aunque el método aquí descrito puede ser considerado como fundado en el sistema de Lógica de Boole, puedo señalar que no es,

proceso lógico usual: la dicotomía: con dos clases tenemos cuatro subdivisiones (constituyentes en las funciones; compartimentos en los diagramas). Y, en general, para n clases tendremos 2^n subdivisiones.

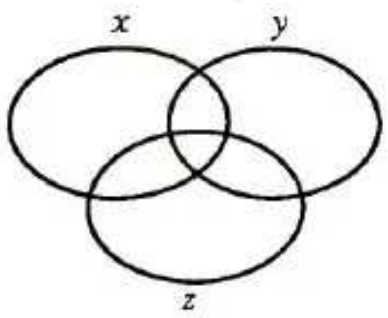
Según esto, el propósito de Venn es "formar un esquema de figuras geométricas que correpondan a la tabla de combinaciones x, y, z, etc. Todo lo necesario para este propósito es describir una serie de figuras cerradas, de cualquier género, tales que cada una, en sucesión, intersecte todos los campartimentos ya construidos y doblar, así, su número. Que esta sucesiva duplicación es, precisamente, lo que se hace con los símbolos de las letras salta a la vista. Así, con dos términos, x e y, tenemos cuatro combinaciones: xy, $x\,\overline{y}$, $\overline{x}\,y$, $\overline{x}\,\overline{y}$ " *(Ibidem*, p. 113-14).

El primer diagrama para dos términos, x e y, es trazado así:



Y este diagrama no representa una proposición, sino tan sólo el esquema dentro del cual pueden ser fijadas las proposiciones; esto es, indica sólo las cuatro combinaciones representadas por los componentes de letras xy, $x\,\overline{y}$, $\overline{x}\,y$, $\overline{x}\,\overline{y}$. Ambos esquemas, el de las letras y el de las áreas, concuerdan en sus elementos, que son mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos.

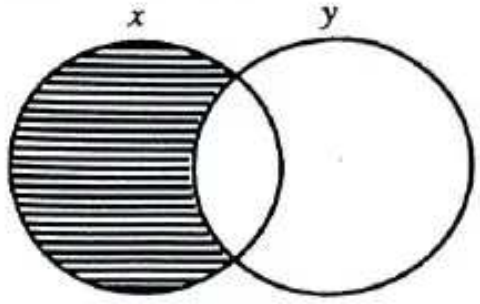
Este procedimiento es susceptible teóricamente de extensión a cualquier número de términos. El diagrama para tres términos x, y, z, es así:



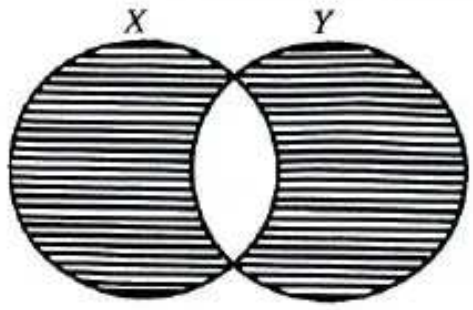
En los diagramas para más de tres términos hay que usar otras figuras que los círculos: elipses, por ejemplo. Así, para cuatro términos el diagrama propuesto es:

Hasta aquí, estos esquemas diagramáticos representan clases o términos. Para presentar proposiciones ha de procederse como sigue:

Examinemos qué combinaciones o compartimentos son negados por la proposición dada y póngase cualquier género de signo en tal compartimento del diagrama. A tal efecto el método más práctico es el de oscurecer el diagrama. Por ejemplo, la proposición "Todo x es y" se interpreta como significando que no existe una clase de casos tales que "x y no-y", o bien: $x\,\overline{y}$. Por lo tanto, se oscurece el compartimento $x\,\overline{y}$ en el diagrama de dos círculos. Así:

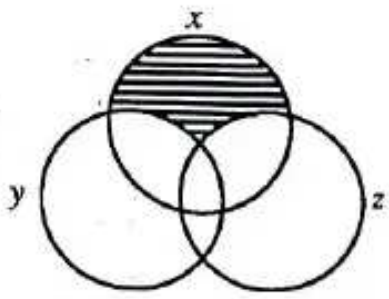


Para representar "Todo x es todo y", se añadirá a la negación anterior ésta otra: $\overline{x}\,y$. Tendremos por lo tanto:



Para ilustrar el contraste entre el método de Euler y el de Venn considérese el caso de la disyunción "Todo x es o y o z"

Se oscurecerá, primero, el compartimento de todo x que no sea ni y ni z: esto es $x\,\overline{y}\,\overline{z}$



y, luego, se añadirá la aserción de que "nada excepto los x son o y o z", esto es: $\overline{x}\,y$ y $\overline{x}\,z$

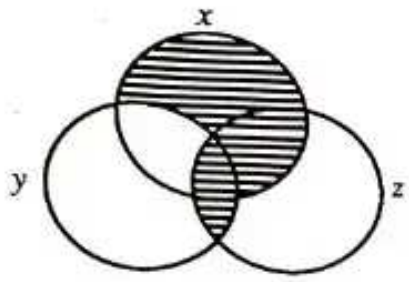
obtenemos, así, que los x, y sólo ellos, son solamente o y o z".

Pero si intentamos representar la anterior disyunción mediante los círculos de Euler nos resultaría imposible, porque las figuras eulerianas han de ser trazadas de modo que indiquen de una vez el resultado final del conocimiento obtenido. Los diagramas de Euler presentan dificultades en cuanto nos salimos de los casos simples, como los de los modos silogísticos, y nos las habemos con cuatro o cinco términos.

La representación diagramática de Venn de los silogismos resulta sencilla. Por ejemplo, la del modo *Celarent:*

Ningún Y es Z
Todo X es Y
$\therefore$ Ningún X es Z

es como sigue:



Y en el siguiente problema (*Symbolic Logic*, 129) aparece la capacidad del método de Venn para tratar cuatro términos.

Sean los enunciados siguientes:

(1) Cada y es o x y *no-z*, o z y *no-x*.

(2) Cada wy es o x y z a la vez, o ninguno de los dos.

(3) Todo xy es o w o z, y todo yz es o x o w.

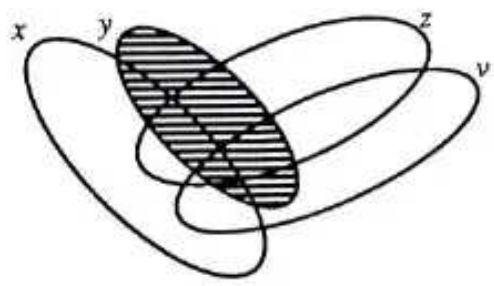
Del examen de los anteriores enunciados se desprende que quedan abolidas las siguientes clases:

(1) $x\,y\,z$ y $\bar{x}\,\bar{z}$.

(2) $w\,y\,x\,\bar{z}$ y $w\,y\,\bar{x}\,z$.

(3) $x\,y\,\bar{w}\,\bar{z}$ y $y\,z\,\bar{x}\,\bar{w}$.

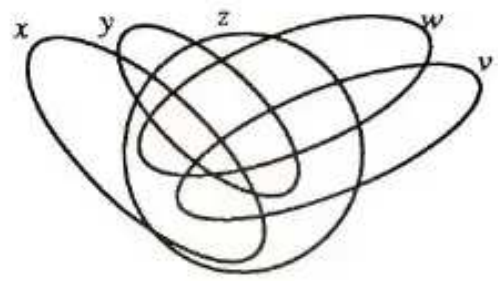
Sombreando en el diagrama los correspondientes compartimentos tenemos la siguiente representación:



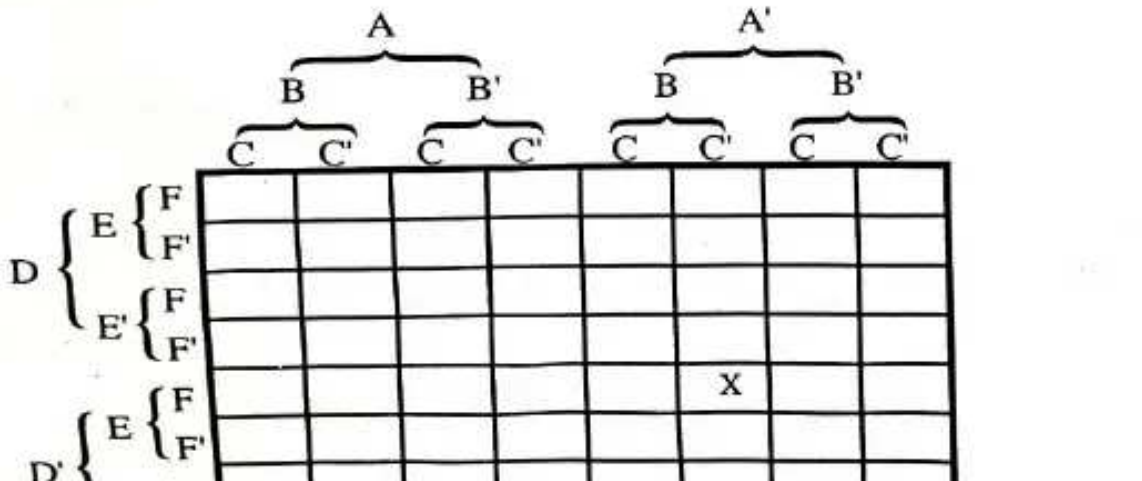
que arroja la siguiente conclusión:

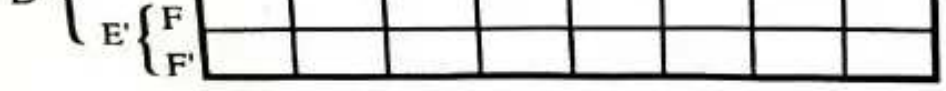
"No existe ningún y".

Los diagramas se hacen más complicados y menos intuitivos a medida que aumenta el número de términos. Para el caso en que se tengan cinco términos, Venn propuso el diagrama siguiente:



Y para más de cinco términos consideró que debían abandonarse las figuras curvas cerradas y utilizar un rectángulo dividido en el número deseado de compartimentos, representando cada uno de ellos una combinación diferente de términos. La sugerencia de emplear gráficos rectangulares se debió a Allen Marquand, de la Universidad de Johns Hopkins, quien propuso[38] la siguiente gráfica para seis términos:

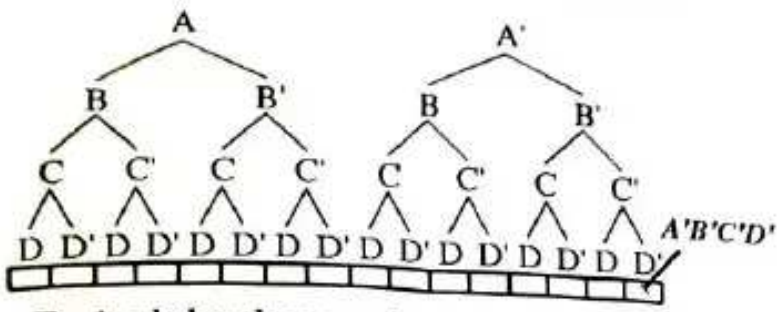




[38] "A logical diagram for n forms", en *Philosophical Magazine*, 12 (1881), p. 266.

El cuadro marcado con la *x* representa la combinación *A'BC'D'EF*. El sombreado de un cuadro indica que su combinación correspondiente no existe.

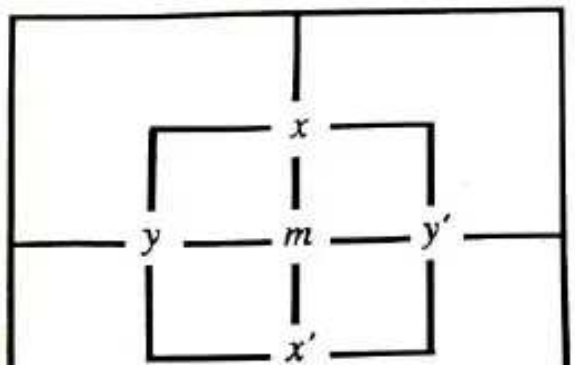
Otros tipos de gráficos suceptibles de ser utilizados para cualquier número de términos son: El "espectro lógico" de Macfarlane[39], que consiste en una banda subdividida en compartimentos, tal como se indica:



En donde las clases vacías son indicadas sombreando las casillas correspondientes; las indeterminadas, sombreando la mitad del compartimento; quedando, pues, en blanco las clases cuya existencia se afirma.

William J. Newlin ("A new logical diagram", en *Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, 3 (1906), p. 539) y William S. Hocking ("Two extension of the use of graphs in elementary logic", en *University of California Publications in Philosophy*, 2 (1909), p. 31) propusieron sendos métodos de representación diagramática similares al empleado por Marquand.

Y también S. G. Dodgson (Lewis Carroll) expuso en su librito *The Game of Logic*, Londres, 1886, un método de representación diagramática similar al de Marquand, pero utilizando fichas de colores (cuatro rojas y cinco grises) y un tablero. Las clases vacías son indicadas colocando en las casillas correspondientes fichas rojas. Para indicar que una de las casillas adyacentes tiene miembros, pero no se sabe cuál de las dos, se coloca la ficha roja en la línea que separa las dos casillas. El tablero que aquí propone Lewis es para el tratamiento silogístico, para jugar con tres términos: *x*, *y*, *m* y sus negaciones *x'*, *y'*, *m'*, siendo *m* el término medio.



La mitad superior del cuadro representa *x*, y la mitad inferior *x'*. La mitad izquierda del cuadro representa y, y la mitad derecha y'. El término medio *m* está representado por el cuadrado interior y *m'* está representado por el área comprendida entre el cuadrado interior y el cuadrado mayor.

Charles Sanders Peirce (1839-1914)

Charles Sanders Peirce, hijo de Benjamín Peirce; éste fue profesor de Matemáticas y de Astronomía en Harvard y el mayor matemático americano de su tiempo, interesado también por los tipos posibles de álgebras, que lo ponen en contacto con Hamilton, Boole, Sylvester y Cayley; influyó decisivamente en la educación y en la inclinación de su hijo hacia el Algebra y la Lógica, hasta el punto de que Charles Sanders decía de su padre: "El me ha educado, y si algo consigo será obra suya". *(Colleted Papers* IV, § 301, nota)[40], refiriéndose, precisamente, a sus estudios de lógica formal (su *Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an ampliation of the conceptions of Boole's calculus of logic* (1870) *C.P.*, III, 45 y ss.), fruto de la lectura de Boole y de De Morgan. Por aquel tiempo editó su padre *Linear associative algebra* (1870). Ambos, dice Charles *(ibidem)* "trabajamos, por tanto, contemporáneamente sobre cuestiones estrictamente conexas, discutiéndolas continuamente juntos; en consecuencia, resulta imposible distinguir precisamente lo que pertenece a cada uno de nosotros. Naturalmente, en matemáticas él fue mi maestro y muy superior a mí en genialidad; así que, en caso de duda, atribúyasele todo paso matemático".

Lógica de clases

Peirce se acerca, pues, al álgebra lógica booleana con un conocimiento matemático seguro; critica, empero, la excesiva matematización del sistema booleano. Ya en su primer trabajo sobre Lógica *(On a improvement in Boole's calculus of logic*, 1867, *C.P.*, III, 1-19) busca poner remedio a esa excesiva matematización de las operacioness del Algebra de la Lógica. Y, si bien acepta las cuatro operaciones booleanas (dos directas y dos inversas), establece la diferenciación de ellas con respecto a las operaciones aritméticas, introduciendo también (al igual que Jevons) el concepto de

suma no-exclusiva de términos: "$a + b$ denota todos los individuos contenidos bajo a y b juntos".

[39] A. Macfarlane, "The logical spectrum", en *Philosophical Magazine*, 19 (1885), p. 286.

[40] Las citas de las obras de Peirce se harán aquí, según costumbre, por medio de las siglas C. P. (Collected Papers) seguidas de dos números: el primero, romano, indica el volumen de los *Collected Papers;* el según arábigo, indica el párrafo del correspondiente volumen.

En un escrito posterior de ese mismo año *(Upon the logic of mathematics, C.P.* III, 20-44), así como también en *On the algebra of logic*, 1880, *C.P.* III, 154-251,Peirce prosigue la liberación del cálculo lógico de la dependencia de la Matemática en la que Boole lo había puesto. Se queda sólo con las operaciones "directas" (suma, en sentido no exclusivo, y producto), "puesto que las inversas no tienen ningún interés lógico peculiar". Además, el modo en que estas dos operaciones son definidas en el último de los trabajos citados supone una novedad de gran utilidad para el desarrollo de la lógica. Así:

«(1) SUMA:

Si a—<x y b—<x, entonces $a + b$—<x.

E inversamente:

Si $a + b$—<x, entonces a—<x y b—<x.

(2) PRODUCTO:

Si x—< a y x—<b, entonces x—<$a.b$.

E inversamente:

Si s—< $a.b$, entonces x—<a y z—<b».

(C. P. III, 119).

En estas definiciones hace Peirce uso de la relación de inclusión entre clases, que él simboliza por —<, y que había introducido en 1870 *(Descripition of a notation for the logic of relatives, resulting from an ampliation of the conception of Boole's cualculus of logic. C.P.* III, 45-148), definida así:

> *"inclusión en o ser tan pequeño como* es una relación transitiva. Vale la consecuencia de que si x—<y e y—<z, entonces x—<z". *(C.P.* III, 47).

Peirce se opone a la reducción, sobre el modelo matemático, de las proposiciones a ecuaciones, que impone a la cópula de las proposiciones una única interpretación: la relación de igualdad, haciendo, así, de ésta la relación fundamental de la Lógica. A su juicio esta tendencia a hinoptizarse con ecuaciones, como si la forma ideal de la proposición fuese la que establece la igualdad entre sujeto y predicado, es un error de ciertos lógicos, entre los que se encuentra Hamilton en su intento de extender la cuantificación del predicado "con una incompetencia extraordinaria" *(C.P.* III, 181).

La introducción de la relación de inclusión constituye un paso en el proceso de desmatematización (desaritmetización) del cálculo booleno: la fórmula booleana $x\ (1 - y) = 0$ puede muy bien ser sustituida por la peirceana x—<y para representar la proposición "todos los x son y". Pero la fórmula peirceana tiene ventajas sobre la booleana. Una noción es lógicamente más simple que otra cuando la comprende, sin que se dé la recíproca. Y toda igualdad es una inclusión, pero no a

Ciertamente, el concepto de inclusión no fue una novedad de Peirce. Había sido empleado en el ámbito de un tratamiento simbólico de la lógica por J. D. Gergonne (1771-1859) quien en su "Essai de dialectique rationnelle" *[Annales*, 7 (1816-17),pp. 189-228], partiendo de los círculos de Euler establece las posibles relaciones entre los términos (o círculos):

H : "externo a"
X : "intersectado con"
I : "idéntico a"
$\supset$: "contenido en", y
C : "contiene a".

Pero la contribución de Peirce consiste en el uso sistemático que hace de tal concepto en el desarrollo del cálculo, por cuanto que su uso permite una simplificación axiomática y el lazo de unión entre el cálculo de términos (o clases) y el de proposiciones. Este signo, —<, expresa la relación (de inclusión) entre sujeto y predicado en las proposiciones categóricas (cálculo de clases) y la relación (de consecuencia) entre antecedente y consecuente en las proposiciones hipotéticas, o entre premisas y conclusión en la inferencia (cálculo de proposiciones). De manera que el principio fundamental sobre el que reposa la legitimidad del silogismo no es, como habían tratado de establecer las algebristas ingleses, el principio de identidad, que opera en las ecuaciones y en la cuantificación del predicado, sino la ley de transitividad, que ejercita la relación de inclusión.

Lógica de proposiciones

Peirce presta mayor atención que Boole a lo que éste denominaba proposiciones "secundarias". Estas serán para Boole mera muestra de una posible interpretación de los símbolos electivos. Peirce en cambio, estudiará profundamente las proposiciones secundarias y sus relaciones, a fin de implantar un cálculo efectivo que devendrá el fundamento de la Lógica formal actual, Y, si bien es cierto que es a Frege, con su *Begriffsschrift*, en 1879, a quien corresponde la prioridad cronológica en el tratamiento sistemático del cálculo de proposiciones, también es cierto que, más o menos por aquellos años, aunque no de forma sistemática, sino más bien desperdigada en múltiples trabajos, Peirce llega a resultados muy similares a los de Frege.

Al abandono por parte de Peirce del cálculo booleano como base (o primero en la jerarquía de cálculos) de la Lógica y su sustitución en la función de fundamento de la Lógica por el cálculo proposicional, contribu-

la inversa. Por lo tanto, la inclusión es un concepto más amplio y, por lo tanto, más simple que la igualdad. La igualdad puede ser expresada mediante la inclusión: $x = y$ es, en realidad, la conjunción de dos inclusiones: $x—<y$ e $y—<x$. (*C.P.* III, 48).

yó, en gran medida, la sustitución de la relación fundamental (y única) en el álgebra booleana) de la igualdad por la relación más amplia de inclusión en el cálculo de clases, relación que guarda estrecha analogía con la implicación "material" y "formal" fundamentales para el cálculo de proposiciones. Ya en su trabajo *On the algebra of logic* (1880, cit.) Peirce afirma:

> "Las formas $A—<B$, o A implica B, y $(A—<B)$, o A no implica B, abarcan tanto las proposiciones hipotéticas como las categóricas. Así, decir que todos los hombres son mortales equivale a decir que si todo hombre posee una nota cualquiera, entonces un mortal posee esa nota. Decir "si A entonces B" equivale, obviamente, a decir que de A se sigue, lógica o extralógicamente, B. Pero, entonces, al identificar la relación expresada por la cópula con la de la ilación, identificamos la proposición con la inferencia y el término con la proposición. Esta identificación, sobre cuya base se sabe que todo lo que es verdadero del término, de la proposición o de la inferencia, resulta ser verdadero de los tres, es un mecanismo del razonamiento muy importante, que hemos obtenido comenzando con una consideración de la génesis de la lógica"... (y en nota: "como consecuencia de tal identificación, en $S—<P$ hablo de S indiferentemente como *sujeto*, *antecedente* o *premisa*, y de P como *predicado*, *consecuente* o *conclusión*" (*C.P.* III, 175).

En *On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation* (1885, *C.P.* III, 359-403) la implicación "material" constituye la noción fundamental para la construcción del cálculo de proposiciones. Ella es "el modo fundamental y primario de relación entre dos proposiciones" (*C.P.* III, 373); y viene definida así:

> "La peculiaridad de la proposición hipotética "si A es verdadero, entonces B es verdadero" es que puede ser falsificada por un solo estado de cosas, pero sólo de aquel en el que A es verdadero, mientras que B es falso. Estados de cosas en los que A es falso, así como aquellos en los que B es verdadero, no pueden falsificarla" (*C.P.* III, 374).

En este trabajo acomete Peirce la construcción del cálculo de proposiciones en forma axiomática, utilizando dos reglas de inferencia: *modus ponens* y principio de sustitución, y los cinco axiomas siguientes[41]:

(1) $p—<P$

(2) $\{p—<(q—<r)\}—<\{q—<(p—<r)\}$

(3) $(p—<q)—<\{(q—<r)—<(p—<r)\}$

(4) $(p—<falso)—<q$

(5) $\{(p—<q)—<p\}—<p$

Mayor atención a la construcción axiomática muestra Peirce en otro trabajo anterior ("A Boolian algebra with one constant", de hacia 1880, y publicado póstumamente por los editores de *Collected Papers*, precisión por Wittgenstein (*Tractatus*, 5 y 6), de que las proposiciones moleculares son funciones de verdad de las proposiciones atómicas. Peirce descubre, antes que Sheffer (en 1931), que todas las conectivas proposicionales pueden ser expresadas mediante la función que él llama *amphec* (de ἀμφηκής, de doble filo) y que actualmente se denomina *negación conjunta*: "ni...ni..." y se representa por ↓:

> "Dos proposiciones escritas en pareja son consideras como negativas entrambas. Así, AB significa que las proposiciones A y B son entrambas falsas; y AA significa que A es falsa. Podemos tener parejas de parejas de proposiciones, y ulteriores complicaciones. En tal caso usaremos comas, puntos y comas, dos puntos, puntos y paréntesis, como en la notación química, para separar parejas a su vez emparejadas... Para expresar la proposición "Si S, entonces P", encribiremos primero A para esta proposición. Pero la proposición es que un cierto estado de cosas concebible está ausente del universo de posibilidad. Por tanto, en vez de A escribiremos BB. Entonces B expresa la posibilidad de ser S verdadero y P falso. Puesto que SS niega S, se sigue que (SS, P) expresa B. Por tanto, escribiremos: $SS,P; SS,P$" (*C.P.* IV, 12-14).

Esto es, el funtor implicación que conforma la proposición condicional "Si S entonces P" puede ser definido en términos del funtor negación conjunta. En simbología actual:

$$S \rightarrow P \equiv (S \downarrow S \downarrow P) \downarrow (S \downarrow S \downarrow P)$$

Finalmente, otra aportación importante de Peirce al cálculo de proposiciones es la utilización del método de las matrices o tablas de verdad como procedimiento de decisión para el cálculo proposicional. En *The simplest mathematics* (escrito inédito de 1902, *C.P.* IV, 260-62) establece, sobre los principios del Algebra, el cálculo de los funtores monarios y binarios, y diseña un diagrama para las posibles combinaciones de valores de verdad para m variables. Así:

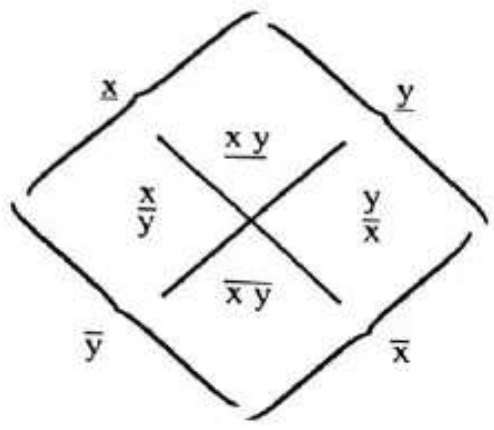
> "Si cada uno de los objetos m de un conjunto se une con cada uno de los objetos n de otro, las posibles maneras de conexión de los conjuntos será n^m... Ahora bien, una afirmación sobre el valor de una magnitud, o admite como posibles cada uno de los valores de v y f, o los excluye... Hay, por tanto, n^m ó 2^2 ó 4 afirmaciones posibles distintas sobre el valor de cualquier magnitud x...
> Consideremos, ahora, afirmaciones sobre valores de dos magnitudes, x e y. Aquí hay dos magnitudes,

IV, 12-20). En él adelanta la idea, luego formulada con

cada una de las cuales no tiene más que uno de los

[41] *Confert* George D. W. Berry, "Peirce's contribution to the logic of statements and quantifiers", en *Studies in the philosophy of Ch. S. P.*, edic. de Philip P. Wiener y Frederic H. Young. Cambridge (Mass.), 1952, pp. 153-65.

dos valores, hay por consiguiente 2^2 ó *4* posibilidades, como se ve en el diagrama:



... Ahora bien, en cada una de las aserciones posibles, se admitirá o se rechazará cada una de estas posibilidades, pero no ambas. Por lo tanto, *m* será 2^2, mientras que *n* será *2;* y habrá n^m ó 2^4 ó *16* aserciones posibles..." *(C.P.* IV, 262).

Pero ya en *On the algebra of logic*, de 1885, utilizó Peirce este método de las tablas de verdad como procedimiento de decisión para establecer mecánicamente si una proposición dada es, o no, un teorema del sistema proposicional. Para decidir sobre el valor de las fórmulas procede Peirce, por ejemplo, así:

"Una proposición de la forma $x—<y$ es verdadera si $x = f$ ó $y = v$. Una proposición escrita de la forma $\sim(x—<y)$ es verdadera si $x = v$ e $y = f$, y falsa si $x = f$ ó $y = v$. Por consiguiente, para hallar si una fórmula es necesariamente verdadera se sustituyen las letras por *f* y *v*, y se mira si puede ser supuesta falsa mediante alguna de tales asignaciones de valores. Tomemos, por ejemplo, la fórmula:

$$(x—<y)—<\{(y—<z)—<(x—<z)\}$$

Para hacerla falsa debemos tomar:

(1) $(x—<y) = v$

y

(2) $\{(y—<z)—<(x—<z)\} = f$

Sustituyendo estos valores en $(x—<y) = v$ y $(y—<z) = v$, tendremos $(v—<y) = v$ y $(y—<f) = v$, que no pueden ser satisfechas conjuntamente". *(C.P.* III, 387).

Lógica de predicados

Uno de los mayores reproches que Peirce dirige a

formular convenientemente la proposición particular. Para la caracterización de las proposiciones que luego se denominarán "analizadas" se basa Peirce en la unidad esencial que, según él, se da entre las proposiciones condicionales y las categóricas. En *The regenerated logic (C.P.* IV, 440) afirma que un "término o nombre de clase no es otra cosa que una proposición con sus índices o sujetos dejados vacíos o indefinidos", de modo que la proposición categórica "todo hombre es sabio" puede ser expresada, por ejemplo, así: "supongamos que m_i significa que el objeto individual *i* es un hombre, y que w_i significa que el objeto individual *i* es sabio. Entonces, lo que afirmamos es que "tomando un individuo *i*, no importa cuál del universo, o tal objeto *i* no es un hombre, o tal objeto *i* es sabio"; esto es, toda cosa que es un hombre es un sabio. Es decir, cualquier cosa *i* indica, o m_i no es verdadero o w_i es verdadero. Las proposiciones condicionales y categóricas son expresadas precisamente de la misma forma, y no existe, a mi juicio, ninguna diferencia entre ellas. La *forma* de la relación es idéntica" *(C.P.*, IV, 445).

Peirce está aquí determinando de forma precisa la noción de implicación "formal", noción que viene conjugada con las de cuantificación y función, pero en el sentido moderno, en el sentido también preciso, que Peirce supo atribuirles. Los cuantificadores modernos se distinguen esencialmente de los indicadores de cantidad de la lógica tradicional: éstos recaen sobre los conceptos (términos o clases) que funcionan como sujetos (o también como predicado, en los sostenedores de la cuantificación del predicado), esto es, los cuantificadores recaen sobre las funciones. Los cuantificadores modernos -como en el párrafo anterior apuntaba Peirce y como expresamente formula en el texto que sigue- recaen sobre uno o varios individuos indeterminados *x, y, z, ...* quedando patente la distinción entre cuantificador y fórmula cuantificada. Los cuantificadores recaen, no sobre las funciones, sino sobre los "argumentos" de las funciones.

Como símbolos de cuantificadores "algunos" y "todos" utiliza Peirce Σ y Π, respectivamente, debido a que se basa para su definición en la suma y producto lógicos. En *On the algebra of logic*, de 1885, cit.), retomando algunos puntos de los tratados por su discípulo O. H. Mitchell en *On a new algebra of logic*[42], define de manera precisa los cuantificadores en sentido moderno y su relación con la suma y el producto lógicos:

Boole es el de que no consigue expresar de forma satisfactoria con su método, incluso en la misma lógica de clases, la distinción entre *todos* y *algunos*, ni tampoco

"Vamos ahora a la distinción entre *algunos* y *todos*, distinción que va precisamente emparejada con la que

[42] Recogido en *Johns Hopkins Studies in Logic*. Boston, 1883.

hay entre verdad y falsedad. Todas las tentativas por introducir esta distinción en el álgebra booleana han supuesto más o menos un fracaso completo, hasta que el señor Mitchell ha mostrado cómo se establece. En realidad, su mérito consiste en considerar la expresión entera de la proposición como constando de dos partes: una, pura expresión booleana, que se refiere a un individuo; y otra parte cuantificante, que dice de qué individuo se trata. Así, si *k* significa "él es un rey" y *h*, "él es feliz", la fórmula booleana (~k + h) significa que el individuo del que se habla, o no es un rey o es feliz. Ahora, aplicando la cuantificación podemos escribir *Todo (~k + h)* para significar que esto es verdadero de todo individuo en el universo (limitado), o también *Algún (~k + h)* para significar que existe un individuo que o no es rey o es feliz. Así, *Algún (kh)* significará que algún rey es feliz, y *Todo (kh)* significa que todo individuo es un rey y feliz".

Y sustituyendo *Algún* y *Todo* por los símbolos lo más "icónicos" posible, sigue diciendo:

"$\sum_i x_i$ significa que x es verdadero de alguno de los individuos denotados por i, o sea: $\sum_i x_i = x_i + x_j + x_k +$ *etc*. Del mismo modo $\prod_i x_i = x_i x_j x_k$, *etc*... Nótese que $\prod_i x_i$ y $\sum_i x_i$ son sólo similares a una suma y a un producto; no son rigurosamente de la misma naturaleza, porque los individuos del universo pueden ser innumerables" (*C.P.* III, 393).

Según este análisis (y también en *The logic of relatives*,1897, *C.P.* III, 501) toda fórmula podrá ser dividida en dos partes distintas, la expresión booleana y el cuantificador o los cuantificadores, que van a la cabecera de la fórmula, y bien distinguidos de ella, lo cual permite claridad de escritura y comodidad de cálculo. Pero su perspicacia alcanza también a percartarse, y señalarlo, de que la cuantificación permite tratar problemas no expresables sobre la base de las operaciones de la suma y el producto lógicos, elaborando, si no como Frege, una axiomática para el cálculo cuantificacional, sí, al menos, leyes y métodos del mismo. Y si bien Frege se le había anticipado seis años, el mérito de Peirce no decae al considerar que, independientemente y habiendo partido del álgebra booleana, supo trascender los límites de ésta, eleborando la teoría de la cuantificación como irreductible a ella.

Lógica de relaciones

Peirce contribuye decisivamente al desarrollo del cálculo de relativos, que sobrepasa, y supone una ampliación de, el cálculo booleano. En *Description of a*

indagar si ella no es susceptible de ser ampliada a todo el dominio de la Lógica formal. La respuesta afirmativa que ofrece Peirce en el trabajo se plasma en la "extensión del uso de los viejos símbolos a nuevos argumentos, bajo la guía de ciertas analogías, que, una vez formuladas, constituyen nuevas y más amplias definiciones de tales símbolos" (*C.P.* III, 46).

Las analogías a las que Peirce hace referencia consisten en introducir para los términos que expresan una relación las operaciones lógicas usadas para los términos absolutos, y estableciendo respecto de éstos las propiedades comunes y las diversas. Y, así, si *w* significa "mujer" y *s*, "sirviente", las operaciones o relaciones lógicas entre estos términos no quedan reducidas sólo a:

- el producto lógico: *sw*: "sirvienta mujer"
- la suma lógica: *s + w*: "sirvienta o mujer (o ambas cosas)"
- la inclusión entre clases: *s*—<*w*: "la clase de las sirvientas está incluida en la clase de las mujeres"

Sino que también se dan operaciones, ya señaladas por De Morgan, tales como:

- "sirvienta de una mujer"
- "sirvienta de cada mujer"
- "sirvienta de nadie excepto de una mujer".

Peirce representa "sirvienta de una mujer" por *s,w*. Esta operación posee las siguientes propiedades:

- es asociativa: *s, (l, w) = (s, l), w*:
  "sirvienta de un amante-de-una-mujer" es "sirvienta-de-un-amante de una mujer"
- es distributiva: *s, (m + w) = s, m + s, w*:
  "sirvienta de un hombre o una mujer" es "sirvienta de un hombre o sirvienta de una mujer"
- no es conmutativa: *s, l ≠ l, s*:
  "sirvienta de un amante" no es "amante de una sirvienta".

Para representar "sirvienta de cada mujer" Peirce utiliza s^w. Y para "sirvienta de nadie excepto de mujeres", s_w. Y si se representan los elementos de la clase *w* por W_1, W_2, W_3,... y la clase de todos los *W* por $W_1 + W_2 + W_3 +$..., tenemos, entonces, que: si $w > 0$, entonces $w = W_1 + W_2 + W_3 +$...: "El término *w*

plicación de, el cálculo booleano. En *Description of a notation for the logic of relatives*... 1870 (cit) parte de la simbología de De Morgan para los relativos, pero pronto observa que tal sistema deja aún bastante que desear. Y como, por otra parte, el álgebra lógica de Boole, dentro de sus límites -la lógica de los términos absolutos-, posee una singular belleza, se hace preciso

denota W_1 o W_2 o W_3 o..., esto es, w denota un elemento inespecificado de la clase de los W. De manera que "la sirvienta de *una* (alguna, cualquier) mujer es, entonces, s,w:

$$s,w = s,(W_1 + W_2 + W_3 + \ldots) = s,W_1 + s,W_2 + s,W_3 + \ldots$$

bras mismas las que sirven de esquemas" *(C.P.*, IV, 233). En definitiva: el razonamiento formal es de tipo matemático. De ahí el uso que Peirce hace de la distinción escolástica entre *lógica utens* y *lógica docens:* la Lógica formal en acto es la Matemática misma que "efectúa sus razonamientos mediante una lógica *utens* que desarrolla de por sí" *(C.P.*, I, 417), mientras que la lógica *docens* es una teoría concerniente a estos razonamientos, es la crítica (ver luego) que hace la "clasificación" de los argumentos. La crítica, en cuanto filosofía, trata con el material que le proporciona la lógica *utens*, que no es sino aquella "matemática que pone la base sobre la que se construye la lógica" *(C.P.*, II, 197). De manera que hay concexión, pero no identidad, entre Lógica formal (o Matemática) y crítica; conexión que ilustra Peirce con las posiciones de él y de su padre respecto de los mismos temas: "él como matemático y yo como lógico sosteníamos discusiones cotidianas sobre un vasto argumento que nos interesaba a entrambos... El lógico no se preocupa, de manera particular, de esta o aquella hipótesis o de sus consecuencias, sino de que tales cosas puedan arrojar luz sobre la naturaleza del razonamiento, con vistas a su posible extensión a nuevos problemas; pero no se preocupa, en cuanto matemático, de seccionar minuciosamente las partes de este método cuya corrección le resulta obvia. Los diferentes aspectos que el álgebra de la lógica asume para los dos hombres son instructivos al respecto. El matemático se pregunta qué valor posee este álgebra como cálculo: si puede ser usada para resolver una cuestión complicada, si obtiene de golpe una consecuencia remota. El lógico no desea que el álgebra posea tal carácter. ...él busca que el álgebra analice un razonamiento en sus pasos más elementales. Así, lo que en un álgebra lógica es un mérito para uno de estos investigadores constituye un demérito a los ojos del otro. El uno investiga la ciencia de obtener conclusiones; el otro, la ciencia que obtiene conclusiones necesarias". (C.P. IV, 239).

Con lo anterior concuerda la afirmación de Peirce de que "la Matemática es puramente hipotética: no produce otra cosa que proposiciones condicionales. La Lógica, por el contrario, es categórica en sus aserciones". Y esto, a su vez, no contradice su afirmación de que "la Lógica se contenta casi por completo, como la Matemática, con considerar lo que entra en situación hipotética"(C.P. II, 65). Porque la referencia de "lógica" en la última afirmación es la ciencia de la primera afirmación "lógica" tiene como referente la "crítica".

Estas diferentes acepciones del término "lógica" cobran pleno sentido en su filosofía de la Lógica. Filosofía que comienza a configurarse por reacción al psicologismo heredado por los lógicos ingleses de Hamilton y ejercido por los alemanes Sigwart y Schröder. Frente al psicologismo, Peirce se alinea con Bolzano, insistiendo en la objetividad de la Lógica, concerniente a "la verdad en sí" y a "las proposiciones en sí", por lo que llega a afirmar que "toda la investigación lógica se refiere a la verdad", y "la idea misma de verdad consiste en que ella es totalmente independiente de aquello que tú o yo podamos pensar que sea. Por tanto, cómo pensemos resulta del todo irrelevante para la investigación lógica". *(C.P.*, II, 55).

Para la determinación de la Lógica considérese la argumentación en sentido estricto: lo que garantiza la corrección de las operaciones realizadas en un razonamiento o en un cálculo -sea éste hecho por un hombre o por una "máquina analítica", como la de Babbage- es la relación entre el resultado elaborado y los datos ofrecidos sobre la base de su respectiva verdad o falsedad. Y lo esencial, dice Peirce, *(C.P.*, II, 59), es la "elaboración de una frase escrita que exprese una conclusión cuando tal hombre-máquina haya sido alimentado con una aserción escrita, cual es la premisa". De manera que vuelve a resaltarse aquí el carácter *simbólico* de la Lógica: ésta no se las ha con procesos de pensamiento, sino con signos e iconos. Y esta conexión de la Lógica con el simbolismo nada tiene que ver con la doctrina que exige reducir la Lógica al lenguaje (ordinario), sino con la tesis, ya apuntada, de que "la urdimbre y la trama de todo pensamiento y de toda investigación son los símbolos, y la vida del pensamiento y de la ciencia es la vida inherenta a los símbolos". *(C.P.*, II, 220). De aquí avanza Peirce hacia la caracterización de la Lógica, en sentido lato, como "ciencia de las leyes necesarias del pensamiento, o, mejor aún (puesto que el pensamiento siempre tiene lugar por medio de signos), la Lógica es semiótica general, que trata, no sólo de la verdad, sino también de las condiciones generales de los signos en cuanto signos" *(C.P.*, I, 445). La Lógica es, en sentido lato, "gramática especulativa" al modo de Duns Escoto (posteriormente averiguado perteneciente a Tomás de Erkfurt) o "semiótica", en cuanto "ciencia de las leyes generales necesarias de los signos y, especialmente, de

construcción de los sistemas formales deductivos: y en cuanto tal idéntica a la Matemática; en tanto que en la

los símbolos[43].

Pero con la anterior caracterización de la Lógica

[43] Sobre la distinción que Peirce hace entre "signo", "símbolo" e "icono" *confert* D. Greenlee, *Peirce's concept of sign*. Mouton, La Haya, 1973.

por su esencial simbolismo no se ha conseguido aún una determinación unívoca de la misma. Porque, siempre sobre la base del simbolismo, además de la "gramática especulativa", habla Peirce, como ya antes hemos visto, de la lógica como "crítica" y también como "retórica especulativa". Teniendo presente que, como antes se ha indicado, la Lógica en sentido estricto es denominada "crítica" (o también "lógica crítica", "lógica obsintente", "lógica en sentido propio", de la que es parte la "lógica formal"), se puede, pues, decir que la "lógica", en su conjunto, tiene tres ramas: "1. Gramática especulativa o teoría general sobre la naturaleza y significado de los signos, sean iconos, indicios o símbolos; 2. Crítica, que clasifica argumentos y determina la validez y grado de fuerza de cada especie; 3. Metódica, que estudia los métodos que se sigue en la investigación, exposición y aplicación de la verdad. Cada división depende de aquella que le precede". (*C.P.*, I. 191).

La Lógica en sentido lato abarca estas tres ramas; en todas ellas ha trabajado Peirce, apuntando sutiles y fértiles sugerencias; pero, en sintido estricto, la Lógica es "crítica" con sus dos momentos: *lógica utens* y *lógica docens* (lógica como doctrina en la argumentación formal -momento en el que la lógica matemática; y lógica como reflexión filosófica -momento en el que la lógica es reflexión sobre los procesos de argumentación).

El primer momento, la Lógica formal, no agota, pues, toda la Lógica. Prueba de ello es que no todos los argumentos son "deductivos" o "explicativos" -en los que la conclusión se sigue necesariamente de las premisas- propios de la Lógica formal y de la Matemática; hay también argumentaciones amplificativas de las premisas, en las que la conclusión no mantiene ese carácter de necesidad. En la *crítica* entran también las cuestiones de la inducción, de la probabilidad y de la abducción: Todo aquello con lo que tiene que vérselas la "lógica de la investigación" o la "metodología científica". Peirce ni siquiera permite la bipartición de los razonamientos en deductivos e inductivos, sino que los reparte en tres clases: *deducción, inducción* y *abducción* (*C.P.* II, 623), y los caracteriza sobre el modelo de un silogismo de la primera figura, tomado como forma elemental y típica de deducción. Un silogismo, como el que sigue, razona a partir de una *regla* (premisa mayor) y de la subsunción de un *caso* (premisa menor) para obtener (conclusión) el *resultado* de esa regla en este caso.

Así:

	Regla:	Todas las alubias de este saco son blancas
	Caso:	Estas alubias están sacadas de este saco
∴	Resultado:	Estas alubias son blancas

En la *inducción*, se llega a la regla partiendo de un caso y de un resultado:

	Caso:	Estas alubias están sacadas de este saco
	Resultado:	Estas alubias son blancas
∴	Regla:	Todas las alubias de este saco son blancas

Finalmente, en la *abducción*, a la que Peirce llama también *hipótesis*, se llega a un caso partiendo de la regla y de un resultado:

	Regla:	Todas las alubias de este saco son blancas
	Resultado:	Estas alubias son blancas
∴	Caso:	Estas alubias están sacadas de este saco

Y en *C.P.* IV, 171, pone en correspondencia estos tres tipos de razonamiento con las modalidades: la deducción prueba que algo *debe* ser; la inducción muestra que algo *es* efectivamente; y la abducción sugiere que algo *podría* ser. La inducción y la abducción muestran ese aspecto extensivo y generalizador que no posee la deducción. Pero las tres son objeto de la Lógica.

La Lógica queda configurada, así, sobre la base del simbolismo en tres áreas: Gramática Especulativa o Semiótica, Crítica y Metódica, dentro de las cuales se distinguen dos niveles principalmente: formal o matemático y reflexivo o filosófico. Pero en sus últimos escritos Peirce sitúa a la Lógica, sin prescindir de todas estas determinaciones, en una dimensión "pragmaticista", ligando la Lógica con la Etica y la Estética y aplicándole el calificativo de "normativa", al modo de Schleirmacher. Entre los presupuestos de la Lógica coloca Peirce la ciencia de los fines (la Etica) y la de los ideales (la Estética), convencido de la progresiva realización entre los hombres del ideal de la racionalidad, que, garantizado por el devenir, es el mismo desarrollo de las "formas platónicas".

BIBLIOGRAFIA

W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambrige, 1889.

Francesco Barone, *Logica formale e logica trascendentale. II. L'Algebra della Logica*, Torino, 1965.

E. T. Bell, *The development of mathematics*, 2ª edic. New York-London, 1945.

Robert Harley, "George Boole F. R. S", en *The British quarterly review*, vol. 44 (1866), pp. 141-181.

Philip E. B. Jourdain, "The development of theories of mathematical logic and the principles of mathematics", en *The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, Vol 41 (1910), pp. 324-352; vol 43 (1912), pp. 219-314; vol. 44 (1913), pp. 113-128.

William Kneale, "Boole and the Revival of Logic", en *Mind*, vol. 57 (1948), pp. 149-175.

Clarence Irving Lewis, *A survey of symbolic logic*, Berkeley, 1918.

C. I. Lewis-C. N. Langford, *Symbolic logic*, New Yor-London, 1932.

Louis Liard, *Les logiciens anglais contemporains*, París, 1878.

Massimo Mugnai, *La logica da Leibniz a Frege*, Loescher, Torino, 1982.

Ernst Nagel, "Impossible numbers: a chapter in the history of modern logic", en *Studies in the history of ideas*, New York, vol. 3 (1935), pp. 427-74.

Arthur Norman Prior, "Categoricals and Hypotheticals in George Boole and his Successors", en *Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, Sydney, vol. 27 (1949), pp. 171-196.

Louis Robert, *Les théories logiques de Condillac*, París, 1869.

Giovanni Vailati, "La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. Peano", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 7 (1899), pp. 86-102.

John Venn, *Symbolic Logic*, Londres, 1881.

Evert William Beth, "Hundred years of symbolic logic", en *Dialéctica*, vol. 1 (1947), pp. 311-46.

•"The origin and growth of symbolic logic", en *Synthese*, vol. 6 (1947/48), pp. 268-74.

The mathematical anlysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, 1847. Trad. cast. E. Requena, *El análisis matemático de la lógica*. Cátedra. Madrid 1979. Por donde citamos.

"The caluculus of logic", en *The Cambridge and Dublin Mahtematical Journal*, 3 (1848), p. 183-98.

The claims of science, especially as founded in its relations to human nature. Londres, 1851.

An investigation of the laws o thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. Walton and Maberley, Londres, 1854. Reimpr. en Dover Publications, Nueva Yord, 1951. Por donde citamos.

"On a general method in the theory of probabilities", en *The London, Edinburgh, an Dublin philosophical magazine and journal of science*. Ser. 4, vol. 8 (1854), pp. 431-444.

"On the application of the theory of probabilities to the question of the combination of testimonies or judgements", en *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 21 (1857). Part. 4, pp. 597-653.

"A treatise of differential equations. Cambridge-Londres 1859 (2ª ed. 1865).

Calculus of finite differences. Londres, 1860.

"On the theory of probabilities", en *Proceedings of the Royal Society of London*, 12, (1862), pp. 179-184.

Studies in logic an probability. Edic. de R. Rhees. Watts & Co., Londres, 1952.

Sobre Boole

Everet Boole, M., "The home-side of a scientific mind", en *University Magazine*, 1 (1878), pp. 105-114, 173-183; 327-336; 456-460.

Hailperin, Theodore, *Boole's logic and probability*. North-Holland. Amsterdam, 1976.

Harley, R., "George Boole F. R. S.", en *The British quartely review*, 44 (1866), pp. 141-81.

Kneale, W., "Boole and the revival of logic", en *Mind*, 57 (1948), pp. 149-75.

Liard, Louis, "La logique algébrique de Boole", en *Revue de Philosophie de la France et de*

Obras de Boole

"Researches on the theory of analytical transformations", en *Cambridge Mathematical Journal*, 1840.

"A general method in analysis", en *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1844.

l'Etranger, 4 (1877), pp. 285-317.

Otero, Mario H., "Boole y la renovación de la Lógica", en *Cuadernos Uruguayos de Filosofía* 2, (1963), pp. 94-114.

Venn, John, "Boole's logical system", en *Mind*, 1 (1876), pp. 479-491.

Young, G. P., Remarks on Professor Boole's Mathematical theory of the laws of thougth", en *The Canadian Journal of science, literature an history*, X (1865), pp. 161-182.

Continuadores de Boole

William Stanley Jevons (1835-1882)

Pure logic, or the logic of Quality apart from Quantity. Londres, 1864.

The Substitution of Similars, the True Principle of Reasoning, derived from a Modification of Aristotle's Dictum, Londres, 1869.

Elementary Lessons in Logic: deductive and inductive. Londres, 1870.

"On the mechanical performance of logical inference", en *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 160 (1870), pp. 497-518.

"On a general system of numerically definite reasoning", en *Memoirs of the literary and philosophical Society of Manchester*, 4 (1871), pp. 330-352.

The Principles of Science, a Treatise on Logic and scientific Method, 2 vols. Londres, 1874.

"On the inverse, or inductive logical problem", en *Memoirs of the literary and philos. Soc. of Manchester*, 5 (1876), pp. 119-130.

Logic, Londres, 1876.

Studies in deductive Logic, Londres, 1880.

Sobre Jevons

G. B. Halsted, "Professor Jevons'Criticism of Boole's Logical System", en *Mind*, 3 (1878), pp. 134-137.

A. Levi, "La Lógica della scienza secondo W. St. Jevons", en *Cuadernos de Filosofía*, (Buenos Aires), 1908.

L. Liard, "Un nouveau système de logique formelle. M. Stanley Jevons", en *Revue de Philosophie de la France et de l'Etranger*, París, 3 (1877), pp. 277-293.

D. Mays-D.P. Henry, "Logical Machines. New Light on W. Stanley Jevons", en *The Manchester Guardian*, 1951, nº 32677.

"Jevons and Logic", en *Mind*, 62 (1953), pp. 484-505.

G. C. Robertson, "William Stanley Jevons's Logical System", en *Mind*, 1 (1876), pp. 206-222.

John Venn (1834-1923)

Edinburgh and Dublin philos. magazine an journal of Science, 10 (1880), pp. 1-18.

"On the forms of logical propositions", en *Mind*, 5 (1880), pp. 336-49.

"On the vairous notations adopted for expressing the common propositions of logic", en *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 4 (1880-83), pp. 36-47.

"On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions", *Ibidem*, pp. 47-59.

Symbolic Logic, Londres-Cambridge, 1881.

The Principles of empirical or inductive logic, Londres, 1889.

Sobre Venn

T. V. Charpentier, "la logique du hasard d'après M. John Venn", en *Revue de Philosophie de la France et de l'Etranger*, 6 (1878), pp. 23-38; 146-163.

Hugh McColl (1837-1909)

"On the Growth and use of a Symbolic Language", en *Memoirs of the Manchester Liter. and Philos. Soc.*, 7 (1882), pp. 225-248.

"The calculus of equivalent statements", 7 artículos, en *Proceedings of the London Mathematical Society*, I, 9 (1877-78), pp. 9-20; II, *Ibidem*, pp. 177-86; III, 10 (1878-79), pp. 16-28; IV, 11 (1879-80), pp. 113-21; V, 28 (1896-97), pp. 156-83; VI, *Ibidem*, pp. 555-79; VIII, 29 (1897-98), pp. 98-109.

"Symbolic reasoning", 8 artic., en *Mind*, I, 5 (1880), pp. 45-60; II, (1897), pp. 493-510; III, 9 (1900), pp. 75-84; IV, 11 (1902), pp. 352-68; V, 12 (1903), pp. 355-64; VI, 14 (1905), pp. 74-81; VII, *Ibidem*, pp. 390-97; VIII, 15 (1906), pp. 504-18.

"Symbolic logic (A reply)" en *Mind.*, 16, (1907), pp. 470-73.

"Linguistic misunderstandings", *Ibidem*, 19 (1910), pp. 186-99; 337-55. "The existential import of propositions", *Ibidem*, 14 (1905), pp. 578-580. "If and Imply", *Ibidem*, 17 (1908), pp. 151-152; 453-455.

Symbolic logic and its applications, Londres, 1906.

Charles Sanders Peirce (1839-1914)

Sus obras están recogidas en:

Collected Papers of Charles Sanders Peirce, vols. I-VI, edic. de C. Harthorne y P. Weiss, Harvard Univ.

The Logic of Chace, Londres-Cambridge, 1866.

"Consistency and real inference", en *Mind*, 1(1876), pp. 43-52.

"On the diagrammatic and mechanical representations of propositions and reasoning", en *The London*, Press, Cambridge (Mass.), 1931-35; vols. VII y VIII, edic. de Arthur W. Burks, Harvard Univ. Press, 1958.

Los escritos de Peirce, sin sistematizar, sobre Lógica aparecen en los vols. II, III y IV.

Sobre Peirce

George D. W. Berry, "Peirce's contribution to the logic of statements and quantifiers", en *Studies in the philosophy of Ch. S. P.*, edic. de Philip P. Wiener and Frederic H. Young, Cambridge(Mass.), 1952, pp. 153-65.

Justus Buchler, "Peirce's theory of Logic", en *The Journal of Philosophy*, 36 (1939), pp. 197-215.

Arthur W. Burks, "Peirce's Conception of logic as a normative science", en *The Philosophical Rewiev*, Nueva York, 52 (1943), pp. 187-193.

Chung-Ying Cheng, "Peirce's probablilistic theory of inductive validity:, en *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 2 (1966), pp. 86-112.

John Dewey, "Peirce's theory of linguistics signs, thought, and meaning", en *The Journal of Philosophy*, 43 (1946), pp. 85-95.

T. A. Goudge, *The thought of C. S. Peirce*, Toronto, 1950.

D. Greenlee, *Peirce's concept of sign*, Mouton, La Haya, 1973.

Arthur Norman Prior, "Peirce's Axioms for propositional calculus", en *The Journal of Symbolic Logic*, 23 (1958), pp. 135-136.

Ventura Reyes y Prosper, "Charles Santiago Peirce y Oscar Howard Mitchell", en *Progreso Matemático*, 2, (1892), pp. 170-173.

Francis C. Russell, "Hints for the elucidation of Mr. Peirce's logical work", en *The Monist*, 18 (1908), pp. 406-415.

M. Thompson, "The logical parodoxes and Peirce's semiotic", en *The Journal of Philosophy*, 46 (1949), pp. 513-36.

Pierre Thibaud, *La lógica de Charles Sanders Peirce*. Trad. J. M. Gambra. Paraninfo, Madrid, 1982.

Ernst Schröder (1841-1902)

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, vol. I: *Die sieben algebraischen Operationen*. Leipzig, 1873.

Vorlesungen über die Algebra der Logik, I, Leipzig, 1880, II/1, *Ibidem*, 1891; III, *Ibidem*, 1895, II/2, edic. de Eugen Müller, *Ibidem*, 1905.

Über die formalen Elemente der absoluten Algebra, Stuttgar, 1874.

Der Operationskreis des Logikkalkulus, Leipzig, 1877.

"Note über den Operationskreis des Logikkalkulus", en *Mathematische Annalen*, 46 (1895), pp. 144-158.

Sobre Schröder

G. Behrens, *Die Prizipien der mathematischen Logik bei Schröder, Russell und König*. Amburgo, 1918.

Alonzo Church, "Schröder's anticipation of the simple theory of types", en *The Journal of Unified Science*, 9 (1939), pp. 149-152.

Ramón Crespo Pereira, "Sobre el álgebra de la lógica de Schröder", en *Revista matemática hipanoamericana*, 11 (1951), pp. 222-239.

Stefano Fenyö, "Alle origine dell'estensionalismo contemporaneo: la logica delle classi di Schröder", en *Rivista di Filosofia*, (Milán), 64 (1973), pp. 123-173.

Gonttlob Frege, "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder Vorlesungen über die Algebra der Logik", en *Archiv für systematische Philosophie*, 1 (1895), pp. 433-56.

E. G. Husserl, Recensión al vol. I de las *Vorlesungen*, en *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1891, pp. 243-78.

L. Lowenheim, "Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativ-kalkulus", en *Journal of Symbolic Logic*, 5 (1940), pp. 1-15.

J. Lüroth, "Ernst Schröder", al comienzo del vol. II/2 de las *Vorlesungen*.

Vicente Muñoz Delgado, "La obra lógica de Ernesto Schröder", en *Estudios* (Madrid), 13 (1957), pp. 377-389.

Giuseppe Peano, Recension al vol. I y II/1 de las *Vorlesungen*, en *Rivista di Matematica*, 1 (1891), pp. 164-70.

Charles Sanders Peirce, "The logic of relatives", en *Collected Papers*, vol. III, pp. 456 y ss.

Ventura Reyes y Prosper, "Ernesto Schröder. Sus merecimientos ante la lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras", en *El progreso matemático*, 2 (1892), pp. 33-36.

Otros cultivadores del álgebra de la lógica

Sophie Bryant, "The relation of mathematic to general formal logic", en *Proceedings of the Aristotelian Society*, 2 (1902), pp. 105-33; 141-43.

Louis Couturat, *L'algèbre de la logique*, París, 1905.

J. R. L. Delboeuf, *Logique algorithmique*, Bruselas, 1877.

"On pasigraphy, its present state and the pasigraphic movement in Italy", en *The Monist*, 9 (1898-99), pp. 44-62.

Abriss der Algebra der Logik. edic. de E. Müller. I: *Elementarlehre*. Leipzig-Berlín, 1909; II: *Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen*, Leipzig-Berlím, 1910.

Charles Lutwdge Dogson, (1832-1898), conocido con el pseudónimo de Lewis Carroll como autor de *Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas*, enseñó matemáticas en Oxford y se interesó por la Lógica, publicando *Games of Logic*, Londres 1886, y *Symbolic Logic*, Macmillan, Londres, 1896.

R. L. Ellis, *The mathematical and other writings of Robert Leslie Ellis*. Cambridge, 1863.

Ch. L. Franklin-O. H. Mitchell-Ch. S. Peirce, *Studies in logic by members of the John Hopkins University*. Boston 1883.

Robert Grassmann, *Die Begriffslehre oder Logik*, Stettin, 1872; *Logik und Formenlehre*, Stettin, 1890; *Die Logik*, Stettin, 1896.

Charles Graves, "Mathematical expresions for hypothetical and disjunctive propositions", en *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 4 (1850), pp. 147-49.

William Ernest Johnson, "The logical calculus", en *Mind*, 1 nueva serie (1892), pp. 2-30; 235-250; 340-347.

Alexander Macfarlane, *Principles of the algebra der logic*, Edimburgo, 1879; "On a calculus of relationship", en *Proceedings of the Royaal Society of Edinburgh*, 10 (1878/80), pp. 224-232; "Algebra of relationship", *Ibidem*, 11 (1880/82), pp. 5-13; 162-163; "Problem in relationship", *Ibidem*, 15 (1887/88), pp. 116-17.

Josep John Murphy, "Relation of logic to language", en *Belfast natural history and philosophical Society*, 1875; "Fundamental logic", en *Mind*, 2 (1877), pp. 47-55; "A new system of logical notation", en *Memoires and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society of Machester*, 7 (1882), pp. 90-101; "A new symbolic treatment of the old logic", en *Memoirs and Proc...*, 4 (1891), pp. 201-15.

Platon Poretsky, *Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques*. Kazán, 1899.

•*Quelques lois ultérieures de la théorie del égalités logiques*. Kazán, 1902.

•*Théorie del non- égalités logiques*. Kazán, 1904.

A. N. Whitehead, *A treatise of universal algebra with applications*, Cambridge, 1898.

XIII. La logística hasta Russell

El *Algebra de la Lógica* desarrollada por Boole y sus continuadores constituye una de las vías de acceso a la matematización de la Lógica. La otra es la que arrancando de Leibniz va a quedar completamente expedita por obra de Frege y la logística. Boole y Frege coinciden en el deseo de mantener una estrecha conexión entre Lógica y Matemáticas pero divergen en la concepción de la naturaleza de tal conexión. Según Boole, la Lógica ha de ser considerada, en definitiva, como una rama de la Matemática aplicada y el Algebra de la Lógica constituye el propósito de construir el *organon* lógico sobre el modelo de las Matemáticas, siendo éstas un auxiliar para resolver los problemas de la Lógica. Para Frege, por el contrario, la Matemática (y más en concreto la Aritmética y todas las partes de la Matemática a ella reducibles) no es otra cosa, en último análisis, que una estructura derivada del desarrollo de las nociones lógicas fundamentales.

El Algebra de la Lógica está hecha por matemáticos que, de entre las múltiples parcelas de su disciplina, desarrollan una que sirve de base y ayuda para la matematización de la Lógica. El Algebra de la Lógica aparece, así, como una especialización marginal dentro del área de la Matemática; constituye una teoría matemática particular. No les resultaba, pues, a los matemáticos condición necesaria para su trabajo, y, por lo tanto, podían desinteresarse de ella. A su vez, el Algebra de la Lógica, en tanto que teoría matemática particular, como todas las demás, se presenta bajo una forma deductiva y en cuanto tal está presuponiendo la validez de las leyes lógicas de la deducción: las presupone, no las demuestra: "El álgebra de la lógica en sí misma deriva de la lógica pura, en tanto que teoría ma-

susceptibles de expresión simbólica, porque son el fundamento de todo simbolismo y de todo cálculo. Se puede, pues, decir que el álgebra de la lógica es una lógica matemática por su forma y por su método; pero no hay que tomarla como la *Lógica de las Matemáticas*"[1].

En una orientación bien distinta se sitúa la Logística: está hecha, ciertamente, por matemáticos pero también para los matemáticos. La Logística constituye una disciplina auxiliar indispensable para la fundamentación y la resolución de problemas de la Matemática. A la Lógica se le exige ahora asegurar los fundamentos de las Matemáticas. La Logística (principalmente en el período que va desde la *Begriffsschrift* (1879) de Frege hasta los *Principia Mathematica* (1910-1913) de Whitehead y Russell, período *logicista)* busca en la Lógica dejar bien sentado y dilucidado el proceso de la deducción y tratando, luego, de poner en forma deductiva y derivar el conjunto de nociones y verdades matemáticas a partir de nociones y verdades lógicas.

El "logicismo" en cuanto idea de reducir la Matemática a la Lógica no es nueva. Hemos visto cómo Leibniz sostenía la demostrabailidad de todos los axiomas y que todas las verdades de razón debían poder ser reducidas a proposiciones idénticas. Según Leibniz la lógica general (o *mathesis universalis)* engloba el cálculo aritmético (o *mathesis specialis),* y toda proposición matemática verdadera puede reducirse a una proposición idéntica; de manera que para saber si tal o cual proposición es demostrable, el criterio no es la evidencia ni tampoco que se la conciba clara y distintamente (criterio de Descartes) sino si es idéntica, esto es, reducible al principio de identidad. En consecuencia,

temática particular, pues descansa sobre principios (el principio de deducción y el principio de sustitución) que hemos postulado implícitamente y que no son

[1] L. Couturat, *El álgebra de la lógica*, ed. cit., p. 99.

para Leibniz, toda verdad es formalmente o virtualmente idéntica o, como dirá Kant, *analítica*. y, por consiguiente, debe poder ser demostrada *a priori*", mediante definiciones y el principio de identidad. Para oponerse precisamente a tal concepción de la Matemática forjó Kant la noción de "juicios sintéticos *a priori*" propios de las Matemáticas, y caracterizados porque su concepto-predicado no está incluido en el concepto-sujeto, lo que sí sucede con los juicios analíticos, propios de la Lógica. Sobre el concepto de analiticidad se apoyará Frege para elaborar su epistemología en la que la Aritmética elemental es deducible de la Lógica.

A la construcción de esta vía "logicista" que va de Leibniz a Frege interrumpida u obstruida por la epistemología kantiana han contribuido, en algunos tramos, autores como Bolzano, Weierstrass, Cantor y Dedekind.

1. Bernard Bolzano (1781-1848)

Nacido en Praga. Sacerdote católico, matemático y teólogo, profesor de Filosofía de la Religión en la Universidad de Praga desde 1805 hasta que, en 1819, fue destituido de su cargo por causa de sus ideas no conformistas en política, y sus obras fueron puestas en el *Indice*. En opinión de Husserl fue Bolzano el mayor lógico de todos los tiempos, y los historiadores de la Filosofía le consideran un nuevo Leibniz y un anti-kantiano: como Leibniz se dedicó con ahínco a las Matemáticas y a la Filosofía; y también como Leibniz sobresalió en ambos campos.

En 1833 publicó la *Wissenschaftslehre*, una voluminosa obra en 4 vols., con cerca de 2.500 pp. Y en 1851 se publicaron póstumamente sus *Paradoxien der Unendlichen*. Si éstas constituyeron, como se ha dicho, el punto de partida para las investigaciones de Cantor en el infinito matemático, en la *Wissenschaftslehre* encuentra Husserl varias tesis que configuran su teoría lógica, cuales son:

(1) La Lógica puede realmente ser definida como teoría de la ciencia.

(2) La Lógica debe afirmar su independencia, a la vez con respecto a las otras ciencias y también con respecto a las otras ramas de la Filosofía.

(3) Esta declaración de independencia lleva implícita la total oposición a toda alianza con la Psicología.

(4) Pueden señalarse ciertas analogías entre ciertos contenidos de la Lógica formal y los de la Ló-

Como reza el subtítulo, con la *Wissenschaftslehere* Bolzano pretende "una exposición detallada y en gran parte nueva de la Lógica con constante referencia a los autores que hasta ahora la han trabajado". En esa renovación de la Lógica buscará la base sobre la que reconstruir la totalidad de los conocimientos matemáticos y de las demás ciencias. Y esta preocupación de Bolzano por buscar, como Frege, un fundamento sólido para las Matemáticas se pone de manifiesto ya en su primera obra científica: su tesis de doctorado que se titulaba, precisamente, *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*..(Contribuciones a una mejor fundamentada presentación de la Matemática), en 1810. Y después de la *Wissenschaftslehre* dedicó los veinte últimos años de su vida a la elaboración de una especie de enciclopedia sistemática del saber matemático[2] divida en tres partes: 1) teoría de la cantidad en general, (la cantidad pura); 2) Una teoría de las ciencias especiales de la cantidad (teoría de los números, reales e imaginarios, goniometría, cálculo deferencial e integral); y 3) Una teoría de las ciencias que aplican la cantidad (combinatoria, teoría de las probabilidades, teoría del tiempo, teoría del espacio o geometría, ciencias físicas y naturales). En esta *Grössenlehre* la Matemática es considerada, como indica el título, como ciencia de la cantidad. Pero la cantidad es entendida en sentido amplio, abarcando todo lo que cae bajo la relación general $\leq$: x es una cantidad, si existe un y tal que $x \leq y$ o $y \leq x$.

La Matemática no es la ciencia de la cantidad en el sentido ordinario de la palabra, ni tampco es, como erróneamente suponía Kant, una ciencia de construcción de conceptos en correspondencia con intuiciones puras, sino que es una ciencia conceptual *a priori*, al igual que la Lógica y la Metafísica, es "la ciencia de las leyes (formas) universales en correspondencia con lo que las cosas deben conformar en su modo de existencia" *(Dasein)*, en donde "leyes" significa las condiciones de posibilidad de las cosas. La Matemática trata, pues, con necesidades hipotéticas, en tanto que la Metafísica trata con necesidades absolutas. Ahora bien, la Matemática es una ciencia particular, una ciencia entre otras, y, por lo mismo, carece *ipso facto* de autosuficiencia y autocompleción. En este sentido, la Matemática, como las otras ciencias, proporciona materiales a la Lógica, y es ésta (la Lógica o teoría de la ciencia = *Wissenschaftslhere)*, la ciencia de las ciencias, a la que compete describir el proceso de constitución de las ciencias y establecer las reglas para la organización y presentación de las ver-

gica de Bolzano y Husserl; pero sólo hay analogías y nada más.

dades ya adquiridas. La *Wissenschaftslhere* sólo el título tiene en común con la obra de Fichte. Para Bolzano es

---

[2] Berg, *o. c.*, pp. 17-25.

simplemente lógica y por lógica entiende la "suma total de reglas que debemos observar si deseamos proceder de manera correcta en la tarea de dividir la entera realidad de la verdad en ciencias particulares, y en la presentación de la misma en apropiados libros de texto" *(Wissenschaftslhere.*, § 1).

Bolzano sigue haciendo las siguientes precisiones sobre la naturaleza de la Lógica:

(1) La Lógica trata, no, como algunos han supuesto erróneamente, de los primeros principios de cada ciencia, sino, más bien, sólo del procedimiento que se debe seguir en su presentación.

(2) Supone también un error restringir la Lógica a la tarea de formular las reglas de lo inherentemente posible o meramente consistente: hay otras reglas de la verdad objetiva además de la ley de la no-contradicción.

(3) Algunos lógicos sostienen que su ciencia nada tiene que ver con la verdad de las proposiciones de las que ella se ocupa, sino sólo con su rectitud formal. Esta tesis es en parte verdad y en parte no. La Lógica se ocupa de la verdad de sus propias doctrinas, como las Matemáticas lo hacen de las suyas. Pero la Lógica no se ocupa de las verdades Matemáticas en el mismo sentido en que lo hacen las Matemáticas. Esto es, la tarea de la Lógica es aclarar los atributos y relaciones comunes a todas las verdades y exponerlos. De donde se sigue que no resulta adecuada la distinción entre verdades formales y materiales. Más correcto resultaría decir que las reglas lógicas son aquellas *en correspondencia con las cuales* se desarrolla el razonamiento, más que las premisas *de las que* se extraen conclusiones.

(4) "El origen de gran parte de las doctrinas erróneas en Lógica está en el hecho de que sus cultivadores no han distinguido con suficiente claridad entre verdades aprehendidas por el pensamiento *(gedachte Wahrheiten)* y verdades en sí *(Wahrheiten an sich);* entre proposiciones y conceptos aprehendidos y proposiciones y conceptos en sí" *(Wissenschaftslhere,* § 12).

Luego de estas precisiones introductorias sobre la naturaleza de la Lógica, comienza la exposición de la *Wissenschaftslhere* que divide en 5 partes:

Parte I: Teoría fundamental: incluye la prueba de sí, de las proposiciones en sí, de las proposiciones verdaderas en sí y de los razonamientos en sí.

Parte III: Teoría del conocimiento: con otras cuatro subdivisiones: ideas subjetivas, juicios, relación de éstos con la verdad, y su certeza y probabilidad.

Parte IV: *Ars inveniendi,* dedicada a los métodos y reglas para el descubrimiento de nuevas verdades y para evitar el error.

Parte V: "La Ciencia del conocimiento propio": Dedicada, con sus 600 pp., a la compilación y exposición en forma de manual del conjunto de verdades que sirven por su disposición para la convicción, comprensión, la pragmática, etc. ... En un apéndice hace incidentalmente una crítica al método seguido por Hegel.

Es en las dos primeras partes donde aperecen las contribuciones específicas de Bolzano a la Lógica.

1. *Proposiciones en sí (Sätze-an-sich) y verdades en sí (Wahrheinten-an-sich)*

Bolzano enfatiza la independencia de la Lógica respecto de la Psicología, oponiéndose a toda forma de subjetivismo -comprendido el subjetivismo kantiano-, y concediendo precisamente objetividad a las ideas, proposiciones, verdades..., con independencia de sus aspectos subjetivos, de su descubrimiento por los hombres, de su expresión verbal, o de que puedan ser pensadas.

Una *"proposición en sí" (Satz-an-sich)* es distinguible, dice Bolzano, de su expresión verbal y del hecho de que sea o pueda ser pensada. Puede ser definida como una afirmación cualquiera de que algo es o no es, bien sea pensada o no por alguna mente o espíritu. Las proposiciones en sí no tienen, obviamente, existencia ni actualidad; sólo si son pensadas poseen existencia en la mente como juicios. Pero, incluso así, hay que distinguir entre juicio *(Urteil)*, en cuanto acto de juzgar, y la proposición en sí o el contenido *(Stoff)* del juicio. Hay que distinguir, insiste Bolzano, las diversas expresiones lingüísticas mediante las cuales es comunicado un pensamiento del *contenido conceptual* que ellos expresan.

A partir de la proposición en sí define luego Bolzano la *verdad objetiva* como sigue: Una verdad en

que hay verdades en sí y que su conocimiento es posible.

Parte II: Teoría de los elementos de la Ciencia, con cuatro apartados: teoría de las ideas en sí es "una proposición dada que afirma que algo es como es; con independencia de si tal proposición ha sido actualmente pensada y expresada por alguien o no"[3]. En otras palabras, una proposición es objetiva-

[3] *Wissenschaftslehre*, § 25.

mente verdadera si atribuye al objeto sobre el que recae lo que actualmente le pertenece.

Según esto, las verdades en sí constituyen una subclase de las proposiciones en sí, y, como éstas, tampoco aquéllas poseen existencia real. Pero el hecho de que esta o aquella verdad sea o no conocida no constituye para ella una determinación esencial.

A continuación emprende Bolzano la tarea de demostrar que hay un número infinito de verdades objetivas; y los argumentos utilizados son del mismo tipo que los utilizados por los estoicos contra los escépticos, citando en este sentido a Sexto Empírico, San Agustín y Descartes. Para probar que hay al menos una verdad objetiva (§ 31) arguye que mantener lo contrario se refuta a sí mismo; esto es, la proposición "Ninguna proposición es verdadera" debe ser, en ese caso, verdadera y, por lo tanto, se refuta a sí misma.

2. *Ideas en sí (Vorstellungen-an-sich)*

La parte II de la *Wissenschaftslhere* se abre con la teoría de las "ideas en sí", entendidas como los constituyentes objetivos de las proposiciones. Una proposición en sí es un contenido conceptual que consta de unidades mínimas: los concepto individuales, y de una estructura compleja: la conexión, mediante una cópula, de los conceptos individuales. Y la denominación de proposición en sí se aplica propiamente a esta estructura, en tanto que los conceptos individules que componen la proposición en sí son llamados por Bolzano "ideas-en-sí".

Una idea en sí *(Vorstellung-an-sich)* es todo aquello que puede aparecer como un constituyente en una proposición, pero que no puede por sí solo constituir una proposición. Esta idea objetiva es el *contenido (Stoff)* de la idea subjetiva o concebida, y, como tal, subsiste como cierta entidad, con independdencia de que alguien la piense o no. Mas tampoco ha de ser confundido ese *contenido* con el objeto, existente o no. De un objeto se puede tener una idea, pero hay ideas que no tienen objetos sean éstos contradictorios (cuadrado redondo) o no contradictorios (montaña de oro). Y, finalmente, la idea en sí no debe ser confundida con las palabras u objetos sensibles que la simbolizan: hay ideas, tanto objetivas como subjetivas, que no son expresables en palabras; y, por otra parte, la misma idea objetiva puede ser simbolizada por dos o más palabras o grupos de palabras.

En la caracterización de las ideas, Bolzano sigue a Leibniz, distinguiendo ideas simples e ideas complejas. Las ideas tienen comprehensión *(Inhalt)* y extensión *(Umfang)*. Estas nociones son entendidas en otro sentido distinto al que le dieron Arnauld y Nicole. La comprehensión de una idea no es, como sostenían los lógicos de Port-Royal, el conjunto de atributos que necesariamente pertenecen a algo que cae bajo esa idea, sino más bien el conjunto de los conceptos envueltos en su especificación[4].

Extensión de una idea es aquella característica en virtud de la cual ella representa justamente tales objetos y no otros[5]. Cada idea está, pues, coordinada a una clase de objetos; y, si esta clase es vacía, la idea correspondiente no tiene extensión, es una idea vacía *(gegenstandlos)*, bien porque la clase correspondiente lo es necesariamente (cuadrado redondo), bien porque lo es de hecho (montaña de oro).

De estas redefiniciones de la intensión y la extensión de las ideas resulta, señala Bolzano, que la comprehensión y la extensión no varían inversamente, tal como se venía repitiendo desde la publicación de la lógica de Port-Royal. Y, así, sostiene que la idea de "hombre que conoce todas las lenguas vivas europeas" tiene una mayor comprehensión que la idea de "hombre que conoce todas las lenguas europeas", pero también la primera tiene, a la vez, una extensión mayor que la segunda.

Esta concepción de la idea-en-sí como una especie de esencia o característica *(Beschaffenheit)* le lleva a Bolzano a concebir, en la proposición, los atributos como nociones abstractas, expresables en el lenguaje mediante sustantivos, y a sustituir la cópula *es* por la de *posee*. Aferrado, como Leibniz, al viejo modelo de proposición sujeto-cópula-predicado, Bolzano trata de reducir a él todo otro tipo de proposición. Toda proposición ha de poseer sujeto, cópula, y predicado; y el predicado es una característica *(Beschaffenheit)* que "posee" el sujeto, y que ha de representarse en el lenguaje mediante un nombre abstracto, de modo que cualquier proposición, incluso la más compleja, como aquella en la que una proposición entera ocupa el lugar del sujeto, es reducible a la forma "A posee (la característica) B". Esta nueva cópula permite incorporar a la proposición una cualificación temporal. Así las proposiciones afirmativas tales como "Dios existe", "El concepto de triángulo es complejo", "Sócrates era sabio", se reinterpretan respectivamente como "Dios posee existencia", "El concepto de triángulo posee complejidad", "Sócrates en tiempo pasado posee sabiduría". En las negativas, la negación se aplica al suje-

jas. La suma de las partes de una idea compleja consti-

to y no, como comunmente se supone, a la cópula.

---

[4] *Ibidem*, § 56.
[5] *Ibidem*, § 66.

"Omne A non habet B" significa "No cada A posee B" o "la característica B ha de ser negada de cada A", esto es, toda proposición de la forma "A no posee B" significa que a "A" le falta la característica "B"; "Polifemo no era inteligente", que "Polifemo en tiempo pasado posee falta de inteligencia"[6].

Finalmente, por lo que respecta a las particulares, Bolzano sostiene que éstas no necesariamente conllevan el importe existencial. La expresión "Hay" *(Es gibt)* que aparece en las particulares significa que las ideas componentes de la proposición poseen sus respectivos objetos, existentes o inexistentes, según el caso. Así por ejemplo, "Algún A es B" o "Hay As que son Bs" significan que "La idea de un A que posee la característica B posee objetividad *(Gengestandlichkeit)*[7].

3. *El Razonamiento en sí*

El razonamiento se compone de proposiciones, y, al igual que éstas, constituye una estructura objetiva independiente de las operaciones mentales. En su empeño por emancipar a la Lógica de la Psicología y de la Retórica, Bolzano sostiene que en un razonamiento deductivo ("axiomático", sobreentiende Bolzano) como es el de las teorías matemáticas hay que distinguir la función lógica de la función persuasiva. La función lógica no consiste en hacer admitir las consecuencias a quien admite los principios, sino en exibir cierta organización sistemática de las proposiciones que ya estaba ahí, antes de que la conozcamos y que nosotros sólo hacemos que aparezca. La estructura objetiva del razonamiento es independiente del hecho contingente de que los sujetos la conozcamos subjetivamente, y ello porque objetivamente ciertas proposiciones son *fundamento* (ver luego) de otras.

4. *La validez y la analiticidad*

Bolzano acomete el análisis de estas nociones teniendo como referencia a Kant, aunque sea para criticarle: La distinción de Kant entre juicios *analíticos* y juicios *sintéticos*, según que la noción del predicado esté o no contenida en la del sujeto, resulta para Bolzano inadecuada: es, por una parte, demasiado estrecha, puesto que deja fuera proposiciones del tipo "toda cosa es V o no-V"; es por otra parte, demasiado amplia, porque debe incluir proposiciones como "El padre de Alejandro, rey de Macedonia, era rey de Macedonia", y, en tercer lugar, las proposiciones que encierran una contradicción no serían ni analíticas ni sintéticas, por exhaustiva de las proposiciones, y según esto, entre "analítico" y "sintético" no media relación de contradictoriedad, a menos que nos restrinjamos a las proposiciones verdaderas.

Para superar estos defectos Bolzano ofrece la siguiente noción de "analiticidad", que construye mediante la noción de "validez".

La validez no hace referencia a la verdad o falsedad de una proposición por separado, sino que significa "el concepto de la conexión en que la clase de proposiciones verdaderas que pueden ser derivadas de una proposición dada que puede ser considerada como variable, pone a la clase de todas las proposiciones que aparecen de esa manera"[8].

Tenemos aquí, según esto, la clase de proposiciones que se pueden obtener de una proposición dada, sustituyendo uno o más constituyentes ("ideas") de la misma. Toda proposición comprende diversos constituyentes. Si en una proposición sustituimos uno de esos constituyentes por otros pertenecientes a la misma clase, y si cualesquiera que sean estas sustituciones la proposición sigue siendo siempre verdadera o siempre falsa (o en terminología de Bolzano, si es universalmente *válida* o universalmente *inválida)*, entonces tal proposición es *analítica respecto de esa clase de constituyentes*. Así, dada la proposición "El hombre Cayo es mortal", consideremos sustituible a su constituyente "Cayo" por otros tales como "Sempronio", "Tito", etc..., y de estas sustituciones obtenemos una clase de proposiciones (compuesta por la primera y las otras resultantes de las sustituciones: "El hombre Sempronio es mortal", "El hombre Tito es mortal", etc... y puesto que todos los miembros de esa clase son verdaderos, la proposición originaria ("El hombre Cayo es mortal") es universalmente válida, con respecto al constituyente "Cayo". Cuando una proposición, hechas las sustituciones en el sentido indicado, resulte ser o universalmente válida o universalmente falsa, será considerada *analítica* respecto del constituyente o constituyentes tomados en consideración, y será *sintética* en caso contrario. Analíticas son, pues, aquellas proposiciones en las que uno de sus constituyentes puede ser arbitrariamente sustituido por otro, quedando inalterable su verdad o falsedad. Así, "Un hombre que es moralmente malo no merece respeto" es analítica respecto del constituyente "hombre", porque éste puede ser sustituido por otro como "ángel", "ser", sin alterar la verdad de la proposición "Dios es omnisciente" es

lo que la distinción kantiana no permite una división

sintética, puesto que no posee ningún constituyente de

[6] *Ibidem*, § 136.
[7] *Ibidem*, § 137.
[8] *Ibidem*, § 147.

cuya sustitución resulten únicamente proposiciones verdaderas o únicamente proposiciones falsas.

Según lo anterior, se puede considerar la analiticidad de una proposición respecto de uno o varios constituyentes. Cuando la parte dejada invariante de una proposición analítica sólo contiene nociones lógicas, la proposición resultante es llamada por Bolzano *lógicamente analítica*[9]. Noción ésta que, según Bolzano, se asemeja más a lo que Kant entendía por proposición analítica. Pero, en todo caso, la noción de "analiticidad" de Bolzano difiere sustancialmente de la ofrecida por Kant. Tal y como la define Bolzano:

(1) Es una noción más amplia que la simple analiticidad lógica; siendo ésta una especie de aquélla.

(2) Es relativa a uno varios constituyentes de la proposición.

(3) Resulta aplicable tanto a proposiciones verdaderas como a proposiciones falsas, lo que posee la vantaja de hacer una distinción exahaustiva entre proposiciones en analíticas y sintéticas.

(4) Una proposición puede resultar analítica en virtud de una ley natural o de las circunstancias accidentales; por ej.: la proposición "César murió antes de cumplir 170 años" es analítica respecto del constituyente "César", si al sustituir éste por otros resultan proposiciones verdaderas.

5. *Compatibilidad y derivabilidad*

Otra noción metalógica analizada por Bolzano, y que luego resultó fructífera en el desarrollo de la Lógica formal es la de *derivabilidad*, si bien la definición de Bolzano difiere de la más precisa actual.

La derivabilidad y la compatibilidad (sobre la que Bolzano funda la primera) son propiedades de las proposiciones o conjunto de proposiciones, pero propiedades no absolutas, sino relativas a los constituyentes de las proposiciones.

Bolzano la concibe, de acuerdo con su enfoque objetivista, como una conexión objetiva que media entre proposiciones, con respecto a determinados constituyentes de las proposiciones[10]: Dado un conjunto de proposiciones: $A, B, C, D,...$ y supuesto que ellas poseen en común ciertos constituyentes variables: $i, j,...$, si, efectuadas en todo el conjunto las sustituciones de $i, j,...$ por otros constituyentes pertenecientes a su clase, resultan nada más que proposiciones verdaderas, entonces las proposiciones $A, B, C, D,...$ son *compatibles* con respecto a los constituyentes $i, j,...$, siendo en caso contrario incompatibles. Así, por ejemplo, "esta flor posee un determinado tipo de capullo", "esta flor tiene un olor agradable" y "esta flor pertenece a la XX clase del sistema de Linneo" son proposiciones compatibles cuando se toma como variable (sustituible) el constituyente "esta flor". En efecto, si se sustituye dicho constituyente por "la rosa", resultan proposiciones verdaderas.

Esta noción de compatibilidad se corresponde con la que luego los lógicos de manera más precisa llamaron *satisfacibilidad*, ya que, según la anterior definición de Bolzano, un conjunto de formas proposicionales es *compatible* (es satisfacible, dirá Tarski), si hay en un dominio una interpretación que simultáneamente lo satisface, esto es, si el conjunto de las formas proposicionales, por resultado de las sustituciones (de la interpretación), queda ejemplificado por proposiciones simultáneamente verdaderas.

A continuación de la noción de compatibilidad expone Bolzano la de *derivabilidad (Ableitbarkeit)* entre dos proposiciones o dos grupos de proposiciones como sigue[11]:

> "Pensemos, pues, ante todo, el caso en el que, entre las proposiciones $A, B, C, D,... M, N, O,...$, compatibles entre sí, subsiste la conexión por la que todas las ideas que al sustituir a las ideas variables $i, j,...$ hacen verdadera cierta parte de estas proposiciones, esto es, todas las proposiciones $A, B, C, D,...$ tienen también la propiedad de hacer verdadera otra parte de esas proposiciones, esto es, las proposiciones $M, N, O...$ Esta tal conexión entre las proposiciones $A, B, C, D,...$, de un lado, y las proposiciones $M, N, O,...$, de otro, es digna de la mayor consideración, puesto que permite, nada más saber que ella se da, recabar del conocimiento de la verdad de las proposiciones $A, B, C, D,...$ la verdad también de $M, N, O,...$ Concedo, pues, a la conexión que subsiste entre las proposiciones $A, B, C, D,...$ de un lado, y $M, N, O...$ de otro, el nombre de conexión de derivabilidad, y digo que las proposiciones $M, N, O,...$ son derivables de las proposiciones $A, B, C, D,...$ con respecto a las partes variables $i, j,...$ si todo contenido de las ideas que hacen completamente verdaderas las proposiciones $A, B, C, D,...$, al sustituir a $i, j,...$, hacen también verdaderas todas las proposiciones $M, N, O,...$"

Y asimismo[12]:

> "Cuando afirmamos que $M, N, O,...$ son derivables de $A, B, C, D,...$, precisamente con relación a las ideas $i, j,...$, lo que en sustancia decimos no es más

[9] *Ibidem*, § 148.
[10] *Ibidem*, § 154.
[11] *Ibidem*, § 155.
[12] *Ibidem*, § 164.

que lo siguiente: todo contenido de ideas que al sus-

tituir a *i, j,* ... en las proposiciones *A, B, C,* ..., *M, N, O,* ... hace verdaderas globalmente las proposiciones *A, B, C,* ... tiene la propiedad de hacer también verdaderas globalmente las proposiciones *M, N, O,* ... La expresión usual que empleamos para indicar proposiciones de este tipo es, como se ha señalado: 'Si *A, B, C,* ... son verdaderas, *entonces* también *M, N, O,* ... son verdaderas'; o también: 'De *A, B, C,* ... *se siguen* o son *derivables* o se dejan *inferir M, N, O,* ...'".

Como en el caso anterior, al definir la compatibilidad, también ahora Bolzano da la definición de una categoría sintáctica, la *derivabilidad*, que corresponde exactamente a una categoría semántica, la *consecuencia lógica*. Esta será definida por Tarski como sigue: "la proposición *x se sigue lógicamente* de las proposiciones de la clase *k* si, y sólo si, todo modelo de la clase *k* es también modelo de la proposición *x*" [13]. Y es precisamente así como Bolzano entiende la derivabilidad: una proposición (o conjunto de proposiciones), llamada conclusión, es implicada por otro conjunto de proposiciones, llamadas premisas, si la estructura resultante de conectar las premisas a la conclusión tiene en un domino una interpretación tal que con premisas verdaderas las conclusiones son también verdaderas. Pero la derivabilidad, una vez que Tarski delimitó perfectamente las nociones sintácticas y las semánticas, es una noción más amplia (y de otro orden: sintáctico): no exige que las premisas sean verdaderas; una conclusión verdadera (o una conclusión falsa) puede que sea derivable (o se infiere) correctamente de unas premisas falsas. La derivabilidad en un razonamiento no depende de la verdad/falsedad de las proposiciones que lo componen; sólo depende de la forma en que están ligadas las proposiciones entre sí Bolzano señala luego una serie de propiedades concernientes a esta relación de derivabilidad tal cual él la ha definido. Entre esas propiedades están:

(1) Si una proposición es derivable por igual de las premisas *A, B, C, D,* ..., *X* y *A, B, C, D,* ..., *no-X*, es asimismo derivable de sólo las premisas *A, B, C, D,* ...
(2) Si *E, F, G,* ... son derivables de *A, B, C, D,* ... y *M, N, O,* ... son derivables de *E, F, G,* ..., entonces *M, N, O,*... lo son de *A, B, C, D,* ... (propiedad transitiva).
(3) Si *M* es derivable de *A, B, C, D,* ..., entonces
(4) Finalmente introduce la notación siguiente:

$$\frac{A, B, C, D, \ldots}{M, N, O, \ldots}$$

para significar el hecho de que de *M, N, O,* ... se derivan las premisas *A, B, C, D,* ..., y establece el siguiente principio *(de condicionalización)*[14]:

De:

$$\frac{A, B, C, D, E, F, G,}{M, N, O}$$

cabe concluir:

$$\frac{A, B, C, D,}{\textit{si } E, F, G, \textit{ entonces } M, N, O}$$

"De esta manera se puede deducir de una inferencia cualquiera de *n* premisas otras conclusiones teniendo sólo *n-1, n-2,*... (hasta incluso una sola) de aquellas premisas. Así, por ejemplo, de las dos premisas: *'A es B'* y *'B es C'* se obtiene la conclusión *'A es C'*. Estaremos, pues, autorizados también a derivar de la sola premisa *'A es B'* la conclusión: *'si B es C', entonces A es C'*".

6. *La relación "es fundamento de"*

Volviendo a las proposiciones en sí, llamadas verdades en sí (caracterizadas porque deben tener un objeto y ser compatibles entre sí), dice Bolzano que se da entre ellas una relación muy significativa: la de ser *fundamento* (o consecuente) de *(Abfolge)*[15]. Esta relación no puede ser reducida a ninguna otra ni ser confundida con la de derivabilidad. La conclusión de que hace más calor en verano que en invierno puede "ser derivada de" las premisas "el termómetro está más alto en agua caliente" y "en verano el termómetro está más alto". Pero esta conclusión no "se sigue" como un consecuente de las premisas como fundamento, porque una tal conclusión lleva a la cuestión "¿por qué?". Y la respuesta, el fundamento, habría de consistir en verdades en sí acerca de la posición relativa del sol y la tierra en invierno y en verano, etc... y, así, una conclusión puede ser derivada de premisas falsas, pero no se sigue de ellas; sólo se sigue de premisas verdaderas. Además (otra diferencia entre ser fundamento o consecuente de, y, ser derivable de), varias o muchas conclusiones pueden ser derivadas de las mismas premisas; mas sólo un consecuente se sigue de su fundamento. Según esto, la

no-A es derivable de *B*, *C*, *D*, ..., *no-M* (principio de reducción indirecta de los silogismos).

relación de ser fundamento de es una relación asimétrica (si *A* fundamento de *B*, no puede darse que *B* sea

[13] A. Tarski, "On the concept of logical consequence", en *Logic, semantic, metamathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1956, p. 417.
[14] *Ibidem*, § 223-24.
[15] *Ibidem*, § 198.

fundamento de *A)* e intransitiva (si *A* es fundamento de *B* y *B* lo es de *C*, entonces *A* no puede serlo de *C)*. Y tampoco debe ser confundida esta relación con la de causa-efecto: ésta última se refiere a actualidades; la primera a verdades en sí.

Otras características de esta relación son: 1) ninguna proposición puede ser fundamento de sí misma; 2) al menos una verdad se sigue de una proposición verdadera, a saber, que la proposición en cuestión es verdadera; 3) no todas las verdades en sí pueden ser consideradas como consecuentes de otras verdades en sí. Sobre esta última característica no ofrece razones, pero le parece que es una cuestión de hecho el que hay algunas verdades básicas, tales como "hay algo", "la idea de algo tiene significación objetiva"..., siendo Leibniz uno de los pocos filósofos que habló (en los *Nuevos Ensayos*, passim) de verdades en sí básicas o *vérités primitives*. Bolzano apela frecuentemente al "gran Leibniz", pero es que, además, en el desarrollo histórico de la Lógica, Bolzano es uno de los pocos pensadores que, oponiéndose al kantismo, poco favorable para el progreso de la lógica formal, vuelve a sondear en la tradición leibniciana, en donde encuentra materiales que manipulándolos posteriormente (precisándolos, puliéndolos,...) constituirán piezas importantes para la construcción de la Lógica.

Bolzano es considerado como el precursor del proceso denomindo por Felix Klein "la aritmetización del análisis", en el que toman parte Cauchy, Weierstrass, Abel, Jacobi,... y culmina con Dedekind. Este proceso se inicia en el XIX con la fundamentación de la Matemática y culmina en el XX con Frege, Peano, Hilbert.

El Análisis infinitesimal, creado por Leibniz y Newton, había adquirido un extraordinario desarrollo en el siglo XVIII, por obra de Euler y Lagrange. Pero las definiciones de los principales conceptos extraídos en los procedimientos analíticos, estaban faltos de rigor, estaban en muchos casos prendidos de la intuición, y hasta la noción misma de "función" era controvertida entre los matemáticos. En el siglo XIX el Análisis, sin dejar de progresar en su desarrollo, adquiere también un elevado rigor, prescindiendo en las definiciones de la intuición, en especial de la Geometría.

Con el deseo de someter al filo del análisis lógico las nociones fundamentales de la Matemática y con el propósito de rigorizar los procedimientos demostrativos, Bolzano inicia en 1817 (*Rein analytischs Be-*

fundamental del Algebra: "toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primer o de segundo grado". Todas las pruebas (desde la 1ª ofrecida por Gauss en 1799) caen en la alternativa: círculo vicioso o recurso a la intuición geométrica. Para escapar de la misma es necesario "buscar un fundamento objetivo" en las definiciones. Y, así, pasa a ofrecer la definición de continuidad en sentido moderno: a saber, $f(x)$ es continua en un intervalo si en calquier x del intervalo la diferencia $f(x + \omega) - f(x)$ puede hacerse tan pequeña como se desee tomando un ω suficientemente pequeño. Esta definición será perfeccionada por Weierstrass.

En 1817 Bolzano establece también la existencia de *ceros* en las funciones continuas: si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y en los extremos toma valores $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos, entoces $f(x)$ posee al menos un valor igual a cero entre a y b.

En la demostración utiliza un lema importante tanto por lo que establece como por su modo de demostración[16]. El método utilizado en la prueba será el mismo que luego seguirá Weierstrass, en 1860, para establecer la existencia de limite inferior, constituyéndose, así, el llamado teorema de Weierstrass-Bolzano: Entre los valores de una función $f(x)$ continua en el intervalo completo $[a, b]$, hay uno que es máximo absoluto y otro que es mínimo absoluto.

Como Bolzano, también Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) fundamenta el concepto de límite en consideraciones estrictamente aritméticas. En su *Cours d'analyse algébraique* (París, 1821) trata de rigorizar el Análisis, incluso en sus nociones básicas, aceptadas hasta entonces de manera intuitiva, como las de función o continuidad. Sobre la base de la noción de límite define los números irracionales y otros conceptos:

> "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, terminando por diferir de él tan poco como se quiera, entonces éste último se llama *límite* de los demás. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de las distintas fracciones que dan valores cada vez más aproximados al mismo".

La construcción de Cauchy, empero, se funda, por una parte, en una noción intuitiva del sistema de los números reales, al tiempo que la falta de una investigación adecuada de tal sistema hace que en el concepto

vos, Bolzano inicia en 1817 (*Rein analytischer Beweis...*) el estudio de las propiedades de las funciones. Examina las diferentes demostraciones del teorema

número irracional sin percartarse de que, a su vez, la noción de límite presupone lógicamente aquel concepto. De hecho, el propio Cauchy suprimió la última frase de la anterior definición en la edición posterior.

Con todo, este nuevo método iniciado por Cauchy, el de la definibilidad de las nociones fundamentales, la precisión en las definiciones, delimitación del campo de validez de las fórmulas, eliminación de toda extensión ilegítima, va a dar una nueva orientación al Análisis en el siglo XIX por medio de las aportaciones de Weierstrass, fundando el Análisis sobre bases más rigurosas.

Karl Weierstrass (1815-1897)

Sigue el camino iniciado por Bolzano y Cauchy de la rigorización del Análisis, aritmetizándolo y suprimiendo todos los elementos trascendentes y geométricos en el mismo.

En sus lecciones de 1859 en Berlín sobre teoría de las funciones[17], Weierstrass comienza trazando una distinción esencial entre el momento del *descubrimiento* y el momento de la *justificación*. Al investigador como tal, afirma Weierstrass, le está permitido tentar cualquier vía; pero, cuando está en juego la justificación racional de los resultados obtenidos, se debe transitar el camino único de la fundamentación sistemática de la teoría, esto es, se debe proceder por vía puramente lógica para la reconstrucción completa de la estructura teórica considerada, rechazando los conceptos previamente admitidos como intuitivos pero sin justificación. Y, así, Weierstrass critica la anterior definición de límite de Cauchy, porque, aparte de la circularidad antes señalada, sigue aún contaminada de intuiciones geométricas, la frase "una variable se aproxima al límite indefinidamente" sugiere tiempo y movimiento. Weierstrass busca un tratamiento sistemático del Análisis comenzando por los fundamentos numéricos. Es el primero en poner de manifiesto que para establecer las propiedades de las funciones continuas necesitaba la teoría del continuo aritmético. Analiza la noción de número, colocándose en una perspectiva genética:

> "El número, en el caso más simple, es la representación sintética de la adjunción de la unidad a la unidad"; pero siempre está en relación con una multiplicidad: "un número complejo es la representación sintética de grupos diferentes de elementos homogéneos entre ellos"[18].

Según esto, el número es el resultado de un proceso de abstracción aplicado a una colectividad.

> "Y es aquí, dice J. de Lorenzo[19], donde se ha producido una inversión conceptual: los números que se vayan a definir aparecerán como agregados de elementos previamente definidos. Agregado, sistema, colección... no objeto o elemento individual, sino conjunto caracterizado por una propiedad común. Y gracias a esta inversión -que destierra la imagen geométrica por su individualidad- podrá aceptarse el número real y después el límite".

Weierstrass señala la necesidad de distinguir los elementos que pueden pertenecer a especies diferentes y a un agregado *(Anzahl)* finito o infinito. Luego, las operaciones y relaciones propias de cada especie serán sometidas a principios generales, pudiendo así ir estableciendo exactamente las definiciones correspondientes, formuladas más tarde por Cantor para la teoría de conjuntos. Y, así, Weierstrass establece la relación de igualdad aplicable a agregados tanto finitos como infinitos: dos números son iguales si todo número formado de un agregado finito de elementos de uno de ellos es parte integrante del otro. Un número a que denote un agregado infinito es finito si existe un número b formado de un agregado finito, tal que todo número formado de elementos de a (de agregado finito) está contenido en él, esto es, $a < b$. El número irracional es, así, definido como un agregado infinito de elementos que son números racionales.

Antes de la decisiva creación de Cantor merecen, empero, reseñarse -como así lo consideró el mismo Cantor- las *Paradoxien des Unendlichen* (publicadas póstumamente, en 1851) de Bolzano.

En esta obra, aparecen las siguientes nociones fundamentales de la teoría de conjuntos[20].

1) *Definición general de conjunto*

> "Un cierto sistema *(Inbegriff)* de cosas es un todo consistente en ciertas partes... Un sistema en el cual el orden de las partes resulta indiferente se denomina un conjunto".

Y entiende por *partes:*

> "las unidades de una determinada especie A..., esto es, los objetos subsumidos bajo un concepto A";

[16] Exposición del enunciado del lema (en terminología de Bolzano) y del método de su demostración en Jean Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, París, 1962.

[17] La Teoría de Weierstrass es recogida y expuesta por H. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik* (1877).
[18] En Kossak, *o. c.*, p. 16.
[19] Javier de Lorenzo, *La Matemática y el problema de su historia*, Tecnos, Madrid, 1977, p. 70.
[20] *Confert* Jean Cavaillès, *Remarques sur la formation de la theorie abstraite des ensembles* (1938), en *Philosophie mathématique*. Hermann, Paris, 1962, pp. 67-71.

y por conjunto:

> una multiplicidad *(Vielheit)*. El conjunto es considerado como una realidad existente en sí, independiente de nuestros medios de aprehenderlo o de llegar a él. Basta que se pueda decidir si un elemento dado pertenece o no a él.

Y, así,

> "hemos determinado de la manera más completa el conjunto... infinito de puntos entre m y n en cuanto hayamos determinado los dos puntos m y n, porque entonces, mediante estas pocas palabras, queda exactamente decidido para cualquier otro punto si pertenece o no a este conjunto"[21].

De aquí la posibilidad de que un conjunto sea infinito en acto, con independencia de que nosotros podamos aprehenderlo o sepamos engendrarlo.

2) *Correspondencia biunívoca*

> "Dos conjuntos A y B están en una tal relación el uno con el otro cuando para toda parte a de A podemos, según cierta regla, encontrar una parte b de B y cuando todos los pares $(a + b)$ así formados contienen toda cosa que se encuentre en A o en B y cada una sólo una vez"[22].

3) *Esbozo de una aritmética de conjuntos*

Define correctamente las nociones de adición y de multiplicación de conjuntos:

Adición:

> "Puede haber sistemas cuyas partes... son a su vez sistemas. Y, entre éstos, sistemas tales que nada esencial cambia en ellos si se considera las partes de las partes como partes del todo. Las llamo sumas"[23].

Multiplicación (introducida sólo para el conjunto de los enteros): es representada por la notación:

$$\overset{o}{N} = 1^o + 2^o + 3^o + \ldots$$

donde los signos o y + indican que no se trata de una suma aritmética. Y el producto de este conjunto por sí mismo será[24]:

$$(\overset{o}{N})^2 = 1^o \cdot N^o + 2^o \cdot N^o + 3^o \cdot N^o + \ldots$$

en donde cada elemento multiplicador es sustituido por un conjunto equivalente al multiplicando.

Establece, aunque de modo aún confuso, las relaciones "parte de un conjunto" e "igualdad entre conjuntos", y, a través de tales relaciones la distinción entre conjuntos "finitos" e "infinitos": Los conjuntos son multiplicidades *(Vielheiten)*, de las que se conoce la ley de cómo se generan: cuando la multiplicidad puede ser obtenida toda ella por agregación sucesiva de un elemento, es finita; y "una multiplicidad, tal que todo conjunto finito constituye una parte suya, se denomina multiplicidad infinita"[25]. Como ejemplo de conjunto infinito exhibe "el conjunto de todas las proposiciones y verdades en sí": Para toda verdad podemos enunciar otra: saber que la primera es verdadera; poseemos, así, una ley que permite "deducir de la proposición A otra diferente a ella B, y de B, de nuevo, otra C, y así sin fin". Esta serie de proposiciones es semejante a la serie de los números, esto es, "Posee una multiplicidad mayor que todo número, es por tanto infinita.

Se puede poner en correspondencia biunívoca los elementos de tal conjunto con los de una de sus partes (propiedad de los conjuntos infinitos que luego Dedekind transformará en definición de estos conjuntos). Pero Bolzano, con el anterior ejemplo, no prueba más que un infinito virtual. Para definir la igualdad entre conjuntos es preciso, pues, "hacer otra consideración: saber que los dos conjuntos poseen los mismos principios de determinación, por ej., el mismo modo de ser generados". Así, los dos conjuntos, A (intervalo de números *0...5)* y B (intervalo *0.....12)*, no son iguales porque "la distancia que hay entre dos magnitudes en B es otra (más grande) que la distancia que separa en A las dos magnitudes correspondientes"[26].

Pero, con esto, la definición de igualdad no es autónoma, queda dependiente de otras nociones ("distancia", "más grande") y estructuras (sucesión de los números con un orden) a su vez sin fundamentar.

4) *Definición abstracta del continuo.*

Caracteriza el continuo como conjunto infinito poseyendo un cierto orden establecido entre sus elementos: "sólo hay continuo cuando se da un sistema de objetos simples (de puntos en el espacio o en el tiempo o también de sustancias) puestos de tal manera que cada uno de ellos posee a cualquier distancia, por pequeña que sea, un vecino perteneciente también al sistema"[27]. La se-

[21] *Paradoxien des Unenllichen*, p. 38.
[22] *Ibidem*, p. 31.
[23] *Ibidem*, p. 4.
[24] *Ibidem*, p. 45.
[25] *Ibidem*, p. 6.
[26] *Ibidem*, p. 31.
[27] *Ibidem*, p. 73.

gunda parte de la definición la restringe a los espacios métricos y, por lo tanto, presa aún de la intuición geométrica. Sin embargo, la definición constituye una primera formulación del axioma de Cantor, según el cual a todo número real corresponde sobre una recta un punto teniendo este número por abscisa.

Con Cantor y Dedekind, hacia 1872, culmina el proceso llamado "aritmetización del Análisis". Ambos elaboraron independientemente y con métodos diversos -Dedekind mediante el procedimiento de las "cortaduras" y Cantor con sus investigaciones sobre la estructura y la clasificación de los conjuntos de puntos sobre la recta y de las funciones reales de variables reales- una fundamentación teórica definitiva de los números reales, reconstruyendo éstos a partir de las racionales y, por tanto, a partir de los naturales (ya que los racionales son fácilmente definibles en términos de los naturales). Con ello todo el Análisis (cálculo diferencial e integral) puede ser tratado en términos de números naturales y su aritmética. Mostrando, así, la posibilidad de reconstruir la Matemática sobre la base de un reducido número de nociones elementales de la Aritmética.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)

Sus dos obras más importantes sobre los fundamentos de las matemáticas son: *"Stetigkeit und irrationale Zahlen"* (1872) y *"Was sind und was sollen die Zahlen?"*[28]. La primera, sobre la aritmetización del análisis; la segunda sobre la teoría de los números naturales.

En la primera se propone Dedekind "establecer una fundamentación puramente aritmética y perfectamente rigurosa de los principios del Análisis infinitesimal". Para ello define el conjunto de los números reales *(R)* en términos del conjunto de los números racionales R_1, sin apelar a nociones geométricas tales como longitud o magnitud, haciendo uso del concepto de "cortadura" *(Schnitt)* en R_1.

Presenta una demostración puramente aritmética (sin apelar a la noción extra-aritmética de "magnitud inconmensurable") de que el domino de los números racinales, R_1, no es cerrado respecto de la operación raíz cuadrada:

sea m un número entero que no es un número cuadrado. El resultado de la operación raíz cuadrada de m no pertenece a R_1. Esto es, no existe en R_1 un número cuyo cuadrado sea m.

Prueba: si un tal número existiese, sería una fracción irreductible p/q tal que:

(1) $p^2 - m\,q^2 = 0$

Mas, por otra parte, por la condición de que m no es cuadrado (siendo entero y positivo) tenemos:

(2) $\lambda^2 < m < (\lambda + 1)^2$

Lo que implica, reemplazando m por su valor sacado de (1):

(3) $\lambda q < p < (\lambda + 1)\,q$

Sea ahora la siguiente igualdad:

(4) $(mq - \lambda p)^2 - m\,(p - \lambda q)^2 = (\lambda^2 - m)\,(p^2 - mq^2)$

En virtud de (1) tenemos:

(5) $(mq - \lambda p)^2 = m\,(p - \lambda q)^2$

De donde resulta que m es, entonces, cuadrado del número racional:

(6) $\dfrac{mq - \lambda p}{p - \lambda q}$

Mas, por (3) tenemos:

$$p - \lambda q < q$$

Por tanto, m no puede, contra lo que se había supuesto, ser cuadrado de la fracción irreductible p/q, pudiendo generalizarse la demostración para la n-ésima raíz. En consecuencia la operación $\sqrt[n]{x}$ no define un elemento R_1 en el caso en que:

$$\lambda^n < x < (\lambda + 1)^n$$

Esta relación establece una "cortadura" A_1, A_2 en el domino de los números racionales, que Dedekind define así: "Si ahora se da una separación del sistema R_1 en dos clases A_1, A_2 con sólo la propiedad característica de que cada número a_1 en A_1 es menor que cada número a_2 en A_2, entonces, por brevedad, llamaremos a tal separación una *cortadura (Schnitt)* y la designaremos por A_1, A_2"[29]

[28] Ambas recogidas en Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, volumen III. Braunschweig, 1932, págs. 315-334 y 335-391, respectivamente. Trad. inglesa en *Essays on the theory of numbers*, en Open Court, Chicago, 1901, pp. 1-24 y 31-105, por donde citamos.

[29] *Continuity and irrational numbers*, p. 12-13.

La cortadura es, pues, una operación que determina un número. Pero no un número de R_1: por lo tanto R_1 no es cerrado respecto de dicha operación. En efecto, la relación $\lambda^2 < m < (\lambda + 1)^2$ define la cortadura A_1, A_2, relativa a m; A_2 comprende los números racionales r' cuyo cuadrado es superior a m, y A_1 todos los racionales r inferiores a r'. Además no existe, sobre R_1, número alguno cuyo cuadrado sea igual a m: para todo número racional a, o bien $a^2 < m$, o bien $a^2 > m$. Por lo tanto, no existe en A_1 número superior a todos los otros; y tampoco existe en A_2 número inferior a todos los otros.

La cortadura A_1, A_2 relativa a m determina, pues, un número que no pertenece a R_1. Para todo número racional de A_1 existirá en A_1 un racional que será mayor que él; para todo número racional de A_2 existirá en A_2 otro racional menor que él; todo número racional pertenece, bien a A_1, bien a A_2. No existe, por lo tanto, número racional que separe las dos clases. El sistema R_1 presenta, pues, lagunas: "en esta propiedad, la de que no todas las cadenas son producidas por números racionales, consiste la incompleción o discontinuidad del domino R_1 de todos los números racionales.

Por lo tanto, siempre que nos las habemos con una cortadura (A_1, A_2) producida por un número no racional, creamos uno nuevo, un número *irracional* α, que consideramos plenamente definido por esta cadena (A_1, A_2); diremos que el número α corresponde a esta cortadura o que produce esta cortadura. De aquí que a cada cortadura determinada corresponde un determinado número racional o irracional, y consideramos dos números como *diferentes* o *desiguales* siempre que, y sólo si, ellos corresponden a cortaduras esencialmente diferentes"[30].

Otra laguna que posee el sistema de los números racionales, originada por el no cierre de R_1 respecto de la operación $\sqrt{\ }$, es que exiten en R_1 series convergentes de elementos que no tienen límite en R_1:

La propiedad de densidad que posee R_1 permite -para cualquier intervalo (α, β) incluido en el intervalo (a, b), esto es, para todo $(\alpha, \beta) \subset$ (a, b)- designar un elemento de R_1 sobre (α, β). Esta propiedad posibilita formar series convergentes de elementos de R_1. Y una serie infinita y ascendente de elementos de R_1 $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ es convergente si para todo ε positivo y racional tan pequeño como se quiera [esto es, tal que a_r no pertenece a R_1, entonces existe una serie ascendente y convergente de elementos de A_1 que no tienen límite en A_1; y existe también una serie descendente y convergente de elementos de A_2 que no tienen límite en A_2. Así, por ejemplo, la serie de valores aproximados por defecto de $\sqrt{2}$ forma en A_1 una una serie convergente que no tiene límite en A_1. El sistema R_1 no es, pues, cerrado respecto de la operación "paso al límite".

Dedekind define las relaciones de orden, $\alpha < \beta$, y de igualdad, $\alpha = \beta$, entre números reales y establece para ellos el teorema de continuidad:

> "El dominio de R [de los números reales] posee también *continuidad;* i. e., el siguiente teorema es verdadero: IV Si el sistema R de todos los números reales se parte en dos clases A_1, A_2 tales que cada número α_1 de la clase A_1 es menor que cada número α_2 de la clase A_2, entonces existe uno y sólo un número α por el que se produce esta separación"[31].

También define Dedekind varias operaciones sobre los números reales: la adición (la operación que más en detalle trata) y la formación de diferentes productos, cocientes, potencias, raíces, logaritmos, las cuales le permiten probar varios teoremas fundamentales para el Análisis, con lo que éste queda independizado de consideraciones geométricas, culminando el proceso de la "aritmetización del análisis", y con ello una etapa importante en la fundamentación de la Matemática y de los procesos deductivos. Pero justo en su culmen otra nueva cima que conquistar se presenta a los matemáticos. En la definición de Dedekind de número real, entra no sólo el concepto de número racional (y por lo tanto el de número natural), sino también el concepto de "clase" o "conjunto" o "infinito". De modo que el Análisis no queda exclusivamente asentado sobre la teoría de números (racionales y naturales), sino también sobre la teoría de los conjuntos infinitos. Dedekind toma la noción de "clase" (o "sistema", en su terminología) como noción lógica inofensiva. Mas, luego que Cantor desarrolla la teoría de los conjuntos infinitos, queda de manifiesto que dicha noción no es inofensiva, ni para la Lógica, ni para la Matemática, y que su empleo crea muchos problemas, incluso paradojas, por lo que exige mucho tacto.

Los logros de Dedekind, empero, hay que situarlos en su época: en los años 70 el Análisis, por obra suya, queda reducido con éxito a la teoría de los números naturales. La siguiente tarea, pues, la definición

$< a_l$ (a_k, $a_l \in R$), $\varepsilon < a_k$] existe un entero n tal que para todo $m > n$ se verifica que $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Ahora bien, si la cortadura A_1, A_2 define un elemento que

[30] *Ibidem*, p. 15.
[31] *Ibidem*, p. 20.

La fundamentación de la Aritmética

Dedekind y Frege emprenden la tarea de fundamentar la Aritmética. Ambos pretenden el mismo fin pero elaboran sus ideas con independencia y difieren en el espíritu y en el modo de su ejecución.

La construcción de Frege comienza con la creación de una simbología lógica precisa en su obra *Begriffsschrift* (1879), para aplicarla a la Aritmética (Los *Grundlangen*. 1884) hasta su total formalización (Los *Grundgezetze*. 1893/1903). La obra principal de Dedekind sobre la fundamentación de la aritmética es *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888).

El fin común es el llamado "logicismo": la tendencia a eliminar la intuición en el uso de los conceptos teóricos y a reducir el número de conceptos "indefinibles", llegando en su formulación más exigente (Frege) a traducir todo a términos de lógica formal con una deducción sintáctica totalmente explícita. "El logicismo -dice Brunschvicg[32]- está animado por un ideal de deducción absoluta y universal".

Este logicismo constituye, por lo demás, una etapa "necesaria" (obligada) en el desarrollo del proceso de rigorización de la Matemática. Con la "aritmetización del Análisis" terminada en los años 70, se consigue que todas las Matemáticas reponen sobre la noción de entero: Con la *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) de Dedekind, queda asegurada la construcción de los números reales en términos de clases de racionales, y, por consiguiente, en términos de pares de enteros. En esta situación, los enteros son los únicos "indefinibles" que los matemáticos necesitaban admitir; todo lo demás podía ser construido a partir de ellos. Esa era la verdad de la frase de Kronecker: "El buen Dios ha creado los números enteros; todo lo demás es obra del hombre".

Sin embargo, Dedekind y Frege van más allá que Kronecker. Su proyecto consiste en no pararse en los enteros como indefinibles. Los números enteros no constituyen las ideas primitivas de las Matemáticas. Y, como hizo antes la aritmetización del Análisis, también ahora el logicismo busca reducir en las Matemáticas el número de indefinibles o de nociones primitivas, definiendo éstas mediante otras más primitivas y fundamentales, en términos de nociones lógicas. Dedekind persigue ese fin, y así lo pone de manifiesto

números naturales. La siguiente tarea, en la fundamentación de las Matemáticas, consistirá en proporcionar una teoría satisfactoria de los números naturales. Esta tarea la emprenden Dedekind y Frege en los años 80.

"Al hablar de la aritmética (el álgebra, el análisis) como una parte de la lógica, quiero decir que considero el concepto de número totalmente independiente de las nociones o intuiciones de espacio y tiempo, que lo considero un resultado inmediato de las leyes del pensamiento. Mi respuesta al problema propuesto en el título de este libro es, pue, brevemente ésta: los números son libres creaciones de la mente humana; funcionan como medio de aprehender más fácilmente y con mayor precisión la diferencia de las cosas. Sólo si procedemos de forma puramente lógica en la construcción de la ciencia de los números, adquiriendo así el dominio continuo de los números, estaremos convenientemente preparados para investigar nuestras nociones de espacio y tiempo, poniéndolas en relación con ese dominio de números creados en nuestra mente". (*edic. cit.* pp. 31-32).

Dedekind, como Frege, rechaza la teoría kantiana de la Aritmética y se inserta en la tradición leibniciana que propugna la reducción de la Aritmética a la Lógica.

El punto de partida, los enemigos -Kant, el psicologismo y el empirismo-, y la formulación del proyecto de Dedekind son los mismos que los del proyecto de Frege. A partir de aquí comienzan las diferencias.

En el esquema gnoseológico de Frege, sólo caben dos opciones: realismo o subjetivismo; opciones que forman una disyunción exclusiva, de modo que "si queremos salir de la esfera de la subjetividad nos vemos forzados a considerar el conocimiento como una actividad que no produce lo conocido sino que se encuentra con que ello preexiste"[33]. Frente a este platonismo propugnado por Frege, Dedekind habla de "las leyes del pensamiento" y de los números como "libres creaciones de la mente humana", lo cual, amén de contradecir a Kronecker -la Aritmética, el número entero no es el último reducto en el *regressus* de la fundamentación: "somos de naturaleza divina y poseemos el poder de crear"[34]-, constituye una defensa del constructivismo: las nociones fundamentales son objetivaciones de actos de conciencia y esa objetividad reposa, no en un mundo platónico, sino en la actividad de un sujeto trascendental.

La segunda diferencia entre el proyecto de Dedekind y el de Frege es aún más radical: concierne a la concepción misma de la Lógica. Es cierto, como hemos visto, que Dedekind es de la opinión de que la Aritmética es parte de la Lógica. Pero la cuestión está en qué

en el Prefacio a la primera edición de *Was sind und was sollen die Zahlen?:*

> "Sucede con mucha frecuencia que cosas diferentes, *a, b, c,...* por alguna razón, pueden ser asociadas en el espíritu y se dice que forman un *sistema S*"[35].

[32] *Les Étapes de la philosophie mathématique*. Paris. 1912. cap. XIX.
[33] *Grundgesetze* I, p. XXIV.
[34] *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Prefacio.

mente lógicos: en primer lugar, emplea como noción primitiva la de "conjunto" (o "sistema"); noción que él considera específica de la Lógica y que introduce así:

Frege, en el prefacio de su *Grundgesetze* (vol. I, p. VIII), tras reconocer el mérito de la obra de Dedekind ("el mejor libro sobre los fundamentos de la aritmética de los que tengo noticia"), critica a Dedekind el haberse quedado a mitad del camino en su intención de fundamentar la Aritmética en la Lógica, "porque las expresiones 'sistema' y 'una cosa pertenece a otra cosa' que usa no son usuales en Lógica, ni quedan reducidas a nociones lógicas reconocidas". Dedekind no ha asegurado el status lógico a estas nociones primitivas que fundamentan sus teorías de los números. Lo que realmente hace es desarrollar una teoría axiomática de la aritmética sobre la recién nacida teoría de conjuntos. Pero, como más tarde se pondrá de manifiesto, precisamente las nociones básicas de esta teoría no pueden ser caracterizadas formalmente de manera inambigua.

En segundo lugar, una vez introducida la noción de "conjunto" (o "sistema") como primitiva, Dedekind utiliza la lógica "natural" y no el procedimiento formal totalmente explícito; esto es, no explicita los axiomas y reglas de deducción empleadas en cada caso. Al contrario de Frege -quien no deja definición alguna implícita ni paso deductivo sin justificar formalmente, Dedekind procede en las deducciones con una lógica no explícita: falta una enumeración de los axiomas lógicos y de los axiomas matemáticos empleados y falta una explicitación de las reglas de deducción utilizadas. Y resulta difícil reconocer si todo lo que es demostrable ha quedado realmente demostrado; no hay un encadenamiento riguroso en el que cada paso está formal y explícitamente justificado.

Y, en tercer lugar, Dedekind construye su fundamentación de la Aritmética sobre un sistema de axiomas con variables *libres,* esto es, en el sentido formalista de Hilbert: los axiomas son condiciones de estructura sobre objetos de naturaleza no especificada. Frege es, en este sentido, antiformalista: no puede haber variables libres, no puede haber multivocidad de los signos; los axiomas no constituyen "definiciones implícitas". Para Dedekind, en cambio, la "deducción" de la Aritmética a partir de la Lógica consiste en la

entiende él por Lógica. En realidad, Dedekind no define los conceptos de la Aritmética en términos estricta-

la Lógica. Las variables que figuran en sus axiomas ("sistema", "elemento de ese sistema" y "función definida sobre ese conjunto: *N, I, φ)* son variables *libres:* pueden ser reemplazadas por "cero"; "posterioridad de cero por sucesor" y "sucesor", o por, "uno", "conjunto de números primos" y "la relación del número primo *p* al más pequeño número primo diferente de *p* que viene después de él". Este sistema de axiomas entraña, por tanto, una pluralidad de modelos: "Las relaciones o los teoremas que pueden ser deducidos a partir de las condiciones α-δ del nº 71 [los axiomas] y que devienen por tanto idénticamente verdaderos en todos los conjuntos simplemente infinitos y ordenados, cualesquiera que sean los nombres que se den a sus elementos, constituyen el objeto por excelencia de la ciencia de los números"[36].

Uno de los modelos - según Dedekind ha demostrado, o mejor, ha creído demostrar- para su sistema de axiomas es el dominio de los enteros, consiguiendo así, una construcción precisa y elegante de la Aritmética.

Construcción de Dedekind

Was sind und was sollen die Zahlen? constituye el primer intento de construir una teoría abstracta de conjuntos y también una construcción -axiomática- de la Aritmética en términos conjuntistas, alternativa a las construcciones puramente logicistas.

Dedekind comienza introduciendo dos categorías de entes: los individuos o cosas *(Dinge)* y los conjuntos *(Systeme).* "Una *cosa* es todo objeto de nuestro pensamiento", y cuando "diferentes cosas *a, b, c...*, consideradas desde un mismo punto de vista, son asociadas en el espíritu se dice que forman un *sistema S*". *(Was sind...,* p. 45). Definidos en términos extensionalistas: un sistema *S* queda determinado si para cualquier cosa queda determinado que ella es, o no, un elemento de *S.* Por tanto, "El sistema *S* es el mismo que el sistema *T,* en símbolos $S = T$, cuando cada elemento de *S* es también elemento de *T,* y cada elemento de *T* es también elemento de *S*"[37]. Definición, ésta, que equivale al "axioma de extensionalidad" de Zermelo. Introduce, luego Dedekind la relación "es parte de": "Definición. se dice que un sistema *A es parte* de un sistema *S* si cada elemento de *A* es también elemento de *S*". Y se representa así: $A \ni S$. Emplea el mismo signo, $\ni$, para la relación de inclusión entre clases que para la relación de pertenencia de individuo

construcción de un modelo de la Aritmética formal en

[35] *Ibidem*, p. 45.
[36] *Ibidem*, nº 37.
[37] *Ibidem*, p. 45.

sentar individuos, letras minúsculas: $s \ni S$, reservando las mayúsculas para representar las clases y las subclases. Será Peano, en 1889, quien por primera vez distinga con notación diferente la relación de inclusión de la relación de pertenencia.

Dedekind no admite el conjunto vacío:

> "Proponemos aquí por ciertas razones excluir el sistema vacío que no contiene ningún elemento, aunque en otras investigaciones puede resultar apropiado imaginar un tal sistema"[38].

Aunque Dedekind no explica cuáles son esas razones que le llevan a rechazar en su sistema el conjunto vacío, parece que ellas son debidas a la no distinción precisa entre la relación de pertenencia y la relación de inclusión; relaciones precisas y diferentes, que cuando no se distinguen, como Schröder, sino que es empleada esta otra relación ambigüa "es parte de", se originan serias dificultades. Porque cuando las partes de una clase son objetos, entonces esa clase es un agregado, una unidad colectiva, de ellos. Y, consecuentemente, la clase desaparece si desaparecen esos objetos. Mas cuando las partes de la clase son, a su vez, clases -la relación que entonces media entre parte y todo es la relación de inclusión-, nada impide admitir clases con individuos y clases sin ellos. En terminología moderna: tiene sentido $\emptyset \subseteq S$ mas no $\emptyset \in S$.

Vienen luego las definiciones de unión e intersección de un conjunto de conjuntos *A, B, C...:* La unión de los conjuntos *A, B, C,...* es el conjunto de objetos pertenecientes al menos a uno de los conjuntos *A, B, C,...* Esta definición corresponde al "axioma de la unión" de Zermelo. La intersección de los conjuntos *A, B, C,...* es el conjunto de los objetos pertenenientes a todos los conjuntos *A, B, C,...*

Otra noción fundamental para la construcción de su sistema es la que él llama "aplicación" *(Abbildung)*. Dedekind concede, y con razón, gran importancia, matemática y filosófica, a esta noción. El origen de esta categoría es la noción de "función", noción nacida en el siglo XVII, pero que fue trasformándose, adquiriendo una significación más amplia; en concreto con Riemann (1826-1866) y Dirichlet (1805-1859) deja de ser un concepto puramente arimético, para significar cualquier correspondencia entre dos conjuntos. Precisamente fue Dedekind quien reeditó, en 1879, las *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet, añadiendo en suplementos sus consideraciones sobre la teoría de los números algebraicos. En la *Zahlentheorie* de Dirichlet se encuentra el siguiente pasaje:

> "Suele suceder, en matemáticas o en otras ciencias, que, dado un sistema Ω de objetos o elementos ω, cada elemento determinado ω sea reemplazado, según cierta ley, por otro determinado elemento ω' correspondiente a ω. Es habitual llamar sustitución a este acto, y se dice que ω' es el transformado de ω para esta sustitución y Ω', constituido por los ω', el trasformado de Ω. Resulta aún más cómodo decir, como lo vamos a hacer, que esta sustitución es una aplicación de Ω, que ω' es la imagen de ω, y Ω' la imagen de Ω"[39].

Dedekind comenta este pasaje en nota[40]:

> "Sobre esta capacidad del espíritu de comparar un objeto ω con otro objeto ω' o de poner ω y ω' en relación, o de poner en correspondencia ω con ω' -sin esta capacidad simplemente no habría pensamiento- reposa también, como lo mastraré en otro lugar, toda la aritmética".

Y por eso en su *Was sind und was sollen die Zahlen?* introduce la noción de "aplicación" (o lo que hoy se entiende por "función" o "aplicación funcional") dándole el sentido de Dirichlet:

> "Por aplicación φ de un sistema S entiendo una ley que *asocia* a cada elemento determinado s de S un objeto determinado que se llamará la imagen de s"[41].

Mediante esta noción Dedekind busca establecer una relación que engendre una serie, una relación que se pueda leer "precede a", del siguiente modo:

> "Sea φ una aplicación biunívoca de S en sí mismo. Si a es un elemento de S, entonces escribiremos, de acuerdo con la anterior definición de aplicación: $\varphi(a) = a'$, y si A es un subsistema [un subconjunto] de S entonces $\varphi(A) = A'$. El propósito es construir la noción de "cadena" para una aplicación φ".

Se dice que *K (Kette)*, subconjunto de *S*, es una cadena con respecto a la aplicación φ de *S* en *S*, si la imagen de *K* por φ está incluida en *K*, esto es, si $K' \subseteq K$. En simbología moderna:

$$(y)\,[(\exists x)\,(x \in K \,\&\, y = \varphi(x)) \rightarrow y \in K]$$

Sea, ahora, una parte (o un elemento)[42] de un conjunto *S* y sea φ una aplicación de *S* en sí mismo, De-

[38] *Ibidem*, p. 45-46.
[39] P. G. L. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie herausgeben von R. Dedekind*, 1879, p. 469-470.
[40] *Ibidem*, p. 470 nota.
[41] *Was sind...*, nº 21.
[42] De manera más precisa -cosa que no hace Dedekind- habría que representar el conjunto formado por el elemento **a** así: *(a)*. Y la cadena del sistema *(a)* así: $(a)_0$ en vez de A_0, como escribe Dedekind, en donde **A** unas veces es tomado como elemento y otras como conjunto.

dekind designa por a_0 a la intersección de todas las cadenas (respecto a la aplicación φ) que contienen a, y la llama "cadena propia del elemento a" o simplemente "cadena de a". La "cadena de a" constituye un objeto que posee una propiedad mínimal -es la cadena más pequeña (por ser intersección) de las que contienen a- y constituye al mismo tiempo un sistema maximal: el que se puede obtener a partir de a añadiéndole, si no las contiene ya, la imagen de a por φ, y luego la imagen de la imagen de a..., esto es, $\varphi(a)$, $\varphi[\varphi(a)]$, $\{\varphi[\varphi[\varphi(a)]]\}$,..... De modo que $a \subseteq a_0$. Por lo tanto, a_0 representa el maximum de lo que la iterativa aplicación φ permite obtener a partir de a.

A continuación, Dedekind utiliza esta noción de "la cadena de a" para formular de manera general el principio de inducción completa (del que el principio de inducción matemática deviene una especie): "59. Teorema de inducción completa. Para mostrar que la cadena a_0 es parte de un sistema Σ -sea éste último parte de S o no- es suficiente mostrar:

(1) que $a \ni \Sigma$, y

(2) que la aplicación de cada elemento común a a_0 y a Σ es, asimismo, un elemento de Σ"[43].

La demostración de este teorema es inmediata (con simbología moderna). A partir de las hipótesis:

- (1) $A \subset \Sigma$

- (2) $A_0 \cap \Sigma \rightarrow (A_0 \cap \Sigma)' \subset \Sigma$

Tenemos que:

(3) $A_0 \cap \Sigma$.....es una cadena por (2)

(4) $(A_0 \cap \Sigma)' \subset A_0 \cap \Sigma$.....por ser $A_0 \cap \Sigma$ una cadena

(5) $A_0 \subset A_0 \cap \Sigma$.....por ser A_0 la cadena más pequeña

(6) $A_0 = A_0 \cap \Sigma \subset \Sigma$.....Q. E. D.

Dedekind señala que "el teorema anterior, como luego veremos, constituye la base científica para la forma de demostración conocida con el nombre de inducción completa (la inferencia de n a $n + 1$)"[44].

Con los elementos (definiciones) anteriores tiene Dedekind la teoría mínima para fundar en ella la construcción de los números naturales; ha de dar un paso más: ha de formular una hipótesis sobre las relaciones parte-todo, mediante una plicación biunívoca; él la llama "aplicación similar" *(ahnliche abbildung)*. "Definición. Un sistema S es infinito si es similar a una parte de sí mismo...; en caso contrario S es un sistema *finito*"[45]. Dado un conjunto, o bien cabe establecer una aplicación biunívoca sobre una parte propia de sí mismo, o tal cosa no es posible. Si se da la primera situación, se trata de un conjunto infinito; si la segunda, el conjunto es finito. La bipartición de los conjuntos en finitos e infinitos es hecha, pues, mediante la noción de aplicación biunívoca. Dando un paso más, se precisa un teorema de existencia; teorema que Dedekind se cree en condiciones de demostrar: Hay al menos un conjunto infinito.

> "Teorema. Existen sistemas infinitos.
> Prueba. El mundo de mis pensamientos, i. e, la totalidad S de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento en infinita. Así, si s significa un elemento de S, entonces el pensamiento s', que s puede ser objeto de mi pensamiento, es asimismo un elemento de S"[46].

Efectivamente, la aplicación de s sobre s' es una "aplicación similar" (biunívoca) de S sobre una parte de sí mismo, y S es, por lo tanto, infinito. Dedekind añade en nota: "Una consideración análoga se encuentra en el § 13 de las *Paradoxien des Unendlichen* de Bolzano (Leipzig. 1851)". Efectivamente, como más arriba hemos visto, Bolzano adujo como ejemplo de conjunto infinito el conjunto de las proposiciones verdaderas en sí: dada una verdad, podemos enunciar otra: saber que la primera es verdad, y así suecesivamente. El proceso es el mismo en ambos autores: el infinito es producto del poder indefinido de tematización o, como escribiría Dedekind en el prefacio a la tercera edición de *Was Sind...* (1911):

> "de la potencia creadora del espíritu capaz de hacer, a partir de elementos determinados, un nuevo elemento, su sistema, que es necesariamente diferente de cada uno de esos elementos".

Pero el tipo de infinito así conseguido es un infinito virtual, no actual; el poder de tematización sólo permite afirmar un infinito definido por el orden; para conseguir un infinito actual sería preciso que el conjunto de los pensamientos de pensamientos sea parte propia del con-

[43] *Was sind...*, p. 60.
[44] *Ibidem*, p. 61.
[45] *Ibidem*, p. 63.
[46] *Ibidem*, p. 64.

junto de pensamientos actuales, y los actuales pensamientos (de Dedekind) constituyen, sin duda, un conjunto finito. Por eso este teorema de Dedekind será rechazado por los continuadores en la fundamentación de la Matemática. Russell *(Introduction to mathematical philosophy*, 1919, p. 139) dice que para que el argumento de Dedekind sea válido es preciso admitir la subsistencia de las ideas platónicas; pero es más que dudoso que existan tales ideas; por ello él se verá forzado a admitir el axioma de infinitud. Zermelo *(Foundations of set theory*, 1908, p. 204, nota)[47] rechaza, asimismo, la prueba de Dedekind: "La 'prueba' que intenta ofrecer Dedekind de este principio no puede ser satistactoria, puesto que toma como punto de partida 'el conjunto de cada cosa pensable', mientras que desde nuestro punto de vista el domino B mismo, de acuerdo con el nº 10, *no* forma un conjunto". Y, consecuentemente, Zermelo introduce en sus sistema como axioma ("axioma del infinito") la existencia de un conjunto infinito.

La siguiente noción que Dedekind introduce en su exposición es la de *conjunto simplemente infinito (einfach unendliches System)*. Pero ahora el procedimiento es distinto al seguido hasta aquí: las anteriores nociones habían sido introducidas describiéndolas en términos de la incipiente teoría de conjuntos; en cambio, la noción de "conjunto simplemente infinito" es introducida por el método axiomático, definición mediante axiomas. Así:

> "La esencia de todo sistema simplemente infinito N consiste en la existencia de una aplicación φ de N y de un elemento de base I que satisfacen:
>
> α. $N' \ni N$.
>
> β. $N = I_0$.
>
> γ. El elemento I no pertenece a N'.
>
> δ. La aplicación φ es similar".

Según esto, un conjunto simplemente infinito es un conjunto N tal que existe una aplicación biunívoca φ de N en N y con la condición de que N es una cadena propia de uno de sus elementos no pertenecientes a φ (N).

Propiedades importantes de los conjuntos simplemente infinitos son:

(I) Todo conjunto infinito contiene un conjunto simplemente infinito: basta tomar la cadena de uno de los elementos no pertenecientes a la imagen en una de las aplicaciones que transforma el conjunto en una de sus partes propias.

su imagen; y, 2) dados dos elementos cualesquiera, m y n, se da entre sus cadenas propias y sus cadenas impropias solamente una de estas dos relaciones.

$$n_0 \ni m'_0 \quad \text{ó} \quad m_0 \ni n'_0$$

La relación dada es: 1) *asimétrica* (una relación excluye la otra); 2) no reflexiva (no es posible $n_0 \ni n'_0$); 3) transitiva (si $n_0 \ni m'_0$ y $m_0 \ni p'_0$ entonces $n_0 \ni p'_0$). Es, por tanto, relación de orden: todo elemento precede a su imagen.

(III) Este orden es buen orden (para cualquier parte del conjunto sobre el que está definida esa relación de orden exite un elemento mínimo). En efecto, sea la cadena P_0 de una parte cualquiera P del conjunto. Por ser P_0 la cadena del elemento k, tenemos: $P_0 = k + k'_0$. Por tanto P contiene k (sin que la cadena de P sea k'_0) y todo elemento de P distinto de k está contenido en k'_0; por lo tanto, le sigue en el orden.

(IV) Junto con la noción de "segmento", Zn (conjunto de los elementos $\leq n$, siendo n un elemento cualquiera), puede Dedekind, en la sección VII de su libro, restablecer todas las propiedades clásicas fundamentales del orden de los números naturales: todo número m es mayor o menor que el número n; todo número posee, en el orden, un anterior y un siguiente inmediato; toda parte de un segmento posee un elemento máximo; toda parte del conjunto que no posee elemento máximo es simplemente infinito (secc. VIII); utilizando para las demostraciones el principio de inducción completa.

En la sección VIII introduce Dedekind la adición, multiplicación y potenciación de números naturales por un procedimiento llamado *definición por inducción*. Este método es originàl de Dedekind y puede ser considerado como un antecedente de la teoría de las funciones recursivas. Ofrece, primero, un teorema general que justifica tales definiciones:

> "126. Teorema de la definición por inducción: Si se da una aplicación cualquiera (similar o disimilar) θ de un sistema Ω sobre sí mismo, y también un determinado elemento ω de Ω, entonces existe solamente una aplicación Ψ de la serie de los números N que satisface las siguientes condiciones:
>
> I. $\Psi(N) \ni \Omega$

(II) Un sistema simplemente infinito está ordenado con respecto a la aplicación que lo define como tal: En efecto, 1) todo elemento es distinto de

II. $\Psi(I) = \omega$.

III. $\Psi(n') = \theta\,\Psi(n)$, donde n representa cualquier número"[48].

[47] Traducción inglesa, recogida en Heijenoort, *o. c.*

[48] *Was sind...*, pp. 85-86.

Dedekind prueba este teorema mediante el principio de inducción completa. Y, luego, se introducen las operaciones antes citadas, tomando como Ω el propio N (conjunto de los números naturales); tomando como ω, el sucesor de x, esto es S_x^c; y tomando como aplicación θ de N sobre N la función S. Resulta, entonces, que Ψ es una aplicación de N sobre N; es una función recursiva, y las ecuaciones:

II. $\Psi I = Sx$

III. $\Psi Sn = S\,\Psi(n)$

son, entonces, las ecuaciones recursivas que definen las operaciones. Por ejemplo: "la suma de los números m, n... queda totalmente determinada por las condiciones:

II. $m + 1 = m'$.

III. $m + n' = (m + n)'$"[49].

Y de modo análogo las otras operaciones. Este método de las definiciones por recurrencia encuentra también una aplicación inmediata en la teoría de grupos. Como el mismo Dedekind señala, las definiciones por recurrencia quedan fundadas sólo con respecto al conjunto simplemente infinito N (si se supone su no contradicción como sistema ordenado $I_0 = N$). Con respecto a otras cadenas, el procedimiento de definición por recurrencia desemboca, por lo general, en contradicciones. Como ejemplo de esta última situación pone Dedekind el siguiente:

Sea Ω el conjunto formado por los tres elementos distintos α, β, γ, con la aplicación θ tal que:

$$\theta(\alpha) = \beta, \quad \theta(\beta) = \gamma, \quad \theta\gamma = \alpha.$$

Y, en vez de N, tomemos el conjunto S compuesto de dos elementos distintos a y b aplicados sobre sí mismos, tal que:

$$a' = b \qquad b' = a$$

De modo que:

$$a_0 = b_0 = S$$

Resulta, ahora, imposible definir una aplicación Ψ sobre S que satisfaga las condiciones del teorema 126.

En efecto, si:

$$\Psi(a) = \alpha,$$

Por tanto, $\Psi(a) = \alpha = \gamma$, lo que constituye una inconsistencia.

En el método axiomático empleado por Dedekind, los números quedan caracterizados de manera puramente formal; son entidades formales, puesto que nada se dice sobre la naturaleza de los tres objetos (N, I, φ) que intervienen en los axiomas, excepto que se trata de un conjunto, N, de un elemento de ese conjunto, I, y de una aplicación φ definida sobre ese conjunto. En este sentido la construcción axiomática de Dedekind cumple las exigencias de la axiomática formal de la escuela hilbertiana, cuales son las de establecer estructuras sobre objetos de naturaleza no especificada. A la clase de estructuras que Dedekind ha definido con sus axiomas, la llama "clase de sistemas simplemente infinitos". Luego afirma que los números naturales son lo que queda cuando se hace abstracción de la naturaleza particular de los elementos de un conjunto simplemente infinito N cualquiera y con las relaciones establecidas por una aplicación φ que lo ordena totalmente.

> "Definición. Cuando en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado por una aplicación φ hacemos abstracción total de las particularidades de sus elementos reteniendo simplemente su distinguibilidad y tomando en cuenta sólo las relaciones establecidas entre ellos por la aplicación φ, entonces tenemos esos elementos llamados *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números*, y el elemento base I es llamado *número base* o el *número serie N*. Con respecto a este acto de desproveer a los elementos de cualquier otro contenido (abstracción) estamos autorizados a llamar a los números una creación libre de la mente humana"[50].

Según esto, Dedekind no da una definición explícita de los números, sino que ofrece una definición axiomática ("definición implícita") de una estructura que posee las propiedades esenciales de los números, siendo éstos productos de un "acto de abstracción". Mas este acto de abstracción no debe entenderse en sentido psicologista, sino como resultado de los teoremas 132 y 133, los cuales autorizan a Dedekind a colocar las estructuras definidas por sus axiomas en una clase de abstracción.

Según sostiene en los nº 32 y 33, dos conjuntos, S y R, son similares si existe una aplicación biunívoca Ψ de S sobre R. Y los conjuntos que se corresponden así biunívocamente forman una clase de abstracción; no importa cuál de ellos sean tomado como representante de la

entonces: $\Psi(b) = \beta$

y $\Psi(b' = a) = \gamma$

---

[49] *Ibidem*, p. 97.
[50] *Ibidem*, p. 68.

teorema 132 afirma que "todos los sistemas simplemente infinitos son similares a la serie de números *N*; y consecuentemente... también a cualquier otro". Es decir, todos los conjuntos dotados de una estructura de orden natural son la imagen biunívoca del conjunto *N* y también imágenes biunívocas unos de otros.

Es evidente que dos estructuras isomorfas ("sistemas similares", en términos de Dedekind) satisfacen el mismo sistema de axiomas. Lo que ya no resulta evidente ni tampoco trivial es la recíproca, expresada por el teorema 133: "todo sistema que es similar a un sistema simplemente infinito... es simplemente infinito". Esto es, el teorema 133 es el recíproco del 132 y dice que todo conjunto imagen biunívoca de un conjunto dotado de una estructura de orden natural (y por consiguiente, imagen biunívoca de *N*) está dotado de una estructura de orden natural. Mas este teorema, el 133, no queda probado, ni puede en muchos casos establecerse, porque resulta falso en esos casos que estructuras de la misma especie sean isomorfas: Por ejemplo, la estructura de grupo de Klein no es isomorfa con la estructura (también de grupo y, por tanto, que satisface los mismos axiomas) de las transformaciones del triángulo equilátero. En este caso, simplemente porque los grupos considerados son de cardinalidad diferente, y para que haya isomorfismo es condición necesaria que sus dominios tengan la misma cardinalidad (sean del mismo orden). Pero esta condición no es suficiente: el grupo de Klein, aunque del mismo orden, no es tampoco isomorfo con el grupo de rotaciones del cuadrado; en cambio, sí lo es con el grupo INRC de Piaget. (Son, éstos, ejemplos de modelos generales: las estructuras algebraicas, en este caso la de grupo, en su generalidad no son isomorfas, sólo los modelos standar son necesariamente isomorfos).

En conclusión, la situación es la siguiente: tomemos el sistema de axiomas α, β, γ, δ, al que llamamos *D* (de Dedekind), un modelo de *D* es el sistema de los números naturales, *N*. Llamemos a todo modelo isomorfo con *N* un modelo standar de *D*. Los teoremas 132 y 133 de Dedekind implican que *D* posee sólo modelos standar. Pero Skolem ha demostrado que un sistema formal para la Aritmética que posea un modelo standar posee también modelos no standar.

Apoyado en los teoremas 132 y 133, esto es, en la categoricidad de su sistema, Dedekind considera que los modelos de su sistema de axiomas forman una clase de abstracción. Pero lo que esa abstracción nos proporciona clase. Sólo le queda, pues, a Dedekind demostrar que los modelos de su sistema de axiomas son isomorfos. El

pañeros íntimos y fieles de toda la vida"[51], y esas formas constituyen el objeto de la aritmética: "Las relaciones o leyes que se infieren totalmente de las condiciones α, β, γ, δ del nº 71 y que, por lo tanto, permanecen siempre las mismas en todos los sistemas simplemente infinitos y ordenados, cualesquiera que sean los nombres dados a sus elementos, constituyen el objeto por excelencia de la *ciencia de los números* o aritmética"[52].

En conclusión: Dedekind no ofrece una definición totalmente explícita de número natural, sino una estructura de teoría de conjuntos que posee las propiedades esenciales de los números naturales. A eso llama él fundamentar la Aritmética en la Lógica. Pero será la teoría de conjuntos la que provoque la más importante "crisis de fundamentos".

4. Frege (1848-1925)

Las originales concepciones de Frege se insertan en el proceso de rigorización de la matemática, en el que tomaron parte Weiertrass, Cantor y Dedekind. Culminada la aritmetización del Análisis, queda expedita la vía para las investigaciones sobre los fundamentos de la Aritmética, y para completar, así, el proceso de rigorización del análisis matemático. Se trata ahora de trazar los límites a la validez de las pruebas matemáticas y determinar de manera precisa los conceptos básicos -"función", "continuidad", "límite", etc.- utilizados en Matemáticas. En su primera obra sobre esta materia, la *Begriffsschrift* (1879), somete Frege a consideración si los juicios aritméticos pueden ser probados apoyándose exclusivamente en leyes lógicas, o bien quedan reducidos a meros hechos de experiencia. Decidido por la 1ª opción, trata, en primer lugar, de reducir el concepto de ordenación en una serie al de secuencia lógica, para progresar, a partir de aquí, hasta el concepto de número. Y para que a lo largo de este proceso no se cuele nada intuitivo es preciso exhibir todos los pasos de la cadena de inferencias sin dejar laguna alguna, lo cual exige, a su vez, el uso de un simbolismo preciso y adecuado.

4. 1. La *Begriffsschrift*

Para satisfacer esa exigencia surge la *Begriffsschrift*, obra capital en la historia de la Lógica sólo comparable

na, no es la serie de los números enteros 1, 2, 3..., sino los números formales, "esas formas fantásticas en las que más de uno sólo reconocerá sus números, sus com-

con los *Analíticos* de Aristóteles. La *Begriffsschrift (Conceptografía)* constituye la realización del ideal leibniciano de una característica lógica. En ella es el *concep-*

[51] *Ibidem*, prefacio.
[52] *Ibidem*, p. 68.

to lo que determina la *grafía*, de modo que para poder escribir un lenguaje es preciso antes *construirlo*. Hasta entonces los lógicos habían calcado el análisis lógico sobre el análisis gramatical de los lenguajes nacionales, o bien sobre las Matemáticas (Boole), con lo que aquél quedaba reducido a éstos. El proyecto de Frege (y también el de Peano) consiste en complementar el simbolismo matemático mediante un simbolismo lógico más fundamental, aplicable fuera del dominio de la Matemática y totalmente autónomo de las particularidades y ambigüedades de los lenguajes ordinarios.

Exposición de la simbología de Frege

La simbología de Frege difiere esencialmente de la de Boole. Lo único que aproxima ambos simbolismos es el empleo de letras como variables. En la *Begriffsschrift* distingue Frege dos tipos de símbolos:

(1) letras, "que representan un número o una función aún no determinados" (las variables).

(2) símbolos como +, -, $\sqrt{\ }$, 0, 1, 2, ..., "que tienen un sentido totalmente determinado" (las constantes).

La distinción fundamental en Lógica, que no era nueva, pero que había que dejar patente en la escritura, es la que media entre contenido conceptual por una parte, y afirmación de ese contenido conceptual, mediante la cual ese contenido se convierte en una proposición (lo que Frege llama un juicio = *Urteil)*. De aquí la utilización de dos símbolos diferentes: la barra horizontal a la izquierda de la letra, —— A, representa el contenido *(Inhalt)* del juicio; representa una "mera combinación de representaciones *(Vorstellungsverbindung)* acerca de la cual no expresa, quien la escribe, si reconoce o no verdad en ella".

La barra vertical a la izquierda de la barra horizontal, ⊢—— A, significa afirmación de ese contenido de juicio; afirmación que podemos parafrasear por medio de las palabras "la circunstancia de que" o "la proposición de que".

De manera que la combinación de las dos barras (de los dos símbolos) forma el símbolo (compuesto) que representa el juicio. Así, por ejemplo, si:

⊢—— A

significa el juicio: "los polos magnéticos opuestos se

Y no todo contenido deviene un juicio por el hecho de anteponerle el símbolo de afirmación (la barra vertical); no, por ejemplo, la representación "casa". Hay que distinguir, pues, entre contenidos judicables *(beurtheilbare)* y no judicables.

En la *Begriffsschrift* no resulta pertinente la distinción tradiccional sujeto-predicado en la representación de un juicio. Cuando dos proposiciones (Por ejemplo, "en Platea derrotaron los griegos a los persas" y "en Platea fueron derrotados los persas por los griegos") tienen el mismo contenido conceptual *(begriffiche Inhalt)* no se distinguen en la escritura ideográfica. El acto de afirmación que convierte ese contenido conceptual en un juicio es siempre el mismo y se puede formular con las palabras: "es un hecho". Así, dada la proposición "Arquímedes pereció en la toma de Siracusa", tenemos: un contenido conceptual: "la muerte violenta de Arquímedes en la toma de Siracusa..."; completado con la afirmación "...es un hecho". Se puede aquí decir que el contenido conceptual es el sujeto y que la afirmación es el predicado, (un predicado igual para todos los juicios) pero no es eso lo que tradicionalmente se entiende por sujeto y predicado.

No sólo las nociones de "sujeto" y "predicado" sino también las distinciones de los juicios en categóricos, hipotéticos y disyuntivos constituyen, según Frege, categorías gramaticales, no pertinentes para una conceptografía.

Los otros símbolos que introduce Frege además del símbolo del juicio son, y le resultan suficientes para expresar toda la lógica de primer orden, los siguientes:

Una pequeña barra vertical en la parte inferior de la barra del contenido significa que el contenido no tiene lugar. Así:

significa "*A* no tiene lugar".

Una barra vertical que une las dos horizontales de contenido representa el condicional. Así:

significa "Si *B*, entonces *A*". Entendiendo el condicional en sentido de Filón de Megara (la "implicación material" que dirá luego Russell). Esto es, "Si *A* y *B* significan contenidos judicables, entonces hay las si-

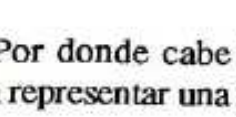
atraen", entonces:

—— A

no expresa ese juicio, sino que sirve meramente para provocar en el lector la representación de la atracción recíproca de los polos opuestos.

guientes cuatro posibilidades:

(1) *A* es afirmada y *B* es afirmada.
(2) *A* es afirmada y *B* es negada.
(3) *A* es negada y *B* es afirmada.
(4) *A* es negada y *B* es negada.



significa, pues, el juicio de que no tiene lugar la tercera de estas posibilidades, sino una de las otras tres"[53].

Estos símbolos pueden combinarse, para expresar otras formas de juicio (o, como se dice actualmente, otros funtores:

significa "A o B"

significa "A y B"

significa "ni A ni B"

Una fórmula, por ejemplo el axioma 3 de su sistema, que en simbología actual podríamos representar así: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$, exige en la simbología de Frege la siguiente forma:

Por donde cabe inferir el gran espacio necesario para representar una demostración.

Con los anteriores símbolos tiene Frege suficientes para desarrollar todo el cálculo de proposiciones. Introduce además:

- El símbolo ≡ expresa la igualdad de contenido *(Inhaltsgleichheit)*, esto es, el hecho de que dos nombres distintos tiene el mismo contenido.

"Significa, pues, que el símbolo *A* y el símbolo *B* tienen el mismo contenido conceptual, de modo que, en cualquier caso, se puede poner *B* en lugar de *A*"[54].

- *Función y argumento.* Si avanzando en el análisis lógico, queremos determinar los componentes de los juicios, tenemos, según Frege, que toda expresión se descompone en dos: "un componente estable que representa la totalidad de las relaciones, y el símbolo considerado como reemplazable por otros, que significa el objeto que se encuentra en estas relaciones. Al primer componente lo llamo función, y al último, su argumento"[55].

Según este análisis de Frege, los componentes del juicio (proposición) no son, como propugna el análisis clásico, sujeto y predicado, sino *función* y *argumento*. Función es el componente estable, pero incompleto, no saturado. Argumento es el componente variable que viene a saturar el primero y a formar con él un juicio (proposición). Así, por ejemplo, dada la proposición "El hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico", en el lugar de la palabra "hidrógeno" podemos poner la palabra "oxígeno" o "nitrógeno", o el nombre de cualquier otro gas, y de acuerdo con estas sustituciones, va variando el sentido de la proposición, pero las palabras "oxígeno", "nitrógeno", etc., mantienen con el resto de la proposición las mismas relaciones que la palabra "hidrógeno". Por lo tanto, en la proposición dada, "hidrógeno" es el argumento (representado por A) y "es más liviano que el anhídrido carbónico", la función (representada por ϕ). De manera que la proposición entera así analizada será representada como sigue:

$$\vdash\!\!\!— \phi(A)$$

Continuando el análisis en la proposición señalada, podemos distinguir, a su vez, en esta función un componente variable, a saber, "anhídrido carbónico". Tenemos entonces una nueva función Ψ, "es más liviano que ", con dos argumentos: A: "hidrógeno", y B: "anhídrido carbónico", y escribiendo la proposición así:

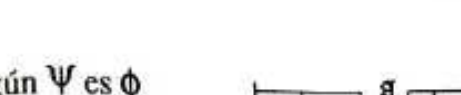
$$\vdash\!\!\!— \Psi(A, B)$$

- *La cuantificación.* En los ejemplos anteriores los

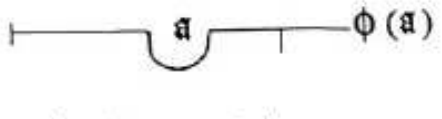
⊢— (A ≡ B)

[53] *Conceptografía*. Edic. de la trad. cast. p. 17.
[54] *Ibidem*, p. 27.
[55] *Ibidem*, p. 27-28.

indeterminado, como sucede en las proposiciones generales. Para representar una proposición general utiliza Frege una letra gótica (que representa el argumento), introducida en una cavidad en la barra de contenido, así:



"Significa el juicio de que esa función, sea lo que fuere lo que se considere como su argumento, es un hecho"[56]. Se podría leer: "Para todo 𝔞, cualquiera que sea 𝔞, ϕ (𝔞)". Esta es, pues, la forma de representar una proposición universal afirmativa. La universal negativa se representa, según esto, así:

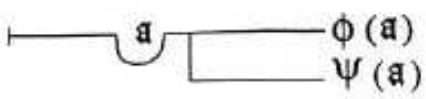


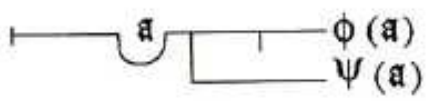
Y las particulares se obtienen por negación de las universales:

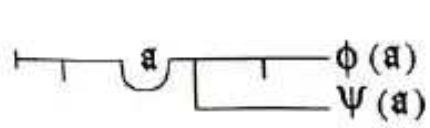
Particular afirmativa:

Y particular negativa:

Si la proposición es, no de una función, como la anterior, sino de dos funciones, ϕ y Ψ, como las proposiciones de la silogística aristotélica, entonces los cuatro tipos clásicos de proposiciones viene representados en la simbología fregeana, así:

A: Todos los Ψ son ϕ 

E: Ningún Ψ es ϕ 

I: Algún Ψ es ϕ 

argumentos estaban bien determinados, constituyendo, así, proposiciones singulares. Puede ocurrir que en una proposición el argumento esté

En donde, como puede observarse, las particulares son obtenidas negando las universales.

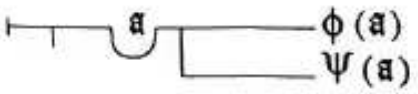
Esta simbología introducida en la *Begriffsschrift* es la que, con algunas modificaciones y añadidos, sigue utilizando Frege en sus obras posteriores.

- El símbolo de identidad ≡ introducido en la *Begreffsschrift* entre nombres es sustituido por el símbolo de igualdad =, ya que la palabra "igual a" en Aritmética tiene la misma denotación que "idéntico a". Esta modificación está motivada por la distinción que Frege hace entre sentido *(Sinn)* y denotación *(Bedeutung)* de los términos[57]. En la *Begreffsschrift*, Frege supone que la identidad, ≡, se establece entre nombres de objetos; pero una vez hecha la distinción entre sentido y denotación, expresa la identidad como sigue: "Si $a = b$, la denotación de *"b"* es la misma que la de *"a"*, y por lo tanto, también el valor veritativo de *"$a = b$"* es el mismo que el de *"$a = a$"*. Sin embargo el sentido de *"b"* puede ser distinto del sentido de *"a"*, y con ello también será el pensamiento expresado en *"$a = b$"*, distinto del expresado en *"$a = a$"*[58].

- Introduce también[59], una notación para representar el *recorrido de valores (Werthverlauf)* de una función, ya que Frege se preocupa de dejar clara la distinción entre función, recorrido de valores de una función y valor de una función. Así, en la ecuación $x^2 - 4x = x(x - 4)$ tenemos, no una función igual a otra, sino los recorridos de valores de las funciones iguales. Y si ahora queremos expresar que esa ecuación se mantiene para cualquier cosa que sea x, esto es, si queremos expresar la generalidad de esa ecuación, entonces, diremos que el recorrido de valores de función $x(x - 4)$, es igual al de la función $x^2 - 4x$; tenemos, así, una ecuación entre recorridos de valores de funciones, que Frege representa sustituyendo el símbolo del argumento por una letra griega, poniendo todo entre paréntesis, precedido de esa misma letra griega con espíritu suave. Así:

$$\text{"}\grave{\varepsilon}\,[(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon) = \grave{\alpha}\,(\alpha\,(\alpha - 4)]\text{"}$$

de manera que "$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon)$" denota el recorrido de valores de la función $\xi^2 - 4\,\xi$ y "$\grave{\alpha}\,(\alpha\,(\alpha - 4)$" denota el recorrido de valores de la función $\xi\,(\xi - 4)$. Y en general,

O: Algún Ψ no es ϕ 

"$\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$"

denota el recorrido de valores de la función $\phi(\xi)$.

---

[56] *Ibidem*, p. 31.
[57] En *über Sinn und Bedeutung* (1982), ed. cit.
[58] *Ibidem*, p. 83-84.
[59] Por primera vez en *Fuction und Bregriff* (1891). Edic. de la trad. cast. cit., p. 26.

• Otro símbolo introducido en los *Grundgesetze* (en el vol. I, 1893, § 11) es el que representa el artículo definido, que aparece en las frases descriptivas, como "el presidente del gobierno español, que convocó un referéndum sobre la OTAN". El uso de tal expresión presupone la existencia de una cosa, y sólo una, que cae bajo un concepto: "Así, asumiento que $\phi(\xi)$ sea un concepto bajo el que cae el objeto Δ, y sólo Δ, entonces— $\phi(\mathfrak{a}) = (\Delta = \mathfrak{a})$ será verdad, y consiguientemente también será verdad $\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$, de donde tendremos que:

$$(1)\ \grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon) = \Delta$$

Esto es, en caso de que $\phi(\xi)$ sea un concepto bajo el que cae un objeto, y sólo uno, "$\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$" (el recorrido de valores de la función) designa ese objeto.
En este supuesto (que bajo el concepto $\phi(\xi)$ caiga un objeto y sólo uno) es en el que se puede emplear el artículo determinado en el lenguaje ordinario, como en el ejemplo anterior. Pero ello no nos autoriza a generalizar la fórmula (1), aplicándola al supuesto en el que bajo el concepto $\phi(\xi)$ no cae un objeto y sólo uno, como por ejemplo, "el actual presidente de la república española tiene el SIDA".
Para precisar la función lógica de estos posibles usos del artículo definido introduce Frege la función $|\,\xi$ con las estipulaciones siguientes:

(1) Si al argumento corresponde un objeto Δ, tal que el argumento es $\grave{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$, entonces el valor de la función $|\,\xi$ es Δ mismo.

(2) Si al argumento no corresponde un objeto Δ, tal que el argumento es $\grave{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$, entonces el valor de la función es precisamente el argumento mismo.
Según esto, si $\phi(\xi)$ es un concepto bajo el que cae un objeto, y sólo uno, entonces $|\,\grave{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ es verdad, y "$|\,\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$" denota el objeto que cae bajo el concepto $\phi(\xi)$. En los demás casos "$|\,\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$" denota lo mismo que "$\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$".

• Finalmente, también en los *Grundgesetze*, introduce Frege la notación para representar la cuantificación de "segundo orden"[60].

- *Nombre de función de primer nivel:* Denotan funciones cuyos argumentos son objetos (o argumentos de tipo 1). Y se representan así: "$\phi(\xi)$", en donde "ξ" representa un lugar vacío para ser llenado por un nombre lógicamente propio. A las funciones de primer nivel corresponden los conceptos de primer nivel, definidos como una función de primer nivel cuyo valor para cada objeto como argumento es un valor de verdad.

- *Nombres de funciones de segundo nivel:* Denotan funciones cuyos argumentos son funciones (argumentos de tipo 2). Y se representan así: $\Omega\,\beta\,(\phi(\beta))$, en donde "$\phi$" representa un lugar vacío para ser rellenado por un nombre de función de primer nivel, y la 2^a β representa el lugar para ser rellenado por un argumento de tipo 1. A estas funciones corresponden los conceptos de 2º nivel. Ejemplos importantes de conceptos de segundo nivel son los cuantificadores y también los recorridos de valores de las funciones. Así, el cuantificador universal denota un concepto de 2º nivel, cuyo valor es la verdad si el argumento es una función de primer nivel que tiene como valor para cada argumento la verdad y cuyo valor es la falsedad si no se cumple esta última condición para esta función de primer nivel. Así el nombre:

" "

denota el valor de este concepto de 2º nivel (el cuantificador universal) para el argumento $\phi(\xi)$. De manera que son las letras góticas (la $\mathfrak{a}$ en este ejemplo) las que desempeñan el oficio de variables ligadas (por el cuantificador), pero con la particularidad de que en el esquematismo de Frege la $\mathfrak{a}$ es un componente del nombre de función de 2º nivel[61]:

" "

- *Nombres de funciones de tercer nivel:* denotan funciones cuyos argumentos son funciones de

Frege llega a esta notación a través de la distinción de tipos de funciones:

toman como argumentos conceptos de 2º nivel. Así el nombre:

" ——— $\mathfrak{f}$ ——— $\Omega_\beta f(\beta)$ "

denota el valor de un concepto de tercer nivel, representado así:

" ——— $\mathfrak{f}$ ——— $\mu\beta f(\beta)$ "

para el argumento $\Omega\beta(\phi(\beta))$ (función de 2º nivel), en donde "μ" representa lugar vacío para una función de 2º nivel, como "ϕ" lo es para una de primer nivel y como "ξ" lo es para un nombre lógicamente propio. Ej. de función de tercer nivel puede ser aquella en la que su argumento, la función de 2º nivel $\Omega\beta(\phi(\beta))$, es el concepto de 2º nivel antes considerado:

——— $\mathfrak{a}$ ——— $\phi(\mathfrak{a})$. El nombre, entonces, de este concepto de tercer nivel será:

" ——— $\mathfrak{f}$ ——— $\mathfrak{a}$ ——— $f(\mathfrak{a})$ "

y este concepto de tercer nivel tiene como valor la verdad si el argumento es una función de 2º nivel que tiene como valor la verdad para toda función de primer nivel como argumento, y tiene como valor la falsedad si no cumple esta última condición impuesta a la función de 2º nivel. También en el nombre de función tercer nivel:

" ——— $\mathfrak{f}$ ——— $\mu\beta f(\beta)$ "

la letra gótica "$\mathfrak{f}$" desempeña el oficio de variable-función ligada (por la cuantificación) de modo análogo a como la "$\mathfrak{a}$" lo hacía en la cuantificación sobre objetos. Pero, como allí la "$\mathfrak{a}$", también aquí la "$\mathfrak{f}$" forma parte de un nombre, y por sí misma no posee significación.

2º nivel. Aquí tenemos también los correspondientes conceptos de tercer nivel: aquellos que

Con esta última notación fijada en los *Grundgesetze* puede Frege acometer de manera correca su proyecto logicista de tratar los números como extensiones de conceptos. A este respecto la ley V *(Grundgesetze*, § 20) establece como ley fundamental de la ideología la sinonimia entre la identidad de recorridos de valores de funciones y generalidad de una identidad de funciones.

$$\vdash\!\!\!— (\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha)) = (\text{———}\,\mathfrak{a}\,\text{———}\; f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

Significación de la *Begriffsschrift* para la gnoseología de la Lógica

Partimos del supuesto de que la Lógica en cuanto ciencia es la Lógica Formal, y, asimismo, de que la característica de la Lógica Formal es la formalización. Formalización que consiste, no en usar símbolos de forma más o menos generalizada -cosa que se ha venido haciendo desde antiguo-, sino en conseguir un lenguaje lo suficientemente sutil y completo como para regular su propio desarrollo. Cuando el simbolismo se utiliza, no sólo para anotar los modos de inferencia, sino también para fundamentar dichos modos inferenciales. Esto se consigue por primera vez con Frege. Su *conceptografía* constituye una serie de técnicas desarrolladas para ciertos objetivos. Técnicas que se atienen a reglas generales, basadas, como él mismo afirma, en componentes de tipo estético: relaciones espaciales, superficies bidimensionales, etc. Técnicas que no son partes secundarias de la Lógica, sino que quedan integradas en ella, debido a que llegan a constituir una "metatecnología" a partir de la cual es posible reconstruir y fundamentar toda la Lógica anterior. En esto precisamente se diferencia la simbología de Frege de otras simbologías que constituyen también el estrato tecnológico de la Lógica[62].

Comparación de la simbología de Frege con la de Boole y con la de Peano

La simbología de Frege difiere profundamente de la de Boole. Esta última le resulta a Frege demasiado restringida al campo matemático y, así, cuando Schröder le

[60] Ya en la *Begriffsschrift*, aparece la cuantificación de funciones *(confert*, por ejemplo, la fórmula (76). Pero es, luego de su estudio de las funciones, cuando establece de forma estructurada los diversos tipos de cuantificación.

[61] Frege se muestra siempre reacio a emplear el término "variable" *(confert* la anotación que hace al respecto en Jourdain, *The development*... o., c. p. 238).Una letra itálica representa un objeto indeterminado, no que pueda ser aplicada a una pluralidad de objetos.

[62] Véase también E. W. Beth, *Entrañamiento semántico y derivabilidad formal*, Trad. M. Garrido y R. Beneyto. Cuadernos Teorema. Valen-

cia, 1978, p. 43: Si se ha reducido considerablemente el abismo existente entre la lógica simbólica y la tradicional se debe precisamente a técnicas nuevas (como las que el propio Beth desarrolla en esta obra), "al desarrollo de los sistemas de deducción natural, que han hecho a la lógica simbólica capaz de incorporar determinadas nociones que ya se hallaban en la lógica tradicional, pero que resultaban extrañas a la lógica simbólica en sus primeras etapas... pero hoy en día tales artificios se explican de un modo más sistemático y se analizan con mayor profundidad". Y Hasenjäger, en *Conceptos y problemas de la lógica moderna*. Trad. M. Sacristán, Labor, Barcelona 1968, p. 35: "La utilización de una escritura simbólica para exponer los silogismos es ya propia de la lógica tradicional. Pero las ventajas del simbolismo no se manifiestan sino cuando además de utilizarlo para anotar esos modos de inferencia se usa también para fundamentar dichos modos inferenciales".

objeta su desvío de la noción simbólica de Boole, Frege replica que lo que él pretende es la construcción de un lenguaje apto para el análisis del razonamiento matemático y que domine, y esté por encima de, las simbologías particulares. Sabido es que para Boole las leyes del pensamiento son formalmente idénticas a las leyes algebraicas; en consecuencia, se trata de examinar en qué medida las propiedades formales de las operaciones aritméticas son interpretables en el dominio de las proposiciones y buscar artilugios matemáticos cuando no es el caso. Así, se admiten restricciones sobre el número de elementos (0 y 1), o bien se admiten elementos ideales para expresiones no interpretables lógicamente. En cualquier caso, el aspecto principal a resaltar es el formalismo abstracto: Los símbolos "x", "y", "0", etc. constituyen símbolos inanalizados y, por otra parte, no se simboliza "para todo" y "existe un". Frege encuentra estas construcciones algebraicas demasiado formales. "sin duda -dice-[63] se tienen aquí formas lógicas, si bien no cabalmente; pero falta el contenido. Cada intento de poner aquí expresiones de contenidos, digamos ecuaciones analíticas, en lugar de simples letras indicará, por la oscuridad, lo pesado y aun la multívoco de las fórmulas correspondientes, cuán poco apropiado es este método de simbolización para la construcción de una verdadera conceptografía".

La multivocidad de un mismo signo no tiene cabida en el sistema de Frege. Y en este punto radica su discrepancia con el programa de Dedekind y Peano, así como con el de Hilbert. Frege insiste constantemente sobre la necesidad de que la relación del signo con la cosa sea unívoca, es decir, que no exista un único signo para varios objetos distintos (homonimia).

Con respecto al simbolismo de Peano, la crítica de Frege se centra en la falta de sistematización y rigor deductivo. Efectivamente, en el sistema axiomático de Peano las proposiciones que sirven de base a su aritmética son puestas como postulados, como reglas simples y evidentes. Es más, no admite que puedan ser demostrados, como hace Frege en sus *Grundgesetze*. Y los términos que contienen esos axiomas son puestos como primitivos y no definidos mediante nociones lógicas. Los términos "O", "N", "S", son multívocos, figuran en los axiomas como variables libres que pueden ser sustituidos por "cero", "número", y "sucesor", pero que, como el mismo Peano hizo notar, podrían recibir, asimismo, otras muchas interpretaciones, por ejemplo,

Ninguno de estos extremos es admisible en el sistema de Frege. En su construcción lógica de la Aitmética lo que son los enteros está fijado unívocamente. Cada signo ha de poseer una sóla denotación y un sólo sentido, o, como dice él, ha de someterse a la "ley de la univocidad". Apelando a terminología Leibniziana, Frege compara su simbología con la de Peano y con la de Boole: "La lógica boolena es lógica y nada más que lógica. Boole no se preocupa más que de la forma lógica y no de dotar a esa forma de un contenido. Tal es, al contrario, el propósito de Peano. Según esto, pues, la empresa de Peano está más próxima a mi conceptografía que la lógica de Boole. Pero , por otra parte, existe un parentesco más extrecho entre mi ideografía y la lógica de Boole, en la medida en que yo pongo el acento sobre todo en la deducción, mientras que en la lógica calculatoria de Peano este punto está más borroso. En términos Leibnizianos se podría decir: la lógica boolena es un *calculus ratiocinator* sin ser *lingua characteristica*, la lógica matemática de Peano es esencialmente una *lingua characteristica* y secundariamente un *calculus ratiocinator*, en tanto que mi conceptografía quiere ser las dos cosas a la vez y con el mismo título"[64].

Con todo, no ha sido la simbología de Frege la que se ha impuesto como lenguaje de la Lógica Formal. Y esto, creemos, no por azar, sino como muestra de la influencia que el estrato tecnológico ejerce en el desarrollo científico. La simbología de Frege, con ser lógicamente superior a la de Peano, es desbancada por esta última; aquélla es más incómoda para la impresión, exige recurrir para la simbolización de las proposiciones y sobre todo para la de los razonamientos, a dos dimensiones del folio: las líneas horizontales están reservadas a la enunciación de las proposiciones elementales; y las verticales, para las operaciones lógicas sobre esas proposiciones.

Peano, en cambio, ha de encargarse de la composición tipográfica de su obra, lo que le obliga a emplear una simbología más manejable, y, por consiguiente, penetró rápidamente entre los matemáticos, y con ciertas remodelaciones y añadidos de Russell y Whithead en los *Principia mathematica* se convirtió en el lenguaje común de la Lógica Formal. Pero la época del monolingüismo terminó pronto para los lógicos. La simbología del lógico polaco Lukasiewicz contituye un serio rival de la de Peano-Russell y todo lógico ha de ser por lo menos bilingüe. Decimos "por lo menos" porque

"1", "miembro de la sucesión, 1, 1/2, 1/4, 1/8..." y "la mitad de".

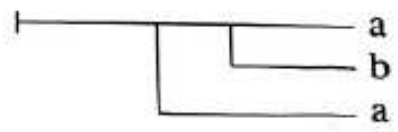
también han sido imaginadas otras simbologías. Cabe resaltar el intento de W. T. Perry[65] quien, inspirándose

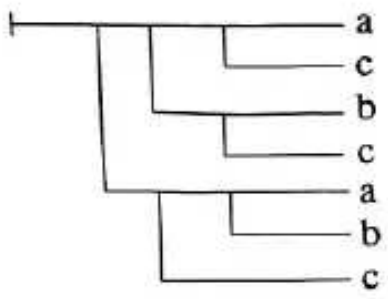
[63] *Sobre la justificación científica de una conceptografía*. Trad. Hugo Padilla, U. N. A. M., México, 1972, p. 213-214.
[64] "Über die Begriffsschrift des Hem Peano und meine eigene", *edic. cit.*, p. 370.
[65] "A new symbolism for the propositional calculus", *Journal of Symbolic logic*, 19 (1954), pp. 161-68.

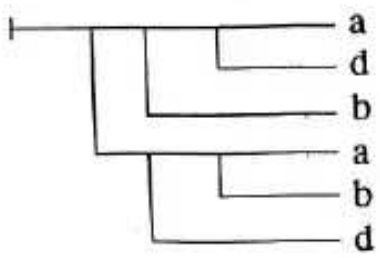
en tentativas análogas de Peirce y Lesniewski ha propuesto para el cálculo de proposiciones un simbolismo a la vez más sistemático y más intuitivo que los usuales. En el simbolismo de Russell y Lukasiewcz los símbolos parece que van cayendo uno a uno a medida de las necesidades, sin que nada indique que la lista está cerrada, sin que nada indique la conexión de cada uno con sus vecinos. Se van añadiendo unos a otros de manera anárquica al modo como en una familia prolífera se distribuyen los nombres de los hijos a medida que van llegando al mundo. El simbolismo de Perry forma un sistema cerrado y exhaustivo. Además, no sólo los 16 símbolos de funtores binarios poseen entre sí un "aire de familia", sino que la función propia y distinta de cada uno se lee en su figura. Esta simbología no posee más que un defecto, haber llegado demasiado tarde[66].

4. 2. Axiomatización de la Lógica

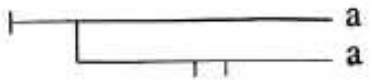
En la *Begriffsschrift* Frege se preocupa, no sólo de establecer una simbología adecuada para las nociones lógicas sobre las que poder construir los conceptos de la Aritmética, sino que, además, presenta la Lógica como un sistema deductivo en forma estrictamente axiomática. Frege, conocedor del método axiomático practicado por Euclides en la Geometría, se propone tratar la Lógica como principios del pensamiento puro, expresables mediante su simbología y conectados unos con otros mediante reglas de inferencia. Son posibles diversas selecciones del conjunto de principios que tomados como primitivos (o axiomas) permiten la derivación de otros más complicados. La selección por la que Frege se inclina contiene nueve axiomas o principios (proposiciones) indemostrables, pero simples y obvios, que, junto a las reglas de inferencia, incluyen el contenido de todas "las leyes del pensamiento". Estos nueve axiomas no van puestos al principio, sino que son introducidos a la largo de las deducciones. En simbología de Frege y con la numeración que les corresponde en su sistema son:

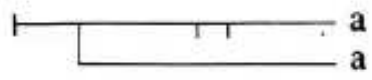
(1)


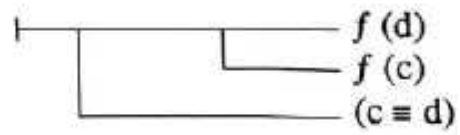
(2)


(8)


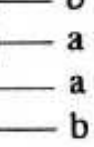
(28)

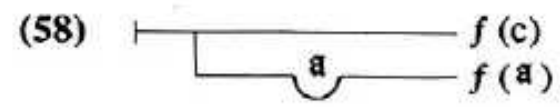
(31)


(41)


(52)


(54)





[66] *Confert* R. Blanché, *La logique et son Histoire*. Colin. París, 1970, p. 345, nota.

implicación (como el de Frege) son suficientes tres axiomas (en simbología italiana):

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. $(-p \rightarrow p) \rightarrow p$
3. $(p \rightarrow -p) \rightarrow q$

Más recientemente A. Church[75] inspirándose en Frege y en Lukassiewicz estableció que para el cálculo de proposiciones, fundado también en la negación y la implicación, los tres axiomas siguientes forman un sistema completo e independiente:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
3. $(-p \rightarrow -q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

Aunque con el "casi" de Lukasiewicz, la perfección de la lógica de proposiciones y también de la cuantificacional en *Begriffsschrift* es admirable. Supone un salto cualitativo respecto del desarrollo de la lógica de su tiempo. Respecto del álgebra de la Lógica de tradición boolena, no sólo la simbología es radicalmente distinta (cosa que Schröder en su crítica[76] reconoció), sino que, además, el tratamiento y estructuración de la Lógica y sus partes que ofrece Frege en la *Begriffsschrift* rompen el esquema del cálculo booleano, y no pueden subsumirse en él, contrariamente a la que pensaba Schröder[77]. Este afirmaba que el cálculo de los juicios de la *Begriffsschrift* con su formulación complicada, coincidía, en lo esencial, con el cálculo de las proposiciones secundarias de Boole, formulado de manera más simple, por lo que no consideraba la obra de Frege un avance en el desarrollo de la Lógica. Frege comenta[78] esta cuestión señalando con gran perspicacia la importancia, autonomía y primacía que tiene el cálculo de proposiciones, y que él le confiere, contrariamente a lo que hace Boole: "fundar el cálculo de juicios sobre el cálculo de conceptos (que es primariamente un cálculo de clases) es invertir el correcto orden las cosas, porque las clases son algo derivado, y sólo pueden obtenerse a partir de los conceptos (en mi sentido). Pero los conceptos son algo primitivo, de lo que no se puede prescindir en lógica. Sólo podemos determinar una clase cuando damos las propiedades que un objeto debe tener para pertenecer a la clase. Mas esas propiedades son las características *(Merkmale)* de un concepto. Definimos un concepto y a través de él pasamos a la clase. Por esta razón el cálculo con clases ha de fundarse en el cálculo con conceptos. Y el cálculo con conceptos está, a su vez, fundado en el cálculo con valores de verdad (que resulta más apropiado que decir 'cálculo de juicios')".

Frege, en la *Begriffsschrift*, no sólo restablece el orden realmente correspondiente a los diversos cálculos lógicos, concediendo la primacía al cálculo de proposiciones, sino que, además, con su análisis de las expresiones en "función" y "argumento", consigue una reestructuración de los conceptos específicos de la Lógica. Elimina, aunque lo recoge en una nueva reorganización, el análisis clásico de la proposición en sujeto-predicado. Con su análisis desaparece, por una parte, la yuxtaposición entre la lógica de inherencia (lógica de predicados) y la de relaciones; y, por otra parte, la distinción entre conceptos y juicios. Tenemos ahora, según el esquema de Frege:

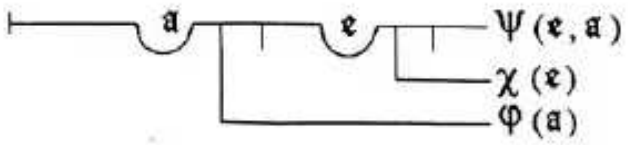
(1) *Conceptos:* Conjunto de funciones de un argumento cuyo valor es siempre un valor veritativo; y

(2) *Relaciones:* Conjunto de funciones de dos o más argumentos cuyo valor es siempre un valor veritativo.

Conceptos y Relaciones son funciones que tienen como referencia la verdad y la falsedad.

Finalmente, también a través de su noción de función llega Frege a la teoría de la cuantificación en sentido moderno, que difiere esencialmente de la cuantificación clásica; ésta recae sobre el "sujeto" el cual, en el análisis de Frege, es una función, mientras que la cuantificación de Frege, base de la lógica moderna, recae sobre el argumento, y permite un análisis más profundo de las proposiciones. Por ejemplo: la cuantificación múltiple. Así, Frege puede precisar las distintas funciones, argumentos y cuantificadores en la proposición

"Todos los políticos tienen algún adulador":



[75] A. Church, *Introduction to mathematical logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1956, p. 119.
[76] Recensión de la *Begriffsschrift* de Frege, en *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25 (1880), pp. 81-94
[77] *Ibidem*, p. 87.
[78] En notas al trabajo sobre la obra de Frege debido a F. E. B. Jourdain, "The development of the theories of mathematical Logic and the principles of Mathematic", *edic. cit.*, p. 252. Jourdain envió el manuscrito de este trabajo a Frege, en 1910, y éste hizo una serie de anotaciones que Jourdain incorpora en notas en la publicación del mismo en 1912.

mientras que el análisis clásico sólo permitirá clasificarla entre las universales. El análisis de Frege va aún más allá: le permite no sólo establecer la cuantificación múltiple, como en el caso anterior, sino precisar también la cuantificación de "segundo orden" (cuantificación de funciones), requisito para una adecuada formalización de la Aritmética. Por ejemplo, en el principio de inducción matemática, es una propiedad (una función) la que se cuantifica, y asimismo la definición que de él da Frege *(Begriffsschrift*, § 24): "la propiedad *F* es hereditaria en la serie *f*". Esta definición desempeña precisamente un papel fundamental (ver luego) en el intento de Frege de reducir la inducción matemática a inferencia lógica, constituye, asimismo, una muestra de cómo su proyecto logicista -reducción de la Aritmética a la Lógica- ha estimulado sus investigaciones lógicas, que han situado a la Lógica en un nivel superior respecto de la lógica tradicional y del álgebra de la lógica.

4. 3. Proyecto logicista

En la *Begriffsschrift* nace la lógica formal moderna en forma de sistema deductivo-axiomático y con una perfección casi absoluta por lo que respecta al cálculo de proposiciones, núcleo y fundamento de la Lógica Formal. Pero Frege compuso la *Begriffsschrift*, no como una obra en sí de Lógica, sino como un instrumento intelectual que le dejase el camino expedito para resolver un problema epistemológico: ¿Es deducible la Aritmética elemental a partir de la Lógica?:

> "La aritmética ha sido el punto de partida del curso de pensamiento que me ha conducido a mi conceptografía. A esta ciencia, por tanto, pensé aplicarla primero, tratando de analizar más sus conceptos y de fundamentar más a fondo sus teoremas"[79].

Ahora bien, la respuesta a la pregunta anterior viene condicionada por la concepción de la naturaleza de la Aritmética y de la naturaleza de la Lógica. Y la concepción de Frege sobre la naturaleza de la Matemática queda configurada principalmente por oposición a la concepticón de Kant (y también de otros: psicologistas y formalistas), fuertemente arraigada en la filosofía matemática del siglo XIX.

Crítica de Frege a Kant

Las críticas de Frege a la tesis central de Kant -los juicios de la Matemática (Geometría y Aritmética) son sintéticos *a priori*- son las siguientes:

La división que hace Kant de los juicios en analíticos y sintéticos no es exhaustiva[80]. Recordemos que para Kant los juicios *analíticos* ("todos los cuerpos son extensos", por ejemplo) son aquellos en los que el predicado está incluido en el sujeto (según la interpretación extensional de la proposición), o bien (formulación intensional): aquellos en los que el sujeto implica o connota el atributo. Como ya anteriormente había señalado Bolzano (ver *supra)*, Frege observa que la definición kantiana de "analítico" es demasiado estrecha; sólo es aplicable a las proposiciones de la forma sujeto-predicado; no cubre otros tipos de proposiciones, reconocidas en la lógica moderna y que no son de la forma sujeto-predicado, como las proposiciones existenciales que Frege señala, tales como $(\exists x)Px$, en donde no se puede hablar de un concepto de sujeto absoluto. Y ¿qué será la proposición $(p \,\&\, -p) \rightarrow q$?, ya que Kant añade que los juicios analíticos son explicativos, por cuanto que analizan un concepto en conceptos parciales o notas; y así, "todos los cuerpos son extensos" es analítico porque (se supone que) el concepto de extensión figura entre las notas del concepto de cuerpo. Pero tal explicación no se adecúa a la proposición señalada. Se hace necesario, pues, establecer una definición de analiticidad que, correspondiendo a las originales intenciones de Kant[81], pueda cubrir los otros tipos de proposiciones (juicios) además de los de la forma de sujeto-predicado.

En realidad, Frege extrae su noción de analiticidad de Kant y entroncando con la tradición, que se remonta a Aristóteles. Este[82] compara el proceso de deliberación con el *análisis geométrico* y el proceso de actuar tras la deliberación con la *síntesis geométrica*. De ahí que se den dos direcciones del razonamiento: 1) el sentido u orden directo que, según Aristóteles, es el de la naturaleza de las cosas (τῷ ὄντι) y 2) el sentido u orden inverso, el de nuestro conocimiento (πρός ἡμᾶς). Según este criterio direccional, se procede *analíticamente* cuando se siguen relaciones de consecuencia lógica (o consecuencia causal) en una dirección opuesta al orden de premisas a conclusión o de causa a efecto, mientras que

gada en la filosofía matemática del siglo XIX.

efecto, mientras que se procede *sintéticamente* cuando

---

[79] *Begriffsschrift* , edic. de la trad. cast. cit., pág. 11.

[80] *Fundamentos de la aritmética*, edic. cit., pág. 111-112, § 88.

[81] En *Fundamentos de la Aritmética*, § 3, edic. cit., pág. 27, nota, declara Frege expresamente sobre la noción de "analítico" :"no quiero introducir un nuevo sentido, sino referirme sólo a lo que han querido decir autores anteriores, Kant en especial".

[82] *Etica a Nicómaco*, III, 3, 112b, 11-24; *Metafísica*, IX, 9, 1051a, 21.

se las sigue en su dirección normal. Así, para Pappus de Alejandría[83], "en el análisis, supuesto ya efectuado lo que buscamos, consideramos de qué antecedente es esto una consecuencia; luego, de nuevo, cuál es el antecedente de éste último; y así hasta que retrocediendo de esta manera llegamos a algo ya conocido y tenido por principio. A este procedimiento se denomina *análisis*, es decir, solución a la inversa". La palabra "análisis" significa literalmente *resolución*, y en virtud del dualismo que la une a "síntesis" toma ésta última el sentido de *progresión*, frente a la *regresión* que efectúa el análisis. Sólo tardíamente emplearon los griegos las palabra σύνθεσις para expresar las síntesis con sentido opuesto a análisis; para esto estaba la palabra ἀποδεῖξις (demostración). Y de ahí que las dos palabras -"demostración" y "síntesis"- hayan sido frecuentemente utilizadas como intercambiables. Por ejemplo, Zabarella opone así el método demostrativo al método resolutivo: "El proceso científico va, bien de la causa al efecto, bien del efecto a la causa; aquél es el método demostrativo, éste el resolutivo..."[84].

Este criterio direccional (progresión-regresión) es el que tradicionalmente ha quedado asociado a la Lógica, desde Pappus hasta Kant. Este, en sus *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik...* (1783), § 5, nota, sigue este concepto tradicional de análisis: "El método analítico, como opuesto al sintético, es completamente distinto a un conjunto de proposiciones analíticas; significa sólo que se parte de lo que es buscado como si fuese dado, y que se asciende a las condiciones bajo las que es posible. En esta marcha se sirve uno a menudo de simples proposiciones sintéticas, como el análisis matemático, por ejemplo; podríamos llamarlo con más exactitud *método regresivo*, para distinguirle del método sintético o *progresivo*".

Frege recoge este sentido tradicional de "analítico" que lo asocia a deducción: para él serán analíticos los juicios (proposiciones) obtenidos mediante una deducción en un lenguaje formalizado a partir de principios generales y, por lo tanto, lógicos. El problema de determinar si un juicio es analítico equivale a "encontrar la prueba (del juicio) y retrotraerlo hasta las verdades originarias. Si por este camino llega a leyes lógicas generales y a definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, para lo cual se presupone que también se toman en consideración los enunciados en los que se basa la admisibilidad de una definición. Si, por el contrario, no es posible llevar a término la prueba sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético"[85].

En esta definición de analiciticidad no se apela ya a las relaciones de comprehensión entre los conceptos (sujeto-predicado) que intervienen en el juicio. Lo analítico equivale a lo que hoy en día se entiende por demostrable: una proposición es análitica si se deduce de los principios lógicos y de las definiciones.

Las proposiciones analíticas así entendidas son también verdades *a priori:* Una verdad es *a priori*, "si es posible llevar a cabo la prueba partiendo de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas"[86].

Kant, en opinión de Frege, "subestimó claramente el valor de los juicios analíticos, si bien parece que también barruntó el concepto más amplio aquí utilizado"[87]. La subestimación de Kant consiste en considerar que los juicios analíticos son meramente explicativos y, puesto que para él la esencia del método matemático consistía en la construcción, esto es, en la introducción de elementos particulares (los números) en cuanto distintos de los conceptos generales, por eso reclama para esa construcción el carácter de sintética. Frege, en cambio, amplía el concepto de analiticidad y, según ese carácter ampliado, proclama que los juicios de la Aritmética son *analíticos* y *a priori*.

En que son *a priori* sigue de acuerdo con Kant. Pero el desacuerdo se produce al explicar por qué lo son. Y aquí aparece la 2ª crítica fuerte de Frege a Kant: B) Kant arguye[88] que los enunciados matemáticos son siempre juicios *a priori* y no empíricos, "porque traen consigo necesidad, la cual no puede ser tomada de la experiencia". Y luego arguye que el juicio *"7 + 5 = 12"* es sintético porque del mero análisis del concepto de la unificación de 7 y 5 no podemos obtener el concepto 12. Por lo tanto los juicios matemáticos no están basados en el análisis de conceptos, introducen elementos (individuos) distintos de los conceptos y, sin embargo, siguen siendo *a priori*, por no sacar su carácter de necesarios de la experiencia. Para explicar esta peculiar situación de los juicios matemáticos acude Kant a la noción de intuición:

[83] En su libro VII de sus *Colecciones matemáticas*.
[84] *De methodis*, III, 17.
[85] *Fundamentos de la Aritmética*, § 3, edic. cit., pág. 27.
[86] *Fundamentos de la Aritmética*, § 3, edic. cit., pág. 27.
[87] *Fundamentos de la Aritmética*, § 88, pág. 111.
[88] *Prolegomena*. § 2.

"Intuición" significa para Kant "sensibilidad":

> "Por la índole de nuestra naturaleza, la intución no puede ser más que sensible, de tal suerte que sólo contiene la manera como somos afectados por los objetos"[89].

Y la intuición contiene no sólo una *materia*, proveniente de la cosa que está siendo intuida, sino también una *forma* suplida por la *mente*. "Hay dos formas puras de intuición sensible que sirven como principios *a priori* del conocimiento, a saber, espacio y tiempo". Con estas dos formas colocamos, en nuestro proceso cognoscitivo, todas las cosas en un espacio y en un tiempo. Aplicando ahora esta doctrina a las Matemáticas, nos encontramos, según Kant, con que "todo conocimiento matemático tiene esta peculiaridad: debe, primero, exhibir sus conceptos *en la intuición*, y hacerlo así *a priori;* en una intuición que no es empírica, sino pura; sin esto las matemáticas no pueden dar un paso"[90]. Así, en el caso de la Aritmética procedemos contando; un proceso que lleva tiempo pero que necesita además intuiciones espaciales (dedos o puntos). En el juicio *"7 + 5 = 12"*, "el concepto de 12 no es, en modo alguno, pensado sencillamente porque yo piense la reunión de 7 y 5, y, por largo tiempo que analice el concepto de una suma posible, no encontraré el concepto 12. Se debe pasar más allá de este concepto, tomando por ayuda la intuición que corresponde a uno de los dos; por ejemplo, los cinco dedos, o (como Segner en su Aritmética) cinco puntos y así sucesivamente, tomando por ayuda y añadiendo las unidades del número cinco dado en la intución al concepto de siete"[91].

Frege critica esta explicación de Kant que necesita recurrir a la noción de intuición para asegurar el carácter de *a priori* a los juicios matemáticos. Para Frege lo esencial del apriorismo reside, no en la materia de la intuición (en que los dedos o los puntos nos sean dados intuitivamente en el proceso de contar), sino en su forma. Porque la explicación de Kant, aunque plausible para los números pequeños, resulta obviamente inadecuada para los grandes números. Frege cambia el ejemplo de Kant, *"7 + 5 = 12"*, por este otro: *"135.664 + 37.863 = 173.527"*. Aquí no vale la explicación ofrecida por Kant, porque "la intuición de 37.863 dedos no es, en cualquier caso, una intuición pura. La expresión "intuición" tampoco parece apropiada, pues ya sólo 10 dedos, según las posiciones relativas que ocupen entre sí, pueden producir las más diversas intuiciones... Es manifiesto que Kant pensaba sólo en números pequeños"[92].

Este argumento de Frege contra la intuición kantiana es llamado "el argumento de los grandes números"[93] ...Sobre él vuelve Frege al final de los *Fundamentos:*

> "Debo también contradecir la universalidad de la afirmación de Kant: la de que sin la sensibilidad no nos sería dado ningún objeto. El cero, el uno, son objetos que no nos pueden venir dados por los sentidos. Incluso aquéllos que consideran intuitivos los números pequeños deberán conceder que no les puede venir dado intuitivamente ninguno de los números mayores que $1000^{1000^{1000}}$, y acerca de los cuales, no obstante, sabemos bastantes cosas"[94].

Por lo tanto, aunque resulte plausible argüir, como hizo Kant, que las ecuaciones aritméticas con números pequeños están basadas en la intuición, junto con operaciones simples de contar, ello no es posible en el caso de los grandes números. En casos como éste hay que dejar la intuición y echar mano de esquemas teóricos (sistemas de numeración, notación, reglas, etc.). Por lo tanto, Frege seguirá manteniendo el carácter apriorístico de los juicios matemáticos, pero sin apelar para ello a la intuición. Los juicios de la aritmética son *a priori*[95] porque son analíticos en el sentido en que Frege entiende "analítico".

Crítica de Frege al empirismo de Mill

Las consideraciones de Mill sobre la naturaleza de la Matemática han de entenderse como comprendiendo ésta la Geometría y la Aritmética. Frente a la concepción kantiana de los axiomas de Euclides como verdades *a priori* defiende Mill su carácter experimental: tales axiomas son "verdades experimentales; generalizaciones a partir de la experiencia".

> "La proposición, dos líneas rectas no pueden encerrar un espacio -o en otras palabras, dos líneas rectas que se cortan una vez no se cortan de nuevo, sino

[89] *Crítica de la razón pura*, A, 51; B, 75.
[90] *Prolegomena*, § 7.
[91] *Prolegomena*, § 2.
[92] *Fundamentos de la Aritmética*, § 5, p. 29-30.
[93] D. A Gillies: *Frege, Dedekind, and Peano on The Foundations of Arithmetics*. Van Gorcum, Assen, 1982, p. 17.
[94] *Fundamentos de la Aritmética*, § 89, p. 112-113.
[95] Frege, no obstante, está de acuerdo con Kant en que las verdades de la geometría son sintéticas y *a priori*. Confert *Fundamentos de la Aritmética*, § 89, pág. 113.

> que continúan divergiendo-, en una inducción a partir de la evidencia de nuestros sentidos"[96].

Por lo tanto, la verdad de los axiomas se basa, no como defiende Kant en una especie de intuición *a priori*, sino en la observación y en la experiencia; la verdad de estos axiomas es, por lo tanto, *a posteriori*. No poseen, pues, como dice Kant esa "necesidad que no puede ser tomada de la experiencia". Tal necesidad es una mera ilusión psicológica, motivada por el hecho de que tales proposiciones se basan, bien el experiencia familiar, bien en un viejo y familiar hábito de pensar[97]. Y lo mismo vale decir de las leyes de la Aritmética: "no son verdades *a priori*, sino verdades experimentales"[98]. Así, por ejemplo, la proposición *"2 + 2 = 4"* está basada sobre un número de hechos que pueden ser verificados por el experimento y las observaciones tales como las siguientes: si cuento dos manzanas y las pongo en una caja vacía, y cuento luego otras dos manzanas y las pongo también en esa caja, entonces, si cuento las manzanas de la caja obtendré el cuatro. Las leyes de la Aritmética son, pues, simples generalizaciones inductivas a partir de hechos observados; "su verdad nos es conocida por la primitiva y constante experiencia, es verdad inductiva; y tales verdades constituyen el fundamento de la ciencia de los Números. Las verdades fundamentales de esta ciencia reposan todas sobre la evidencia del sentido; son probadas mostrando a nuestros ojos y a nuestros dedos que cualquier número de objetos dados, diez bolas, por ejemplo, pueden por separación y reordenamiento exhibir a nuestros sentidos todos los diferentes conjuntos de números cuya suma es igual a diez"[99]. Añade Mill que las ecuaciones matemáticas pueden ser consideradas como definiciones; por ejemplo, la ecuación *"3 = 2 + 1"* puede ser considerada como la definición del número tres; pero tales definiciones dependen, en realidad, de hechos empíricos que son establecidos por experiencia e inducción.

El desacuerdo de Frege con Mill respecto de esta filosofía de la matemática es total. El método que se sigue de la filosofía de la matemática de Mill le parece a Frege totalmente "opuesto a un procedimiento racional y, en todo caso, no puede ser más antimatemático. No es de extrañar que los matemáticos no quieran saber nada de todo esto"[100]. Los argumentos de Frege contra esta "aritmética de tarta de nueces o, de guijarros"[101] son los siguientes:

(A) El primer argumento contra Mill es el de los grandes números, como hizo contra Kant. Como éste, Mill pone como ejemplo de ecuación aritmética *"2 + 1 = 3"* y sobre ese ejemplo arguye que las ecuaciones artiméticas son aserciones sobre hechos empíricos observados. Pero si cambiamos el ejemplo anterior por éste otro: *"999.999 + 1 = 1.000.000"* ¿dónde observar este hecho, esta descomposición de tal colección de cosas? De manera que, si bien resulta plausible arguir, como hace Mill, que las ecuaciones con números pequeños, tales como *"2 + 1 = 3"* ó *"2 + 2 = 4"*, pueden ser verificadas experimentalmente contando manzanas o guijarros, la tesis de Mill no se sostiene para las ecuaciones con grandes números, porque

> "¿Qué hay en el mundo que puede ser el hecho observado o, como Mill también dice, el hecho físico que se afirma en el definición del número 777.864?... La concepción de Mill conduce necesariamente a la exigencia de que, para cada número, se observe especialmente un hecho, porque en una ley general se perdería justamente lo peculiar del número 1.000.000, que pertenece necesariamente a su definición. En efecto, según Mill, no deberá ponerse *1.000.000 = 999.999 + 1* si no se hubiese observado precisamente este modo peculiar de descomposición de una colección de cosas"[102].

Ciertamente en el caso de los grandes números no es posible satisfacer la exigencia que impone la concepción de Mill de observar hechos físicos en los que aparecen configuraciones de objetos de colecciones tan elevadas. Pero Frege rechaza la caracterización de Mill de los números (mediante este tipo de definiciones) en general: no sólo para los grandes números, sino también para los pequeños como *"3 = 2 + 1"*:

> "Es verdad que no se debe definir 3 como (2 + 1), si previamente no se ha asociado a (2 + 1) algún sentido. Pero la cuestión es saber si para ello es necesario observar esa colección y su descomposición. El número 0 sería entonces enigmático; pues hasta ahora nadie ha visto o tocado cero guijarros"[103].

(B) Frege disiente frontalmente del empirismo de Mill que concibe los números como configuraciones

[96] *A system of logic*, libro II, cap. 5, § 4.
[97] *A system of logic*, libro II, cap. 5, § 5.
[98] *Ibidem*, libro II, cap. 6, § 1.
[99] *Ibidem*, libro II, cap. 6, § 2.
[100] *Fundamentos de la Aritmética*. Introducción, p. 18.
[101] *Ibidem*.
[102] *Fundamentos de la Aritmética*, § 7, pp. 32-33.
[103] *Ibidem*, p. 33, § 8.

de objetos físicos que impresionan los sentidos con las imágenes de unas u otras descomposiciones de colecciones dadas. Y de ahí parte su segundo argumento contra el empirismo. De acuerdo con la concepción de Mill, no habría números de los objetos no físicos. Si los números se basan en hechos físicos ¿qué hechos están en la base del número 0? Si el número 3 queda definido por la observación de un hecho -existen configuraciones de objetos, que impresionan los sentidos con la imagen $^{o\,o}_{o}$ o con la imagen ooo-, entonces, replica Frege "de ahí se desprende que, en realidad, es incorrecto hablar de tres campanadas cuando en el reloj dan las tres, o decir que dulce, ácido y amargo son tres sensaciones de gusto; tampoco hay que admitir la expresión "tres modos de resolución de una ecuación"; pues en ninguno de estos casos se tiene una impresión sensible como la de $^{o\,o}_{o}$"[104]. Los números no pueden ser aplicables únicamente a objetos físicos. Primero, porque un objeto físico, la baraja, por ejemplo, tiene un grosor, pero no es un número definido, por más que quepa preguntar ¿cuántas cartas tiene? ¿cuántos palos tiene? ¿cuántos comodines tiene? La respuesta (el número) a cada pregunta será diferente, pese a que tenemos el mismo objeto físico; ninguno de esos números puede ser atribuido al objeto físico en cuanto tal.

Segundo, porque los números 0 y 1 son respuestas posibles, lo mismo que 2, ó 5, a la pregunta ¿cuántos? Así, cuando decimos que el número de satélites de Venus es 0, aplicamos correctamente el 0. Debemos, pues, considerarlo como número, y, sin embargo, no es una propiedad física: no hay un objeto físico que sea nada. Y cuando decimos que el número de satélites de la Tierra es 1, entonces "uno" no se ascribe propiamente a la Luna (que puede ser considerada como "muchas" moléculas), sino al concepto "satélite de la Tierra".

Y tercero, porque la adición de números no es adición física. Quienes entienden, como Mill, que el número 3 consta de 3 unidades puestas juntas, están simplemente jugando con la palabra "unidad". El signo "+" no expresa, como entiende Mill, las relaciones de las partes de un cuerpo físico o de un montón respecto de la totalidad. " *'5 + 2 = 7'* no significa que si se vierten sobre 5 volúmenes de un líquido 2 volúmenes del mismo, se obtienen 7 volúmenes de líquido, sino que esto es una aplicación del primer enunciado, aplicación que se cumple únicamente cuando no aparece una modificación del volumen a consecuencia de un fenómeno químico, por ejemplo"[105]. La adición puede aparecer en algunas aplicaciones que corresponden a la formación de un montón; como también en otras en las que no puede hablarse de montones o relaciones de cuerpos físicos: en el cálculo de sucesos, por ejemplo; pero de por sí no corresponde a una relación física, y, "en consecuencia, las leyes generales de la adición tampoco pueden ser leyes naturales"[106].

(C) Frege achaca esta errónea concepción de Mill a una confusión: "Mill confunde siempre las aplicaciones que se puede hacer de un enunciado aritmético, las cuales, frecuentemente, son físicas y presuponen hechos observados, con el enunciado puramente matemático mismo"[107].

(D) Y, finalmente, Frege se apresura a cerrar la posible escapatoria del empirista. Este, aun admitiendo que las leyes de la Aritmética son aplicables tanto a objetos físicos como a los no físicos, y concediendo, asimismo que no son leyes naturales, puede, no obstante, seguir manteniendo que son verdades inductivas, verdades generales obtenidas a partir de hechos experimentales. Pero esto, según Frege, no es posible, porque la inducción depende de la probabilidad, y ésta de la Aritmética; de manera que sucederá, más bien, a la inversa de lo que propugna el empirismo:

> "el procedimiento mismo de la inducción sólo puede justificarse mediante leyes generales de la artimética, si es que por inducción no se entiende un simple hábito... La inducción debe basarse en la teoría de la probabilidad, porque nunca puede hacer a un enunciado más que probable. No se ve, sin embargo, la manera cómo esta teoría podría desarrollarse sin presuponer leyes aritméticas"[108].

Con estos argumentos rechaza Fregue la caracterización empirista de la Aritmética.

Crítica de Frege al formalismo

Como el mismo Frege reconoce[109], bajo el nombre de "teorías formales" se hallan dos concepciones de la Aritmética: la primera -la suya- afirma que todos los enunciados aritméticos pueden ser deducidos a partir de

[104] *Fundamentos de la Aritmética*, § 7, p. 32.
[105] *Fundamentos de la Aritmética*, § 9, p. 35.
[106] *Ibidem*, p. 36.
[107] *Ibidem*, p, 35
[108] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 38.
[109] *Über formale Theorien der Aritmetik*, en *Kleine Schriften*, ed. cit., p. 103.

nio de objetos y lo verdadero. Por lo tanto todo conjunto de conceptos ha de tener un dominio de objetos que lo verifica. Y si al conjunto de conceptos dado añadimos nuevos conceptos, hay que asegurarse de que el nuevo conjunto tiene un nuevo dominio veritativo. En términos más actuales: el sistema formal ha de tener un modelo (El formalismo pretende investigar únicamente las reglas del sistema, con independencia de los objetos a los que se aplican).

En los *Grundgesetze* (vol. II, 1903, § 88) vuelve Frege a atacar el formalismo expresado ahora por J. Thomae al comienzo de su *Elementare Therorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen* (1898) en los siguientes términos:

> "La concepción formal de la aritmética acepta límites más modestos que la concepción lógica. No se pregunta qué son o qué deben ser los números, sino qué se exige de ellos en la Aritmética. Para el formalista, la aritmética es un juego con signos que se dicen vacíos. Esto significa que no poseen otro contenido (en el juego calculatorio) que el que les es asignado por su comportamiento con respecto a ciertas reglas de combinación (reglas de juego). El jugador de ajedrez hace un uso similar de sus piezas..."

Frege critica *in extenso (Grundgesetze* II, §§ 86-137) el formalismo de Thomae. Entre los múltiples argumentos que aduce están los que ya hemos visto expuestos en los *Fundamentos*. El núcleo de la tesis formalista consiste en considerar la Aritmética como un juego, el del ajederez, por ejemplo, con figuras desprovistas de significado y que sirven meramente de etiquetas, a las que pueden aplicarse reglas arbitrarias y fijadas de antemano. El argumento central de Frege contra esta tesis es que los formalistas olvidan la diferencia entre una teoría del juego y el juego mismo:

> "Los movimientos del juego tienen lugar según las reglas; pero las reglas no son objeto del juego, sino fundamentos de la teoría del juego. Los movimientos del juego de ajedrez tienen lugar según las reglas; pero ninguna posición de las figuras del ajedrez, ni ningún movimiento, expresa una regla; la función de las figuras en un juego de ajedrez, no es en modo alguno representar algo, sino ser movidas según reglas"[116].

Según esto, también en la aritmética formal, la fórmula $a + a' = a' + a$ ha de ser considerada, no como un objeto del juego, sino como una de las reglas que constituyen la base de la teoría del juego. El juego puede reducirse a una manipulación de figuras o trazos desprovistos de significado, pero la teoría del juego -en este caso la teoría de la Aritmética- no puede formularse sin auténticos signos: signos con contenido. Las actuales reglas de la Aritmética -que constituyen la base de su teoría- están basadas sobre el significado de signos, y este significado no es otra cosa, según Frege, que el contenido de esa ciencia. La Aritmética (y la Matemática en general) es una ciencia y no un mero juego que se desarrolla, según reglas arbitrarias, con trazos desprovistos de significado.

Otra vez más tenemos a Frege polemizando con los formalistas; en ésta ocasión con personajes cuyo alto prestigio dificultaba la crítica dirigida ahora a la axiomática formal.

A propósito de los *Grundlagen der Geometrie* (1899) de Hilbert aparecen unos artículos e intercambio de cartas entre Frege y Hilbert y Korselt (éste último defendiendo la posición de Hilbert)[117]. La crítica de Frege a Hilbert se centra, en primer lugar, en la noción de "axioma" empleada por Hilbert. Que los axiomas de Hilbert, en la citada obra, constituyen definiciones implícitas es, cuando menos, según Frege, un abuso del lenguaje y, por lo tanto, una idea que debe rechazarse.

Frege está de acuerdo con Hilbert (y con Peano) en la no admisión del procedimiento que consiste en definir mediante circunloquios los elementos primitivos, tales como "punto", "recta", etc. Pero las soluciones por él propuestas son completamente diferentes.

Frege reconoce que resulta *de facto* indispensable la admisión de elementos primitivos (como forma de evitar el *regressus ad infinitum)*. Hay que dejar de definir en alguna parte, pero incluso en tal caso es necesario garantizar que por el mismo término o el mismo signo entendamos todos la misma consa. Una vez que los sabios se hayan puesto de acuerdo sobre estos elementos primitivos y sobre sus denotaciones, el acuerdo sobre las nociones compuestas será fácil gracias a las definiciones. Pero, para los elementos primitivos mismos, el recurso a las definiciones está fuera de lugar y obligado es adoptar otro procedimiento. Este procedimiento lo denomina Frege "explicación" *(Erlänterung)*.

[116] *Grundgesetze* II, § 107.

[117] Frege, dos artículos en 1903: *"Über die Grundlagen der Geometrie"*. Hilbert, Carta a Frege (1903).
Frege, carta a Hilbert (1903).
Korselt. Respuesta a Frege *"Über die Grundlagen der Geometrie"*. (1903).
Frege. Tres artículos. Respuesta a Korselt *"Über die Grundlagen der Geometrie"*. (1906).
Estos escritos están recogidos en Frege, *Kleine Schriften*, edic. I. Angelelli, 1967, cit. Véase J. Mosterín, "La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático", en *Teorema*, X (1980), pp. 287-306.

Según esto, resulta abusivo decir que los axiomas de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilberte son definiciones y que los términos que designan los elementos primitivos pueden ser considerados, desde el punto de vista lógico, como variables libres. Dice Hilbert que pudo haber escrito "silla", "mesa" y "vaso" en lugar de "punto", "recta" y "plano". Precisamente en esta formalización reside, según el, el paso de la axiomática "intuitiva" a la axiomática "formal". Pero, según Frege, al ser los axiomas aserciones, las frases encargadas de expresarlos han de estar saturadas: no deben contener ningún término desconocido, porque, si no es así, no expresarían una proposición. Por lo tanto, los axiomas no pueden contener variables libres y la denotación de los términos primitivos ha de haber sido fijada previamente, tarea encomendada por Frege a las *Erlänterungen*.

Para Frege, una ley fundamental de los signos es que estos han de poseer -cuando no son sincategoremáticos- un sólo sentido y una sola referencia. "La obligación más alta que la Lógica puede exigir respetar a una lengua o a un simbolismo material es el principio de la univocidad del signo". Este principio es el que pretenden violar Hilbert y Korselt, al afirmar que a un sistema de fórmulas corresponde una pluralidad de interpretaciones, lo que significa admitir la posibilidad de que los signos que figuran en esas fórmulas o los signos en general tengan múltiples denotaciones y múltiples sentidos [multivocidad *(Vieldeutigkeit)* de los signos]. Podría pensarse -dice Frege- que el uso de las letras en Matemáticas confirman la multivocidad de los signos. Pero es completamente falso pensar que el enunciado:

$$(a + b) \,.\, c = (a \,.\, c) + (b \,.\, c) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

expresa proposiciones *(Gedanken)* diversas, entre las que se encontraría la correspondiente al enunciado:

$$(2 + 3) \,.\, 4 = (2 \,.\, 4) + (3 \,.\, 4) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II},$$

porque el primer enunciado no expresa más que una sola proposición, que difiere de la expresada por el segundo. No menos erróneo será creer que a denota tanto el número 2 como otro número o varios simultáneamente. Todo objeto está determinado; la idea de objeto indeterminado es contradictoria. Así, en:

$$x \geq 0$$

x no denota un objeto indeterminado; la expresión entera designa un concepto: el número positivo, y x es un lugar vacío para los objetos -cada uno perfectamente determinado- que caen bajo el concepto. Por lo tanto, según Hilbert, hablar de la multivocidad de los signos específicos de la teoría constituye un abuso del lenguaje y, en último extremo, una incorrección.

De igual modo, las deducciones formales efectuadas a partir de estos axiomas son fantasmas de deducciones, desembocando en sombras de teoremas: los axiomas, los teoremas y las etapas intermedias no son más que enunciado impropios, porque las variables libres que figuran en los axiomas no pueden eliminarse a lo largo del trayecto.

Reconstrucción lógica de la Aritmética

En las críticas antes expuestas que Frege hace a las teorías de la Aritmética ha ido aflorando su propia teoría configurada por las respuestas que da a a las siguientes preguntas: ¿Qué son los números?, ¿Qué son las leyes de la Aritmética? ¿Qué relación guarda la Aritmética con la Lógica?

En la parte IV de los *Fundamentos* Frege elabora la definición de número *cardinal* valiéndose de las nociones previamente delimitadas, tales como "función", "objeto", "concepto", "extensión de un concepto",... Utilizaremos (y expondremos ahora) las nociones indispensables para llegar directamente a la definción de número que ofrece Frege.

A) *Nociones previas*

-Función y objeto. El punto de partida es la noción de "función". La noción de "función" había sido ampliada ya, como hemos visto, por Dirichlet, a quien siguen Riemann, Hankel, y Dedekind. Sin embargo, Frege no está de acuerdo con el sentido que le da Dirichlet (correspondencia entre clases de objetos cualesquiera -no restringidas a clases de números-), porque la clase es algo derivado:

> "la clase es algo derivado mientras, que en el concepto -tal como yo entiendo la palabra- tenemos algo primitivo"[118].

No cabe, pues, determinar la noción de "función" a partir de la noción de "clase". La noción de "función" (lógica) es, como la de "objeto", primitiva, indefinible; constituye, junto con la de "objeto", el conjunto de términos primitivos. Porque Frege, como Peano, considera que hay nociones primitivas indefinibles:

> "no se puede exigir que todo sea definido, del mismo modo como no se puede exigir del químico que des-

lugar vacío para los objetos -cada uno perfectamente determinado- que caen bajo ese concepto.

Por lo tanto, por lo que respecta a los axiomas de

componga todas las sustancias. Lo que es simple no puede ser descompuesto, y lo que es lógicamente simple no puede ser propiamente definido"[119].

---

[118] En anotaciones a Jourdain, *op. c.*, p. 251.
[119] Über Begriff und Gegenstand", en *Estudios sobre Semántica*, ed. cit., p. 100.

Las nociones simples del sistema de Frege, aparte de los sincategoremáticos, funtores, cuantificadores, y descriptor, son: "objeto" y "función"; nociones contrapuestas, complementarias y paralelas.

1) Son contrapuestas: "los objetos se oponen a las funciones"[120] y "objeto es todo lo que no es función, la expresión de lo cual, por tanto, no lleva consigo un lugar vacío"[121]. Entre los objetos coloca Frege a: los números, los valores de verdad, los recorridos de las funciones y las extensiones de los conceptos.
2) Son complementarias: como ya había indicado en la *Begriffsschrift*, en cualquier enunciado no todos sus miembros deben estar saturados o cerrados porque de lo contrario no podrían adherirse los unos a los otros. Las funciones son insaturadas pero sirven de "cemento" para unir los otros constituyentes que sí son saturados.
3) Son paralelas: paralelismo que aparece en el tratamiento y distinciones a que son sometidos. Así, están los nombres de objetos y los nombres de funciones. Los nombres de objetos son los nombres (lógicamente) propios, los únicos que denotan objetos: "llamo nombre propio o nombre de objeto a todo signo que denote un objeto, sea dicho signo simple o complejo. Pero no llamo nombre propio o nombre de objeto a un signo que no hace más que denotar un objeto de una manera ambigua"[122]; ejemplos de nombres propios simples: "Venus", "9", "Alejandro Magno"; ejemplos de nombres propios complejos: "9^2", "el padre de Alejandro Magno".

Para Frege no hay "nombre común"[123]: todo nombre, que verdaderamente lo sea, denota un objeto, y los nombres comunes, al no denotar un objeto, no pueden ser nombres (propios o complejos); serán expresiones funcionales (nombres de funciones).

Y, en virtud precisamente del paralelismo señalado, así como hay nombres de objetos, también hay nombres de funciones; y así como los primeros denotan objetos, así también los segundos denotan funciones. Las funciones -dice Frege-[124] son las "denotaciones" *(Bedeutungen)* de los nombres de funciones (o expresiones funcionales). Y usa al respecto explícitamente el término "denotación" *(Bedeutung)*. Pero como, por otra parte, (especialmente en "Über sinn und Bedeuntung") usa el término "denota" *(bedeutet)* para expresar la relación entre un nombre propio y un objeto, y el término "denotación" *(Bedeutung)* para hablar del objeto nombrado por nombre propio, no aparece claro cómo puede decirse luego que las funciones (precisamente lo que no son objetos) son las *denotaciones* de los nombres de funciones. Esa falta de claridad es el precio que hay que pagar por mantener el paralelismo: y, así, en vez de tratar de distinguir sentidos en el uso que Frege hace de *Bedeutung*, mejor es mantener que, según Frege, hay dos maneras en que los nombres tienen denotación. Unos nombres (los "nombres propios", los "nombres complejos") tienen una denotación "saturada": los objetos éstos son "auto-subsistentes" *(selbst-ständing)* y "saturados": *(gesättigt)*[125]. Y los otros nombres (los nombres de funciones, los "nombres incompletos") tienen una denotación "insaturada": las funciones. Una función está falta de compleción *(ergänzungsbedürftig)*, y es insaturada *(ungesättigt)*[126].

Quedan, pues, como nociones lógicamente primitivas e irreductibles en el sistema de Frege: "función" y "objeto". Estas nociones no son definibles; sólo pueden ser explicadas o indicadas, una a partir de la otra. Así, "es objeto todo lo que no es función", y "lo que llamo objeto no puede ser explicado exactamente más que con respecto a los conceptos o las relaciones"[127] (esto es, respecto de las funciones).

La noción de "función", así entendida, es más amplia que la noción clásica, matemática. En primer lugar, queda ampliado el círculo de lo que puede aparecer como función (parte no saturada del enunciado), así, a los signos +, -,: (operadores) que sirven para la formación de una expresión funcional, Frege añade signos como =, <, >, y también otros del lenguaje ordinario como "el padre de" "la capital de"[128]. En segundo lugar, queda ampliado el círculo de lo que puede ser admitido como argumento de la función. Ese círculo "debe ser extendido a objetos en general"[129]: Objetos son los números, que aparecen como argu-

[120] *Grundgesetze*, I, § 2.
[121] "Function und Begriff", en *Estudios sobre Semántica*, ed. cit., p. 34.
[122] *Grundgesetze*, I, § 26.
[123] *Fundamentos*, § 47, p. 60.
[124] *Grundgesetze*, I, § 29-31.
[125] *Grundgesetze*, I, § 2.
[126] *Ibidem*, § 1.
[127] "Function und Begriff", *ed. cit.*, p. 34.
[128] *Confert* "Function und Begriff", cit.
[129] *Grundgesetze*, I, § 2.

mentos en las siguientes expresiones: "$2^2 = 4$", "$2 > 1$", pero también lo son "Alejandro Magno" e "Imperio Alemán", en las frases: "el padre de Alejandro Magno" y "la capital del Imperio Alemán".

Y, en tercer lugar, queda ampliado el círculo de lo que puede aparecer como valor de una función: "el dominio de los valores de las funciones no puede quedar restringido a los números. Porque si tomo como argumentos de la función $\xi^2 = 4$ sucesivamente los números 0, 1, 2, 3, entonces no obtengo números (como valores).

Las expresiones "$0^2 = 4$", "$1^2 = 4$", "$2^2 = 4$", "$3^2 = 4$", son expresiones de pensamientos: algunos verdaderos, algunos falsos. Lo cual se expresa así: "el valor de la función $\xi^2 = 4$ es, bien el valor veritativo verdad, bien el valor veritativo de la falsedad"[130]. El valor de una función es "aquello en lo que se convierte la función al ser completada por su argumento"[131]. Así, por ejemplo, "3" es el valor de la función "$2\,x^2 + x$" para el argumento "1"; "Berlín" es el valor de la función "la capital de x" para su argumento "imperio alemán"; y el valor veritativo "verdad" es el valor de la función "$\xi^2 = 4$" para el argumento "2". A partir de esta noción de "función" progresa Frege hacia otras distinciones y otras nociones.

-Recorrido de valores (Werthverlauf) de una función:

El recorrido de valores de una función es una *clase:* la clase de los pares ordenados (x, y) tales que y es el valor de la función ...ξ... para el argumento x. El recorrido de valores de la función $\phi(\xi)$ se representa así:

$$\grave{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon).$$

Por ejemplo, dada la función $x^2 - 2$, su recorrido de valores se representa así: $\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 2)$. Y esto denota, según la definición que hemos dado, la clase que contiene los pares ordenados tales como (0, -2), (1, -1), (2, 2), (3, 7), (4, 14),...

De manera que el recorrido de valores es una clase; pero no una clase de elementos, como lo es el rango (de argumentos) de una función, determinado por el abstractor (el ∋ de Peano o el ^ de Russell). La noción fregeana de "recorrido de valores" de una función resulta una noción difícil de tratar en su relación con otras, entre otros motivos porque dará lugar a inconsistencias (a través de la ley V de los *Grundgesetze*). cisión sobre lo que es el recorrido de valores de una función", y acaba así: "hemos precisado el recorrido de valores en la medida en que es posible". Otra dificultad para la intelección de esta noción es que para Frege el funtor que forma el recorrido de valores de una función es un funtor primitivo, y no derivado o definido en términos de clases. Ciertamente ese dicho funtor determina una clase (de pares ordenados), pero no está definido en términos de clase (por esa manía que Frege tenía a la noción de clase). Prescindiendo de esta manía, el recorrido de valores podría ser definido en términos de clases, según antes hemos indicado, como el grafo de la función entre la clase de los argumentos (los x) y la clase de los valores (los y) de la función dada. Ese grafo (G) es, a su vez, una clase que consta de los pares (x, y), esto es $(x, y) \in G$. Así definido, el recorrido de valores de Frege, difiere de lo que actualmente se entiende por *rango* de una función. El rango (de valores) de la función f es la clase de los objetos y tales que hay un objeto x tal que $f(x) = y$.

-Concepto.

Frege obtiene la noción de "concepto" *(Begriff)* a partir de la noción de función: "Un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo"[132]. Entendiéndose que tal función lo es de *un* argumento. Un concepto es representado por una expresión o "término conceptual" *(Bregriffswort)*.

Si tiene *dos*, entonces es una *relación*. Conceptos y ralaciones poseen la misma naturaleza lógica. son funciones y, como tales, se oponen a los objetos y tienen un recorrido de valores o extensión. Concepto es, según Frege, una función de un argumento cuyo valor es siempre un valor veritativo. Ejemplos: "$\xi^2 = 4$", "ξ es número primo", "ξ es europeo". Y relación es una función de dos argumentos cuyo valor es siempre un valor veritativo. Ejemplos: "$\xi > \zeta$" , "ξ es descendiente de ζ", "ξ sigue inmediatamente a ζ".

Así como, en el sistema de Frege, hay un nombre de función, también está el nombre de concepto o "término conceptual" *(Begriffswort)*. Y así como los conceptos constituyen una especie (son casos particulares) de funciones, así también los "términos conceptuales" (o expresiones conceptuales) son casos particulares de nombres de funciones (o expresiones funcionales). Y así como las funciones son las denotaciones

Frege da vueltas a esta noción varias veces (por ejemplo: el § 10 de los *Grundgesetze* se titula "Nueva pre-

de los nombres de funciones, así también los conceptos son las denotaciones de los términos conceptuales,

[130] *Grundgesetze*, I, § 2.
[131] "Function und Begriff", *ed. cit.*, pág. 23.
[132] "Function und Begriff", *ed. cit.*, p. 31, y *Grundgesetze*, I, § 3.

siendo éstos, en el lenguaje ordinario, "los nombres comunes", o las expresiones que pueden hacer de predicado en un enunciado: "El concepto ... es predicativo. O sea, es la referencia de un predicado gramatical"[133]. También ahora la denotación de los términos conceptuales ha de entenderse correctamente.

Un término conceptual (de primer nivel) es un caso particular de nombre de función de primer nivel, de un argumento. Y Frege dice explícitamente bajo qué circunstancias tiene denotación un tal nombre de función.

> "Un nombre de función de primer nivel de argumento tiene una *denotación (denota* algo, es *denotativa)* si el nombre propio que resulta para este nombre de función, al ser ocupada su plaza de argumento por un nombre propio, tiene siempre una denotación si el nombre sustituido denota algo"[134].

Bajo estas condiciones, pues, un término conceptual tiene como denotación un concepto, aunque no denota un objeto, como sí hace un nombre (lógicamente) propio. Y en esto difiere el "término conceptual" de Frege del "nombre común" del lenguaje ordinario, entendido como término general predicable de múltiples individuos (objetos). El término conceptual de Frege no denota un objeto, denota un concepto[135] y el concepto, en cuanto función, es en el sistema de Frege lo que no es objeto; es lo insaturado.

La noción de "concepto" de Frege difiere, pues, sustancialmente de la noción clásica[136]. El concepto no denota objeto porque no es nombre ni tampoco un objeto "abstracto" ni siquiera en el sentido que se habla de los universales. Que un objeto cae bajo un concepto de primer nivel significa, según Frege, que, al ser rellenada la plaza argumental del término conceptual (que denota al concepto dado) por el nombre propio que denota el objeto en cuestión, obtenemos una expresión (de proposición) que denota la verdad. Esto es, un objeto *a* cae bajo el concepto ϕ (ξ) si ϕ (*a*) es una proposición verdadera. Ej: el objeto *2* cae bajo el concepto *raíz cuadrada de 4* porque "$2^2 = 4$" es una expresión de una proposición que denota la verdad. En cambio, el objeto *3* no cae bajo el concepto de *raíz cuadrada de cuatro* porque la expresión "$3^2 = 4$" no denota una verdad.

Hay que distinguir estas tres relaciones:

(1) Un objeto cae bajo un concepto de primer nivel, por ejemplo: *a* cae bajo el concepto *es una letra de la palabra "Roma"*.

(2) Un concepto cae bajo un concepto de nivel superior. "Por ejemplo, si se reúnen bajo un concepto todos los conceptos bajo los que sólo cae *un* objeto, entonces la unicidad es una característica de este concepto. Bajo este concepto caería, por ejemplo, el concepto *luna de la tierra*, pero no el cuerpo celeste u objeto que lleva este nombre. De este modo se puede hacer caer un concepto bajo otro superior"[137].

(3) Un concepto está subordinado a otro[138]. Ej. El concepto *triángulo rectángulo* está subordinado al concepto *triángulo*.

Esta última relación, en sí y respecto de las demás, se entenderá mejor exponiendo la distinción que Frege hace[139] entre "propiedad" y "característica".

Un concepto está constituido por notas o características *(Merkmale)* que describen las propiedades de los objetos que caen bajo ese concepto. Hay que distinguir entre proopiedad y característica[140], según el campo de la relación que establece:

> "ϕ es una propiedad de Γ" es sólo otra manera de decir "Γ cae bajo el concepto ϕ"

> "Cuando el objeto Γ tiene las propiedades ϕ, χ y Ψ, puedo reunir éstas en Ω, de manera que sea lo mismo decir Γ tiene la propiedad Ω, o bien decir Γ tiene las propiedades ϕ, χ y Ψ. A ϕ, χ y Ψ las denomino caraterísticas del concepto Ω y asimismo propiedades de Γ. Está claro que la relación de ϕ con Γ es completamente distinta de la que tiene con Ω, y que por eso se ofrece una denominación distinta. Γ cae bajo

[133] "Über Begriff und Gengenstand", *ed. cit.*, p. 101.
[134] *Grundgesetze*, § 29 y § 31.
[135] *Fundamentos*, § 37, p. 64: "(Leibniz) al llamar "uno" a cada uno de los objetos que caen bajo el concepto de unidad, no designa con esta palabra el objeto individual, sino el concepto bajo el cual todos ellos caen". Y § 47, p. 74: "la palabra

"ballena" no denomina a ningún ser individual".

136 Frege mismo fue consciente de ello: "El concepto y la relación son los fundamentos sobre los que levanto mi construcción" *(Grundgesetze,* I, § 0.)

137 *Fundamentos,* § 53. p. 78. Y en "Über Begriff und Gegenstand", *ed. cit.*, p. 112: "La relación de un objeto con un concepto de primer nivel bajo el cual cae es diferente, aunque parecida, a la relación de un concepto de primer nivel con un concepto de segundo nivel. Quizá se prodría decir, para dar cuenta tanto de la diferencia como de la semejanza, que un objeto cae *bajo* un concepto de primer nivel, y que un concepto cae *en* un concepto de segundo nivel".

138 *Ibidem:* "No hay que confundir esta relación (un concepto cae bajo otro) con la de subordinación".

139 *Fundamentos,* § 53. p. 77.

140 *Grundgesetze,* introdc.,p. XIV.

> el concepto ϕ; pero Ω, que es también un concepto, no puede caer bajo el concepto de primer orden ϕ, sino que sólo podría estar en semejante relación con un concepto de segundo orden. En cambio, Ω está subordinado a ϕ"[141].

Ejemplo: el concepto *número positivo menor que 10* está consituido por las características: *ser un número positivo, ser un número entero, ser un número menor que 10.* Estas son, a su vez, propiedades del objeto 2 (objeto que cae bajo dicho concepto). El concepto *número positivo menor que 10* no es ni positivo ni número entero ni es menor que 10. Sí está subordinado al concepto *número positivo*, pero no cae bajo éste.

La distinción entre propiedades y características, en el sentido indicado, resulta fundamental. El vicio de la prueba ontológica consiste, según Frege[142], precisamente en no haber tenido en cuenta esa distinción, introduciendo entre las características constitutivas del concepto *Dios* la supuesta propiedad de subsumir un individuo y uno solo. Ni la unicidad, ni la existencia son características del concepto *Dios*. La unidad y la existencia son propiedades de un concepto de primer nivel y caraterísticas de un concepto de segundo nivel, pero no son propiedades de objetos (individuos) ni características de un concepto de primer nivel.

Según esto, también el concepto puede tener propiedades[143]: éstas sirven para formar nuevos conceptos (de nivel superior), por cuanto que los constituyen en cuanto características determinantes. Así, Frege llega a la existencia o propiedad de un concepto en el sentido siguiente: En el enunciado "hay por lo menos una raíz cuadrada de 4", no se afirma nada del objeto 2, sino del concepto *raíz cuadrada de 4*, y se dice que éste no es vacío. "En este sentido la existencia es análoga al número. La afirmación de la existencia, no es, en efecto, sino la negación del número cero"[144]. Pero si ahora expresamos el mismo pensamiento así: "El concepto *raíz cuadrada de cuatro* es satisfecho", tenemos aquí que la expresión "el concepto *raíz cuadrada de 4*" constituye el nombre, no de un concepto, sino de un objeto, de lo que se afirma algo. En la primera expresión la afirmación (la afirmación de existencia) lo era de un concepto, en la segunda expresión la afirmación lo es de un objeto. Y lo que se afirma del objeto no es lo mismo que se afirma del concepto. Lo esencial a tener en cuenta es, pues, que una aserción adecuada para el concepto no lo es para el objeto. En la primera expresión, la afirmación (afirmación de existencia) es adecuada para un concepto, pero no para un objeto; y por eso resulta imposible sustituir en ella "una raíz cuadrada de 4" (nombre de un concepto) por "el concepto raíz cuadrada de 4" (nombre de un objeto)[145].

-Tipos de conceptos

Atendiendo a los componentes antes señalados de los conceptos (propiedades y características) cabe distinguir tres tipos de conceptos[146]:

(A) Aquellos conceptos en los que la propiedad que describe la característica no individualiza lo que cae bajo el concepto considerado, ej: el concepto *lo rojo*. "Podemos descomponer lo que cae bajo el concepto *lo rojo* de diversas maneras, sin que las partes dejen de caer bajo este concepto. A semejante concepto no le corresponde ningún número finito"[147]. Por ejemplo, este pétalo de la rosa y éste otro son rojos y la rosa (reunión de pétalos rojos) también es roja: cada elemento (pétalo), cada reunión de elementos y todo el conjunto caen bajo el concepto *lo rojo*. A tales conceptos se les suele llamar, tradicionalmente, "cualidades"; son incapaces de individualizar a los objetos que las poseen; a tales conceptos no se les puede atribuir ningún número, porque su extensión no está determinada cardinalmente; por lo que no cumplen el "principio de la delimitación estricta" *(Grundsatz der Vollständigkeit)*, en virtud del cual debe poderse decir para cualquier objeto si cae o no bajo el concepto considerado. Los conceptos de este tipo lo son en el sentido trivial, no resultan útiles para las consideracions de Frege, por lo que no los toma en consideración.

(B) Conceptos en los que la propiedad descrita por la característica individualiza aquello que cae bajo el concepto considerado. Ejs. *letra de la palabra "dos"*. Este concepto "delimita la *d* frente a la *o*, y a ésta frente a la *s*. El concepto *sílaba de la palabra "dos"* saca la palabra como un todo, que es indivisible, en el sentido de

[141] "Über Begriff und Gegenstand", ed. cit. p. 113.
[142] *Fundamentos*, § 53, p. 77
[143] *Ibidem*.
[144] *Ibidem*, § 53, p. 77.
[145] *Confert* "Über Begriff und Gegenstand", cit., p. 11.
[146] Confert *Fundamentos*, § 54, p. 78.
[147] *Ibidem*.

que las partes ya no caen bajo el concepto *sílaba de la palabra "dos"*[148]. Los conceptos de este tipo sí cumplen el principio de delimitación estricta: el concepto delimita claramente objetos que caen bajo él y no admite en ellos ninguna división arbitraria. A estos objetos así delimitados, que son distintos entre sí, Frege los llama *unidades* y corresponden a lo que tradicionalmente se llamaba *especies*.

(C) Como antes hemos dicho, también los conceptos pueden tener propiedades. Cabe, pues, atribuir a varios conceptos una propiedad común, con lo que estos conceptos caen (están reunidos) bajo un concepto de nivel superior, cuya característica determinante describe la propiedad considerada. El ejemplo que Frege (ya mencionado antes) pone es aquel según el cual si se reúnen bajo un concepto (de nivel 2) todos los conceptos (de nivel 1) bajo los que sólo cae *un* objeto, entonces la unicidad es una característica del concepto de nivel 2 que describe la propiedad de los conceptos de nivel 1 considerados.

Frege utiliza para su construcción lógica de la Aritmética los conceptos de tipo B y de tipo C. Estos le resultan necesarios y suficientes.

-Extensión de un concepto.

Los conceptos son una especie de las funciones. Paralelamente las extensiones de los conceptos son una especie de los recorridos de valores de las funciones. Hemos visto más arriba qué entiende Frege por recorrido de valores de una función. A partir de ahí, "cuando se trata de funciones cuyo valor es siempre un valor veritativo se puede decir, en vez de "recorrido de valores de la función", más bien "extensión del concepto"[149]. Según esto y lo que antes dijimos a propósito del recorrido de valores de una función, la extensión de un concepto puede quedar definida en términos de clases como: la clase de los pares (x, y) tal que y es el valor veritativo de los x que caen bajo el concepto ...ξ... Por ejemplo:

$$"\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 4)"$$

denota la extensión del concepto *raíz cuadrada de 4*, esto es, denota la clase de pares ordenados, tales como (-2, verdad) (0, falsedad) (1, falsedad) (2, verdad) (3, falsedad).....

La extensión de un concepto, como también lo es el recorrido de valores de una función, es un objeto. La extensión de un concepto no es la denotación del término conceptual, (como tampoco el recorrido de valores es la denotación de la expresión funcional); la denotación del término conceptual es el concepto, (y la denotación de la expresión funcional es la función). El problema en la concepción de Frege está ahora en determinar la conexión entre la función y su recorrido de valores; entre el concepto y su extensión[150]. Un recorrido de valores es un objeto, una clase, que viene determinado, para la función, por el valor que la función tiene para cada objeto como argumento. Así, se dice que, si dos funciones cuyos valores para cada argumento son los mismos, entonces determinan el mismo recorrido de valores; y recíprocamente: si dos funciones determinan el mismo recorrido de valores, entonces tienen los mismos valores para cada argumento. Estas dos implicaciones componen la coimplicación expresada en la básica ley V de los *Grundgesetze:*

$$\vdash\!\!\!- (\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\frown\!\!\!\!\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

de modo paralelo, la extensión $\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$ del concepto $\phi(\xi)$ es también un objeto (una clase)[151] que viene determinado por el valor veritativo para cada objeto x de los que caen bajo el concepto $\phi(\xi)$. Y también, dados dos conceptos, si bajo cada uno de ellos caen los mismos objetos, se dice que tienen la misma extensión, y recíprocamente. Esto es, la ley V permite identificar las extensiones si los casos de verdad de los conceptos son los mismos, y recíprocamente.

Pero el punto a señalar en la teoría de Frege, es éste: el recorrido de valores de la función y la extensión del concepto son objetos. Estos objetos no son las denotaciones de las funciones y de los conceptos. Si:

$$" \overset{\mathfrak{a}}{\frown\!\!\!\!\smile} \phi(\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a}) "$$

[148] *Ibidem*, § 54, p. 78.

[149] *Grundgesetze*, I, § 3.

[150] Frege intenta una y otra vez, precisar la noción "extensión de un concepto", pero acaba confesando: "no tenemos otra solución que la de ver en las extensiones de conceptos o clases, objetos en el sentido propio y pleno de la palabra, aun concediendo que el modo como interpretamos la expresión "extensión de un concepto" debería ser justificada". *(Grundgesetze*, II, apéndice, p. 256).

[151] "Sólo con dificultad me decidí a introducir clases (o extensiones de conceptos), porque la materia no me parece bastante segura". (Frege, en anotaciones a Jourdain, *o. c.*, p. 251.

denota la verdad, entonces cabe inferir:

$$"\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)"$$

denota lo mismo que:

$$"\dot{\varepsilon}\,\Psi(\varepsilon)"$$

pero no cabe inferir que:

$$\phi(\xi) = \Psi(\xi)$$

Esto significa que las funciones pueden diferir, aun cuando sus recorridos de valores coincidan. Y, asimismo, "los conceptos pueden tener la misma extensión sin coincidir"[152]. Por ejemplo, cuando escribimos:

$$(\xi^2 - 4\,\xi) = \xi\,(\xi - 4)$$

no igualamos una función a otra, sino, solamente los valores de las funciones entre sí (lo que permite igualar, en virtud de la ley V, los recorridos de valores de ambas funciones). Para percatarse de esta diferencia hay que distinguir entre sentido y referencia.

-Sentido (Sinn) y denotación (Bedeutung) de los nombres:

En la *Begriffsschrift* un signo "A" "está en lugar de" o "representa" un "contenido"; y, así, "A ≡ B" expresa las circunstancia de que el signo "A" y el signo "B" mantienen la relación de "igualdad de contenido" *(Inhaltsgleichheit)* de manera que los signos "A" y "B" son reemplazables entre sí. Aquí la noción de "contenido" viene a significar lo mismo que "significado".

En "Function und Begriff" (1891) y más detalladamente en "Über Sinn und Bedeutung" (1892) establece Frege la distinción entre "denotación" y "sentido", pero aplicada exclusivamente a los nombres (lógicamente) propios: "A un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la denotación *(Bedeutung)* del signo, va unido lo que yo quisiera denominar el sentido *(Sinn)* del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse"[153]. La denotación de un nombre propio es el objeto mismo que designamos con él; el sentido de un nombre propio es el modo de darse el objeto designado por él. También hay que distinguir de la denotación y del sentido de un signo (nombre propio) la representación *(Vorstellung)* a él asociada: las imágenes internas formadas a partir de recuerdos de impresiones sensibles y de actividades. La representación es subjetiva: la representación de uno no es la representación de otro. De ahí las diferencias esenciales que existen entre las representaciones de distintos hombres. Pero el sentido de un nombre propio no es subjetivo, pues es aquello que puede ser compartido por muchos hombres, es decir, es una parte, o un modo, común de la representación. Y la denotación de un nombre propio es el objeto mismo que designamos con él. Las representaciones que tenemos de él son totalmente subjetivas; entre ambas se halla el sentido, que ciertamente ya no es subjetivo como la representación, pero, con todo, tampoco es el objeto mismo"[154].

Ejemplo: en un triángulo no equilátero las bisectrices se cortan en el punto A (incentro), y las medianas se cortan en el punto B (baricentro). "Incentro" y "baricentro" tienen, entonces, distintos sentidos y también distintas denotaciones: el punto A y el punto B respectivamente.

Pero si tomamos un triángulo equilátero, tenemos que las bisectrices y las medianas se cortan en el mismo punto C. Ahora "incentro" y "baricentro" tienen sentidos distintos, pero idéntica denotación: el punto C.

La distinción entre sentido y denotación de los nombres cobra importancia cuando se aplica a los nombres (lógicamente) propios complejos (no simples como "incentro" o baricentro"). El "principio de intercambio" establece que la denotación y el sentido de los nombres complejos son funciones de las denotaciones y los sentidos de sus nombres constituyentes.

Así: la sustitución en un nombre complejo, de un nombre constituyente por otro nombre poseyendo la misma denotación no altera la denotación del todo; y la sustitución, en un nombre complejo, de un nombre simple por otro nombre poseyendo el mismo sentido no altera el sentido del todo. Resulta difícil determinar cuándo dos nombres tienen el mismo sentido; Frege no ofrece un criterio para decidirlo[155]. Sólo exhibe ejemplos para distinguir el sentido de la denotación. Determinar la denotación en cuanto distinta del sentido, sí que resulta fundamental en el sistema de Frege.

En primer lugar, le permite dar cuenta de manera correcta de la identidad, que una vez hecha la distinción en-

presentación es subjetiva, en tanto que la denotación y

tre sentido y denotación, representa por el signo "=", en

[152] *Fundamentos*, § 69, nota 13, ed. cit., p. 92.
[153] "Über Sinn und Bedeutung", ed. cit., p. 51.
[154] *Ibidem*, p. 55.
[155] Véase a Church, "A formulation of the logic of sense and denotation", en Henle, Kallen y Langer (eds.), *Structure, Method and Meaning: Essays in honor of Henry M. Sheffer*. Nueva York, 1951.

vez de por el signo "≡", "porque estoy persuadido de que en el signo "=" posee en aritmética precisamente el significado que yo deseo simbolizar. Esto es, uso la palabra "igual" *(gleich)* para significar lo mismo que "coincidente con" o "idéntico a"[156]. Así, por ejemplo[157], en la ecuación "$2^2 = 2 + 2$" el signo a la derecha de "=" es diferente del signo a su izquierda; pero ambos designan o denotan el mismo número; ambos tienen la misma denotación, aunque poseen distinto sentido.

En segundo lugar, la distinción entre sentido y referencia, y más en concreto el principio de intercambio, constituye uno de los ingredientes que entran en la consideración por Frege de las oraciones enunciativas como nombres propios. Sobre el principio de intercambio establece Frege[158] un paralelismo entre, por una parte, la relación de un nombre propio con su denotación y, por otra parte, la relación de una oración enunciativa y su valor de verdad:

(1) Así como en el caso de los nombres complejos tales como el "padre de Casandra" si en uno de sus constituyentes, el nombre simple "Casandra", carece de denotación, carece también de denotación todo el nombre complejo (en virtud del principio de intercambio), así también en el caso de las oraciones enunciativas tales como "Casandra predecía el futuro", que contienen un constituyente que carece de denotación, como aquí "Casandra", hemos de considerar la oración entera como carente de valor veritativo.

(2) Así como en el caso de los nombres complejos tales como "la estrella matutina iluminada por el Sol" si uno de sus constituyentes, "la estrella matutina", es sustituido por otro que posee la misma denotación, "la estrella vespertina", la denotación de todo el nombre complejo queda inalterada, así también en el caso de las oraciones enunciativas, si se sustituye uno de sus constituyentes por otro que posee la misma denotación, el valor de verdad de la oración entera queda inalterado, aunque la oración resultante de la sustitución puede que contenga diferente pensamiento *(Gedanke)*. Por ej., el pensamiento de la oración enunciativa "la estrella matutina es un cuerpo iluminado por el Sol" es distinto del de la oración enunciativa "la estrella vespertina

notación de ambas oraciones debe ser la misma, porque los constituyentes sustituidos tienen la misma denotación.

Concluye, pues, Frege con respecto a la denotación de las oraciones enunciativas:

1) Ella no puede ser, por lo que acabamos de ver, el pensamiento; 2) "Hay que buscarle [a la oración enunciativa] una denotación siempre que interese la denotación de las partes componentes; y esto es siempre el caso, y sólo entonces, cuando nos preguntamos por los valores veritativos. Por esto nos vemos impulsados a admitir el *valor veritativo* de una oración enunciativa como su denotación"[159].

Si esto es así: 1) en virtud del principio de intercambio, el valor veritativo (la denotación) de una oración enunciativa debe quedar inalterado cuando una parte de esa oración es sustituida por otra expresión que posee la misma denotación, aunque posea distinto sentido. Esto es lo que significa la frase de Leibniz: *"Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate"*. Y 2) todas las oraciones enunciativas verdaderas tiene la misma denotación: el valor veritativo verdad; por otra parte, todas las oraciones enunciativas falsas tienen la misma denotación: el valor veritativo falsedad.

Esta solución de Frege no queda exenta de dificultades, las cuales él mismo trata de solventar[160]. Según el esquema anterior, el valor veritativo de una oración enunciativa, que contiene a otra como parte, debe quedar inalterado si sustituimos la oración constituyente por otra con el mismo valor veritativo. Así, si en la oración:

a) "Colón creía que la tierra por él descubierta era la India"

sustituimos la oración constituyente: " la tierra por él descubierta era la India" (que tiene por denotación el valor veritativo falsedad) por esta otra (que posee la misma denotación, el valor veritativo falsedad): "la tierra era plana", la oración resultante:

b) "Colón creía que la tierra era plana",

habría de tener la misma denotación, (el mismo valor veritativo que (a). Si, como efectivamente sucede, esto no es así, hay que imponer restricciones al principio de intercambio; éste no rige en el caso de las oraciones enunciativas complejas indirectas (u oblicuas): en ora-

es un cuerpo iluminado por el Sol", pero la de-

ciones con verbos como "decir", "oír", "opinar", "estar

156 *Grundgesetze*, I, p. IX.
157 *Function und Begriff*, ed. cit., p. 29; *Grundgesetze*, I, 2.
158 En "Über Sinn und Bedeutung", *ed. cit.*, p. 58.
159 "Über Sinn und Bedeutung", *ed. cit.*, p. 60.
160 En la última parte de "Über Sinn und Bedeutung".

convencido",...: en tales casos la oración subordinada denota, no su denotación directa u ordinaria (su valor veritativo), sino su denotación oblicua, indirecta, que coincide con su sentido ordinario: un pensamiento.

En consecuencia, siendo la denotación de la oración subordinada un pensamiento, el valor veritativo (denotación) del todo no es función del valor veritativo (denotación directa) de la oración subordinada, sino función de la denotación oblicua.

Análogas restricciones cabe aplicar en casos, distintos de los de las oraciones subordinadas, pero que contextualizan nombres con denotación indirecta, como por ejemplo: "es necesario que" ("o no es necesario que").

Con estas restricciones al principio de intercambio puede Frege mantener el paralelismo entre la relación de los nombres con sus denotaciones, y la relación de las oraciones enunciativas con sus valores veritativos.

Las oraciones enunciativas, según la teoría, son nombres (complejos) que denotan una denotación (su valor veritativo) y expresan su sentido (un pensamiento). Esta teoría es resumida, así, en los *"Grundgesetze"*, I, § 2:

> "Los *nombres* "$2^2 = 4$" y "$3 > 2$" *denotan* el mismo valor veritativo, que llamo, brevemente, *lo verdadero*. Del mismo modo, para mí "$3^2 = 4$" y "$1 > 2$" *denotan* el mismo valor veritativo, que llamo, brevemente, *lo falso*, precisamente como el nombre "2^{2}" *denota* el número cuatro. Según esto, llamo al número cuatro la *denotación* de "4" y de "2^2", y llamo a lo verdadero la *denotación* de "$3 > 2$".
> Sin embargo, distingo de la *denotación* de un nombre su *sentido*. "2^{2}" y "$2 + 2$" no tienen el mismo *sentido*, ni "$2^2 = 4$" y "$2 + 2 = 4$" tienen el mismo sentido. Al sentido de un nombre de valor veritativo lo llamo un *pensamiento*. Y añado que un nombre *expresa* su sentido y *denota* su denotación. *Designo* con el nombre lo que éste denota".

B) *El concepto de número*

En los capítulos III (final) y IV de los *Fundamentos*, Frege acomete la tarea precisa de difinir el número en general y los números particulares.

Los números son objetos; pero no objetos concretos, ni tampoco objetos abstractos, en el sentido en que se dice esto de los universales o de los conceptos en la filosofía tradicional[161]. Los números son objetos

tracción de los números (objetos) particulares llamados "naturales", sino a través de una función en el sentido fregeano del término, en la que figura un parámetro, siendo cada número particular la extensión de esta fun-ción para un valor dado del parámetro. Cuando Frege compuso los *Fundamentos* no había aún precisado algunas nociones, como luego hizo y formalizó finalmente en los *Grundgesetze*, por lo que allí ha de efectuar la construcción del número valiéndose del lenguaje ordinario.

Para establecer la definición del concepto número, Frege parte de una evedencia establecida previamente: un número corresponde a un concepto. Esto es, una frase que asigna un número a un conjunto de objetos constituye, en realidad, una aserción acerca de un concepto más bien que acerca de un objeto. Así, "hay 8 libros en la estantería" es equivalente a "el número de libros sobre la estantería = 8"; de manera que los términos numéricos ("8" aquí) quedan analizados mediante la expresión "el número del concepto F" (o "el número de F s). A partir de este análisis examina, y finalmente rechaza, las siguientes definiciones basadas en la teoría de Leibniz, de los números *0*, *1* y la noción "suceder de"[162]:

(1) El número *0* corresponde a un concepto, cuando ningún objeto cae bajo él.

(2) El número *1* corresponde a un concepto *F*, cuando sea lo que sea *a*, no vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo *F*, y cuando de los enunciados "*a* cae bajo *F*" y "*b* cae bajo *F*" se sigue con toda generalidad que *a* y *b* son el mismo.

(3) El número *n + 1* corresponde al concepto *F*, cuando existe un objeto *a* que cae bajo *F* y tal que al concepto *que cae bajo F, pero no a*, le corresponde el número *n*.

Frege rechaza este tipo de definiciones. En primer lugar, "mediante estas definiciones nunca podremos decidir... si a un concepto le corresponde el número *Julio César*, ni si este famoso conquistador de las Galias es un número o no"[163].

Es decir, en las anteriores definiciones simplemente hemos expresado que *0* y *1* son números, pero no hemos exhibido un criterio para decidir qué objetos son números. En segundo lugar, con tales definiciones

lógicos alcanzados por medio de conceptos (funciones).

Al concepto de número se llega, no mediante la abs-

no hemos demostrado que si los números *a* y *b* corresponden ambos al concepto F, entonces, *a* = *b*.

---

[161] Ciertamente, incluso Frege cometió un desliz diciendo que el número es un concepto (que luego reconoció y explicó el contexto de lo dicho): "el número 2' y 'todo número entero positivo' no son conceptos del mismo rango" *(Conceptografía*, § 9, pág. 29).

[162] *Fundamentos*, §§ 55 y 56, pp. 81-82

[163] *Fundamentos*, § 56, p. 82.

Por lo tanto, no queda justificada la utilización de la expresión "el número que corresponde al concepto *F*", y resulta también imposible probar una igualdad numérica. En realidad, lo que con tales definiciones estamos haciendo es fijar el sentido de las frases "el número *0* corresponde *a*" y "el número *1* corresponde *a*", pero de ahí no resulta que esté permitido distinguir el *0* y el *1* como objetos independientes, reconocibles siempre que se quiera.

Este primer método de definición no sirve para definir objetos, y el supuesto básico del que Frege parte es que los números son objetos. Los objetos son nombrados por nombres propios. Según esto, "el número del concepto F" es un nombre propio complejo que denota un objeto (un número). Para cada tipo de objeto hay un tipo de enunciado que tiene un sentido; y en el caso de los números son los enunciados de identidad, de la forma: "el número de tal y tal es (=) tal y tal". El problema consiste, pues, en definir (en identificar, ya que para Frege el signo "=" denota la relación de identidad entre objetos) lo nombrado por "el número del concepto F", que aparece en un enunciado de identidad como: "El número del concepto F es el mismo que (=) el número del concepto G".

Frege resuelve el problema utilizando un procedimiento de definición (de identificación) que reposa sobre el llamado "principio de abstracción"[164], y analiza, primero, este procedimiento de definición con un ejemplo tomado de la Geometría, el concepto de *dirección*, para aplicarlo luego al concepto de *número*.

En el ejemplo escogido se trata de llagar al concepto de dirección de una recta a partir del concepto de paralelismo, siguiendo el comino inverso de las definiciones habituales (rectas paralelas son aquellas que tienen la misma dirección). Para pasar del paralelismo a la dirección se dirá que:

> (1) "La recta *a* es paralela a la recta *b*" tiene el mismo significado que "la dirección de la recta *a* es igual *a* la dirección de la recta *b*".

En virtud del principio de intercambio (aquí llamada la regla de sustituibilidad) la identidad de la segunda proposición de (1) queda definida aquí implícitamente por el principio de intercambio de las denotaciones (ver *supra*) y expresada por la frase de Leibniz: *eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate;* según la cual, "la dirección de la recta *a*" puede sustituirse en todas partes por la "dirección de la recta *b*".

En virtud de la equivalencia de las dos oraciones de (1), podemos definir ahora el concepto de dirección como "aquello respecto de cuya identidad, las rectas son paralelas", en donde "identidad", "recta" y "paralela" denotan nociones ya conocidas.

Pero esta definición adolece, como el primer método de definición antes rechazado, de un defecto capital; no nos proporciona un criterio de direccionalidad; sólo nos sirve para identificar direcciones en contextos como "la dirección de la recta *a* = la dirección de la recta *b*", pero "nada nos dice acerca de si el enunciado "la dirección de *a* es igual a *q*" debe ser afirmado o negado"[165]. Nos falta aún el concepto general de *dirección*.

En virtud de la ley V (aquí aplicada, aunque no explícitamente formulada) establece a continuación Frege[166]:

> (2) Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, la extensión del concepto *recta paralela a la recta a* es igual a la extensión del concepto *recta paralela a la recta b*, y recíprocamente: si las extensiones de estos conceptos son iguales, *a* es paralela a *b*.

Conexionando ahora (1) y (2) establece Frege la siguiente definición:

> (3) La dirección de la recta *a* es la extensión del concepto *paralela a la recta a*.

Para las consideraciones que luego haremos, téngase en cuenta que "paralela a" es una relación *R* de equivalencia, que definida sobre el conjunto *E* de las rectas, determina una partición de *E* en clases de equivalencia. La clase de equivalencia del elemento *a* (de la recta *a)* está formada por los elementos (las rectas) *x* tales que:

xRa (la clase de las rectas que son paralelas a *a)*

esta clase es, precisamente, la extensión del concepto *recta paralela a a*. Por ser *aRb*, la clase de los *x* tales que *xRa* es igual a la clase de los *x* tales que *xRb*. Esto es, *aRb = (x) (xRa = xRb)*. Por ser una clase de equivalencia es disjunta con las restantes que forman el conjunto cociente.

[164] Así llamado por Russell y Couturat; nombre sacado de Peano, *Notations de logique mathématique* (1894); en *Opere Scelte*, vol. II, ed. de U. Cassina, ed. Cremonese, Roma, 1958, pp. 167-169.
El *principio de abstracción* establece que para toda relación R de equivalencia ("paralela a", "equinumérico a") existe una relación T pluriunívoca, función de R, y tal que para todo x y todo y, si $x R y$, entonces, y sólo entonces, existe un u tal que $x T u$ e $y T u$. En notación de los *Principia Mathematica* de Russell *72.66: $\forall R\, R \subset R^2 \wedge R = \breve{R} \wedge R \neq \wedge \Leftrightarrow \exists T\,(T \in cls \rightarrow 1 \wedge R = T/\breve{T})$.

[165] *Fundamentos*, § 66, p. 90.

[166] *Fundamentos*, § 68, p. 91.

La dirección (de la recta *a)* es definida, ahora, como la propiedad que tienen en común dos objetos (rectas) cualesquiera que mantienen la relación de paralelismo.

Probado este procedimiento de definición con el concepto de *dirección*, pasa Frege luego a aplicarlo al concepto de *número*. Los pasos correspondientes son:

Sienta el principio siguiente:

(1) "El concepto F es equinumérico *(gleichzählig)* al concepto G", significa lo mismo que "hay una aplicación ϕ biyectiva entre los objetos que caen bajo el concepto F y los que caen bajo el concepto G".

Y desde aquí establece la siguiente definición[167].

(2) El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto *equinumérico al concepto F*.

En esta definición Frege recurre a la noción de "extensión de un concepto". Noción, pues, necesaria en su esquema para la construcción del número. En el parágrafo 69 de *Fundamentos*, (a continuación de la definición establecida) la extensión de un concepto viene caracterizada por las dos siguientes afirmaciones que sobre ella se pueden hacer.

Sobre dos extensiones se puede afirmar:

(1) que son iguales.

(2) que la una abarca más que la otra.

Frege no habla de la tercera posibilidad: que la una no tenga relación alguna con la otra.

La primera, que es la que en este caso le interesa, se ilustra con la identidad numérica (o con la identidad de una dirección). Así, la proposición:

(3) "La extensión del concepto *equinumérico al concepto F* es igual a la extensión del concepto *equinumérico al concepto G*"

es verdadera si, y sólo si, también lo es la proposición:

"Al concepto F le corresponde el mismo número que al concepto G"[168].

Frege llega a (3) a través de esta condición que se desprende de (1)[169]:

(1') si el concepto F es equinumérico al concepto G, el número que corresponde al concepto F es

Frege no duda de que la aplicación ϕ de (1) es el criterio para la identidad numérica, y como él mismo dice: "parece que en tiempos recientes la opinión de que la igualdad de números debe definirse mediante una aplicación biyectiva ha recibido buena acogida por parte de los matemáticos"[170]. Esto es, el criterio para la identidad numérica es el de la equinumericidad de conceptos: dos números son idénticos si, y sólo si, los conceptos a los que corresponden son equinuméricos. Dado que la equinumericidad es una noción puramente lógica (existe una aplicación biyectiva entre los objetos que caen bajo ambos conceptos) ya definida, podemos reducir, sin circularidad, a ella la noción aritmética de "igualdad numérica".

Puesto que la *equinumericidad* (como en el caso anterior el paralelismo) es una relación R de equivalencia, ella, aplicada sobre el conjunto E de los conceptos produce una partición de E en clases de equivalencia y hace posible la forma general de (3):

$$a\, R\, b = (x)\,(x\, R\, a = x\, R\, b)$$

Y por eso un número es idéntico a otro o diferente, lo cual no significa otra cosa, en el análisis de Frege, que las clases de conceptos equinúmericos o bien coinciden, o bien son disjuntas. Por otro lado, como tales clases de equivalencia han sido definidas como las extensiones de los conceptos, resulta en (3) que la igualdad de extensiones equivale a la igualdad numérica. Y, finalmente, en (2) el número (que corresponde al concepto F) queda, así, definido como la propiedad que tienen en común los coneptos equinuméricos al concepto F; o en términos de clases: el cardinal de la clase $\hat{x}Fx$ es la clase de clases equinuméricas a $\hat{x}Fx$. Esto supone dado el conjunto de todos los conceptos o la clase de todas las clases E y la existencia de una aplicación sobreyectiva de E sobre el conjunto cociente de E/R.

Exponiendo ahora esquemáticamente (y en forma correlativa, y utilizando una simbología lo más próxima posible a la fijada luego por Frege) los pasos dados por Frege en ambas definiciones, tenemos : (A) en la definición de dirección a partir de paralelismo:

A_1- La recta a es paralela a la recta b = la dirección de la recta a es igual a la dirección de la recta b:

$$a \,//\, b = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

A_2- La recta a es pararalela a la recta b = la ex-

igual al número que corresponde al concepto *G*.

tensión del concepto *paralela a la recta a* es

[167] *Fundamentos*, § 68, p. 92.
[168] *Fundamentos*, § 69, p. 92.
[169] *Fundamentos*, § 73, p. 97.
[170] *Fundamentos*, § 62, p. 87.

igual a la extensión del concepto *paralela a la recta b:*

$$a \,//\, b = \dot{\varepsilon}(\varepsilon \,//\, a) = \dot{\alpha}\ (\alpha \,//\, b)$$

A_3- La dirección de la recta *a* es igual a la dirección de la recta *b* = la extensión del concepto *paralela a la recta a* es igual a la extensión del concepto *paralela a la recta b:*

$$\vec{a} = \vec{b} = \dot{\varepsilon}(\varepsilon \,//\, a) = \dot{\alpha}\ (\alpha \,//\, b)$$

A_4- La dirección de la recta *a* = la extensión del concepto *paralela a la recta a:*

$$\vec{a} = \dot{\varepsilon}(\varepsilon \,//\, a)$$

Y (B) en la definición de número a partir de aplicación biyectiva (identidad numérica):

B_1- El concepto *F* es equinumérico al concepto *G* = hay una aplicación ϕ biyectiva entre los objetos que caen bajo *F* y los que caen bajo *G* = el número que corresponde al concepto *F* es igual al número que corresponde al concepto *G:*

$$(F = G) = \varphi(F) = \varphi(G)$$

B_2- El concepto *F* es equinumérico al cocepto *G* = la extensión del concepto *equinumérico al concepto F* es igual a la extensión del concepto *equinumérico al concepto G:*

$$(F = G) = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = F) = \dot{\alpha}\ (\alpha = G)$$

B_3- El número que corresponde al concepto *F* es igual al número que corresponde al concepto *G* = la extensión del concepto *equinumérico al concepto F* es igual a la extención del concepto *equinumérico al concepto G:*

$$\varphi(F) = \varphi(G) = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = F) = \dot{\alpha}\ (\alpha = G)$$

B_4- El número que corresponde al concepto *F* = la extensión del concepto *equinumérico al concepto F:*

$$\varphi(F) = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = F)$$

Si examinamos los pasos dados en (A) y en (B) desde el punto de vista deductivo, vemos que el paso 3 (tanto en A como en B) se infiere de 1 y 2, admitido el

"fuerte" de "=", que implica el sentido "débil": "es verdadero si y sólo si", que es el que tiene en el paso 2, y el que debe tener también en el paso 3 para que éste constituya inferencia de 1 y 2.

Ahora bien, el paso 4 no constituye una inferencia correcta a partir del paso 3, aunque a simple vista lo parezca. Siendo 3 de la forma general:

$$(f_1 = f_2) = (g_1 = g_2)$$

parece natural pasar a:

$$f_1 = g_1 \ \text{y}\ f_2 = g_2$$

que es la forma general del paso 4.

Pero tal inferencia no es aplicable universalmente. Por ejemplo, no vale pasar de forma general de:

$$(x = y) = (x^2 = y^2)$$

a:

$$x = x^2$$

Por tanto, la inferencia de 4 a partir de 3 no es universalmente aplicable.

Pero téngase en cuenta que Frege no busca inferir la definición de número (el paso 4) de las anteriores proposiciones (pasos 1-3) sino que establece, de entrada la identificación de los números con las extensiones de los conceptos, y luego extrae las consecuencias.

En conclusión, Frege construye el concepto de número (objeto matemático) mediante la definición de un concepto (objeto lógico). Y acaba explicando cómo resulta posible, según su construcción, hablar de números en general sin referirse a conceptos particulares a los que éstos corresponden. Y, así, cabe establecer la siguiente definición de número *n*[171].

La expresión "*n* es un número" significa lo mismo que la expresión: "existe un concepto tal que *n* es el número que le corresponde".

Con esto tenemos una defición de número en general; es preciso, para la construcción lógica de la Aritmética, establecer definiciones (lógicas, como las anteriores) de los números particulares y de la serie infinita de los números.

C) *Definiciones de 0, 1, Sucesor*

Para que la definición de un número particular sea

principio de intercambio de las denotaciones y de los sentidos, si bien concediendo al signo "=" un significado "débil". En efecto, el signo "=" no tienen el mismo significado en los tres pasos. En el paso 1 debe leerse como "tiene el mismo significado que", sentido

lógica, no basta con que éste sea referido a un concepto, diciendo, por ejemplo, que *1* es el número que corresponde al concepto *satélite de la Tierra* o que 2 es el número que corresponde al concepto *letra de "AS"*, etc. En estos ejemplos los números particulares (1, 2...) son

---

[171] *Fundamentos*, § 72, p. 97.

introducidos por referencia a conceptos empíricos, y ello no garantiza la existencia de una serie infinita de números, ni tampoco permite presentar la Aritmética como una extensión de la Lógica, tal como es la intención de Frege. Por tanto, él ofrece las siguientes definiciones de números particulares que sí lo son por referencia a conceptos pertenecientes a la Lógica pura y, por lo tanto, no adolecen de los defectos antes señalados.

-Definición de 0[172].

0 es el número que corresponde al concepto *no idéntico a sí mismo*. El concepto *no idéntico a sí mismo* no es empírico, sino puramente lógico. Ningún objeto cae bajo tal concepto; su extensión es nula:

$$0 = \grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon)$$

Hay una biyección entre el concepto *no idéntico a sí mismo* y cualquier otro bajo el cual no cae ningún objeto. Por tanto, *cero* es una clase de equivalencia de conceptos. En términos de clases: *cero* es el cardinal de la clase de objetos diferentes a sí mismos; tal clase es vacía:

$$0 = \hat{x}\ (x \neq x)$$

Y, según la definición de Frege, es la clase de clases equinuméricas a la clase vacía. En símbolos (representando ø la clase vacía):

$$0 = \{ \emptyset \}$$

-Definición de 1[173]

1 es el número que corresponde al concepto *idéntico a 0*. En simbología de las *"Grundgesetze"*:

$$1 = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$$

Y en términos de clases:

$$1 = \hat{x}\ (x = 0)$$

lo que equivale a:

$$1 = \{ 0 \}$$

puesto que:

$$x = 0 \Leftrightarrow x \in \{ 0 \} \Leftrightarrow \{\{ \emptyset \}\}$$

1 es, pues, la clase de clases equinuméricas a la clase

-Definición de sucesor[174]

La expresión "*n* sigue inmediante a *m* en la serie de los números naturales", es equivalente a ésta:

"Existe un concepto *F* y un objeto *x* que bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto *F* es *n* y el número que corresponde al concepto *que cae bajo F, pero no es igual a x* es *m*".

Esta definición se basa en las definiciones de los números particulares y en una biyección restringida entre los conceptos. Un número *n*, correspondiente a un concepto *F*, es sucesor de un número *m*, correspondiente a un concepto *F'* si existe una biyección entre *F* y *F'*, restringida en *F* por la exclusión de uno de sus elementos, *x*.

D) *El principio de inducción matemática Los números naturales*

Luego de la definición anterior, pasa Frege a demostrar que: *todo número, excepto el 0, tiene un sucesor* en la serie de los números naturales. Acomete la demostración haciendo referencia a su *Begriffsschrift* y a la noción de "sucesión en la serie-ϕ" allí establecida[175]: La expresión relacional "*y* sigue a *x* en la serie-ϕ" significa lo mismo que (es definida como)[176]:

"Si todo objeto con el *x* está en relación ϕ cae bajo el concepto *F*, y si del hecho de que *d* caiga bajo el concepto *F*, se sigue, en general, sea lo que sea *d*, que todo objeto con el que *d* está en relación ϕ cae bajo el concepto *F*, entonces *y* cae bajo el concepto *F*, sea *F* el concepto que sea".

-El ancestral

Este tipo de definición recibe en los *Principia Mathematica* (I, pág. 548) de Russell y Whitehead el nombre de "el ancestral". El ancestral es una de las más originales construcciones lógicas de Frege. El ancestral es un esquema o matriz que se puede aplicar a otro campo distinto del de la Aritmética, según la interpretación que reciban las variables *R*, *a*, *μ* y *z*, y las propiedades que posea la relación *R*; precisamente el nombre de "el ancestral" proviene de las propiedades que tiene la relación "padre de" en el campo de los humanos (iguales a las que posee la relación "precede a" en el campo de los números); y en virtud de las cuales puede definirse la relación de "antepasado de" en térmi-

que contiene la clase vacía.

---

[172] *Ibidem*, § 74, p. 98.
[173] *Fundamentos*, § 77, p. 101.
[174] *Fundamentos*, § 76. p. 100.
[175] *Begriffsschrift*, sec. III, § 26 y § 29. La formalización aparece en los *Grundgesetze*, § 45.
[176] *Fundamentos*, § 79, p 103.

nos de la relación de "padre de" y obtener la clase de la que un elemento *a* es el antepasado o el ancestral. La noción de ancestral que aparece en la anterior definición de Frege puede definirse así:

"*a* es el ancestral de *z* si, y sólo si, *z* pertenece a toda clase (cumple la propiedad) μ que satisface las dos condiciones siguientes:

(1) *a* pertenece a (cumple la propiedad) μ
(2) para todo *x* y todo *y*, si *x* pertenece a μ y si *xRy*, entonces *y* pertenece a (cumple la propiedad) μ (condición de cierre sobre μ)".

Una clase que satisface estas dos condiciones se llama *R*-hereditaria a partir de *a*, y se llama a *R** el ancestral de la relación *R;* y es representada así:

$$\overleftarrow{R}^{*}a$$

Y designa la posterioridad de *a* para *R*, o la *R*-sucesión de *a:* la serie formada de términos que siguen a *a*. De manera que cabe inferir:

$$\overleftarrow{R}^{*}a =_{def.} \hat{z}\ \{[\ \forall\mu\,(a \in \mu\ \&\ \forall x\ \forall y\,(x \in \mu\ \&\ xRy \rightarrow y \in \mu)] \rightarrow z \in \mu\ \}$$

Como se ha dicho, el ancestral debe su nombre a la relación "padre de" *(R)*, porque entonces:

xRy significa "*x* es padre de *y*".

y

$\overleftarrow{R}^{*}a$ representa la clase de individuos de los que *a* es el ancestral.

En efecto, $\overleftarrow{R}^{*}a$ representa la clase constituida por los individuos *z* que pertenecen a toda clase a la que pertenece *a* y todos los descendientes de *x*, cuando *x* pertenece a ella. Dicho de otro modo: *a* es un ancestral de *z* si *z* es *a* o si es un descenciente directo de *a*, o un descendiente directo de un descendiente directo de *a*, etc.

La importancia de la construcción de Frege reside, precisamente, en conseguir una formulación lógica rigurosa de esta noción que encierra la expresión "etc.", y que aparece en la noción ordinaria de "descendiente", cuando se dice que "los descendientes de *a* son sus hijos, y los hijos de sus hijos, y los hijos de los hijos de sus

(2) esa clase es tal (esas propiedades son tales) que comprende (son poseídas por) todos los descendientes de *x*, si *x* pertenece a esa clase (si *x* posee dichas propiedades).

Frege aplica esta construcción del ancestral a la teoría de los cardinales, dando, en la construcción anterior, los siguientes valores a las variables *R*, *a*, *μ*:

R = es sucesor de
a = 0 (cero)
μ = es número natural

Con esta interpretación podemos definir la propiedad "es un número natural": (o la clase de los números naturales) como la propiedad o la clase de todos los objetos que mantienen la relación ancestral con *O* para la relación "es sucesor de". Y también con esta interpretación el ancestral ofrece directamente el enunciado del principio de inducción matemática, que queda ahora formulado así: Si *P* es una propiedad que 1) es poseída por *0*, y 2) si tal que si es poseída por *x*, es poseída asimismo por el sucesor de *x* en la serie de los números naturales, entonces *P* es poseída por todo aquello que sea idéntico a *0* ó que posea todas las propiedades que (1) posee *0* y (2) sean tales que si las posee cualquier objeto *x*, las posee asimismo el sucesor de *x* en la serie de los números naturales. Por consiguiente, lo números naturales (cardinales finitos) son definidos por Frege como aquellos objetos para los que el principio de inducción es válido, o dicho de otro modo, la clase de los números naturales, *N*, es:

$$N = \overleftarrow{R}^{*}0 =_{def.} \hat{z}\ \{[\ \forall\mu\,(0 \in \mu\ \&\ \forall x\ \forall y\,(x \in \mu\ xRy \rightarrow y \in \mu)] \rightarrow z \in \mu\ \}$$

Esta definición es "impredicativa"[177]: Se dice que la definición de un objeto *O* es imprecativa cuando *O* es una clase (o por el hecho de verificar una propiedad) *P*, a la vez que la definición de la clase (o de la propiedad) *P* depende del objeto *O*. Y este es el caso de la definición anterior:

El objeto $N = \overleftarrow{R}^{*}0$ ("es número natural") es definido por la pertenencia a una clase, *z*, (la clase de los objetos que poseen las propiedad hereditarias de *0* para

hijos, etc." El modo en que Frege elimina el "etc." es definiendo "z es descendiente de *a*" como:

(1) z pertenece a toda clase a la que pertenece (posee todas las propiedades que posee) *a*; y

la relación "sucesor de"), una clase de la que es miembro $\hat{\in}$ $(= N)$. En términos de propiedades:

$N = \overleftarrow{R}^{*}\, 0$ es el conjunto de objetos que poseen todas las propiedades hereditarias que posee *0* ó el sucesor de

---

[177] Nombre debido a Poincaré: "Los últimos esfuerzos de los logísticos", en *Ciencia y Método*. Tr. M. García Miranda. Espasa Calpe, Madrid, 3ª ed. 1963. p. 147.

cualquier *x*, cuando *x* las posee. Una de esas propiedades es: "es un número natural". Esta propiedad, *P*, sirve para definir *N*, a la vez que de depende de *N*.

Las definiciones impredicativas presentan un problema: si bien no todos los objetos introducidos por vía de definición impredicativa producen paradojas, sí es cierto, como han señalado Russell[178] y Poincaré[179], que las paradojas envuelven siempre definiciones impredicativas.

E) Las paradojas

En 1902, cuando Frege estaba dando cima a su proyecto logicista y terminando el vol. II de sus *Grundgesetze*, recibió una carta de Russell en la que éste le comunicaba su descubrimiento de una paradoja en la teoría de la Aritmética de Frege, y esta paradoja anidaba, no en alguna construcción colateral, sino en la base misma de la construcción fregeana: en la ley V, que mantiene que si dos funciones tienen los mismos valores para los mismos argumentos, entonces sus recorridos de valores son idénticos y viceversa; y en caso de que las funciones sean conceptos, la ley V afirma que dos conceptos son iguales si, y sólo si, sus extensiones lo son.

Hemos visto que la noción "extensión de un concepto" resulta básica y esencial en la construcción aritmética de Frege (los números son definidos como extensiones de conceptos). El anuncio de la paradoja de Russell conmovió profundamente a Frege; éste da a la imprenta, en 1903, el volumen segundo de los *Grundgesetze*, pero añade un apéndice, en el que constata la sacudida que ella supone para el edificio por él construido, y discute las soluciones que a él se le ocurren: "Nada más penoso puede suceder a un escritor científico que una de las bases de su edificio se tambalee una vez el trabajo esté acabado.

> Yo he quedado en tal posición por una carta del señor Bertrand Russell, precisamente cuando la impresión de éste [segundo] volumen estaba casi terminada. Se trata de mi básica ley V...
>
> *Solatium mireris, socios habuisse malorum.* Yo también he tenido este solaz, si a eso se puede llamar solaz. Todo aquel que en sus pruebas ha hecho uso de extensiones de conceptos, clases o conjuntos está en la misma situación. No se trata de mi particular método de poner los fundamentos, sino de si resulta posible

Efectivamente, la paradoja de Russell anida en la ley V que envuelve la noción básica de "extensión de un concepto". Si, según la teoría de Frege, un objeto pertenece a una clase si cabe bajo el concepto cuya extensión es la clase, entonces pertenecer a una clase, caer bajo un concepto y ser parte de la extensión de un concepto resultan equivalencias, y la paradoja de Russell se produce así:

Dado el concepto *clase que no pertenece a sí misma*, tenemos que la extensión de este concepto consta de aquellas clases que no pertenecen a sí mismas. Y esta extensión es ella misma una clase, esto es, una clase de clases. Y esta clase de clases ¿pertenece a sí misma, o no? Si pertenece, entonces debe caer bajo el concepto *clase que no pertenece a sí misma*, esto es, no pertenece a sí misma. Y, si no pertenece a sí misma, entonces debe caer bajo el concepto *clase que no pertenece a sí misma*, esto es, pertenece a sí misma. Se produce, pues, una contradicción.

En fórmulas, con simbología fregeana, la paradoja de Russell se constata más fácilmente a partir del teorema implicado por la ley V y que luego será llamado "principio de comprehensión", según el cual a todo concepto fregeano *f* corresponde una clase α como su extensión (*Grundgesetze*, § 54):

$$\vdash f(a) = a \cap \dot{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

y en simbología más actual:

$$(\exists \alpha)\,(\forall f)\,[\alpha = \hat{x}\, f(x)]$$

De modo que, si *x* cae bajo el concepto *f*, entonces pertenece a la clase α determinada por *f*; e inversamente; expresado de otro modo:

$$(\exists \alpha)\,(\forall f)\,(fx \Leftrightarrow x \in \alpha)$$

si ahora sustituimos $f(x)$ por $x \notin x$ (*x* no pertenece a sí misma) entonces:

$$\alpha = \hat{x}\ (x \notin x)$$

Tenemos, pues, según el principio anterior:

$$(\exists \alpha)\,(\forall x)\,(x \notin x \Leftrightarrow x \in \alpha)$$

y para el caso particular en que *x* es sustituida por α, entonces:

$$(\exists \alpha)\,(\alpha \notin \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \alpha)$$

un fundamento lógico de la aritmética"[180].

lo cual constituye una contradicción.

---

[178] "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", en *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4 (1907) pp. 29-53.
[179] "Los últimos esfuerzos de los logísticos", *ed. cit.*, p. 147.
[180] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 253.

Ante esta situación paradójica, Frege, en primer lugar, constata que la paradoja pone en cuestión la ley V y la noción "extensión de un concepto". Ya en la Introducción de los *Fundamentos* él mismo había señalado que "puede surgir la disputa" acerca del status de esta ley. Y respecto de la noción "extensión de un concepto" hemos visto las vacilaciones que muestra Frege en los *Fundamentos*, llegando incluso a conceder: "tampoco doy una importancia decisiva a la utilización de la extensión de un concepto" (§ 107, p. 125). Pero en 1903 Frege está firmemente conovencido de la necesidad de su noción de "extensión de un concepto" para la construcción logicista: "No veo cómo la aritmética pueda quedar científicamente asentada; cómo los números puedan ser aprehendidos como objetos lógicos y sometidos a examen, si no nos es permitido -al menos condicionalmente- pasar de un concepto a su extensión"[181].

Ensaya, pues, otras vías para obviar la contradicción. La primera, restringiendo la ley del *tertio excluso* a todos los objetos excepto las clases o extensiones de los conceptos. Podríamos, entonces, decir que la clase α (la clase de clases que no son miembros de sí mismas) ni es, ni no es, miembro de sí misma. Por consiguiente, no se produce contradicción. Pero esta restricción del principio de *tertio excluso* supone negar que las clases sean objetos en el sentido pleno de la palabra, ya que si las clases son objetos propios, el principio de *tertio excluso* debe regir sobre ellos. Mas, por otra parte, no encontramos en las clases nada de "insaturado", nada de "predicativo", que nos incline a considerarlas como funciones, conceptos o relaciones. Sucede, más bien, lo contrario: los nombres de clases poseen la naturaleza de los nombres propios. En el lenguaje ordinario suelen aparecer como sujeto gramatical y no en forma predicativa. Por ejemplo, "la clase de los números primos comprende infinidad de objetos". En consecuencia, no parece transitable esta salida.

Otra salida menos drástica podría ser considerar a las clases como "objetos impropios". No les sería permitido, en este supuesto, aparecer como argumentos de todas las funciones de nivel 1, sino que habría que estipular de qué funciones pueden ser argumentos, estableciendo, así, tipos de funciones. Entre las estipulaciones podría figurar la de que las clases del tipo de la de Russell no pueden aparecer como argumentos de establecer una completa legislación que decida en general qué objetos pueden ser argumentos de qué funciones"[182].

Cabe una tercera salida: considerar a las clases y a las extensiones de los conceptos como "objetos aparentes", esto es, considerar a los nombres de clases como "pseudonombres propios", que así no tendrían, de hecho, denotación; habría que considerarlos, en este supuesto, como partes de signos que sólo tienen denotación como un todo: un signo de un número no sería por sí un signo total, sino una parte sincategoremática de un signo. Pero, entonces, los números ya no podrían ser tomados como objetos, puesto que los numerales aparecerían ahora como partes de expresiones denotativas, pero que, separadas del todo, no poseen denotación. Resultaría, pues, imposible definir los números tal como lo había hecho Frege.

Por todo lo anterior, concluye Frege, "no queda otra alternativa que la de reconocer las extensiones de los conceptos o clases como objetos en el sentido pleno y propio de la palabra"[183]. Lo cual supone que sigue vigente para ellas el principio de *tertio excluso*. Hay que ensayar, por lo tanto, otra vía para obviar la contradicción. Y Frege va ahora por la de "corregir la noción 'extensión de un concepto'". Tal corrección la efectúa rechazando parte de su básica ley V, que establece la equivalencia entre la igualdad de dos extensiones y la equivalencia formal de los conceptos:

$$[\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon) = \dot{\alpha}\;\Psi(\alpha)] = [\overset{a}{\frown}\;\phi(a) = \Psi(a)]$$

Por ser una equivalencia constituye dos implicaciones:

V. a: Si los conceptos de nivel 1 $\phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ son tales que cualquier objeto que cae bajo uno de ellos cae asimismo bajo el otro, entonces son iguales en extensión:

$$[\overset{a}{\frown}\;\phi(a) = \Psi(a)] \rightarrow [\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon) = \dot{\alpha}\;\Psi(\alpha)]$$

V. b: Si los conceptos de nivel 1 $\phi(\xi)$ y $\Psi(\xi$ son iguales en extensión, entonces cualquier objeto que cae bajo uno de ellos cae asímismo bajo el otro:

$$[\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon) = \dot{\alpha}\;\Psi(\alpha)] \rightarrow [\overset{a}{\frown}\;\phi(a) = \Psi(a)]$$

Es preciso modificar, dice Frege, esta ley V, rechazando una de estas dos implicaciones, a fin de que no

funciones. Esta será la salida elegida por Russell con su "Teoría de los Tipos". Mas Frege rechaza tal solución, debido a que "parece extraordinariamente difícil

resulte derivable de ella el teorema 1 ("principio de comprensión"), que da origen a la paradoja de Russell. Frege admite V. a y rechaza V. b: "Si bien nada nos

[181] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 253.
[182] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 255.
[183] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 257.

impide trasformar la generalidad de una identidad en una identidad de extensiones, sin embargo, la trasformación inversa ha resultado no ser siempre permitida"[184]. Sitúa el origen de la paradoja en V. b, y rechaza esta implicación, ofreciendo una prueba de su falsedad y concluyendo que: "Si bien, en general, dado un concepto de nivel 1, resulta legítimo hablar de su extensión, hay casos, no obstante, de conceptos, que teniendo la misma extensión no todos los objetos que caen bajo uno ellos caen asimismo bajo el otro"[185].

Ahora bien, prescindir de V. b supone prescindir de la noción "extensión de un concepto", puesto que esta noción queda implícitamente definida en los dos miembros de la equivalencia establecida por la ley V. Por ello, lo que hace Frege es sustituir V.b por otra implicación, que determine la igualdad de las extensiones y evite, a su vez, la formación de paradojas. Esta es su propuesta[186]:

V. b': "La extensión de un concepto coincide con la de otro, si cada objeto que cae bajo el primer concepto, excepto la extensión del primer concepto, cae asimismo bajo la extensión del segundo concepto, y, a la inversa, si cada objeto que cae bajo el segundo concepto, excepto la extensión del segundo concepto, cae asimismo bajo el primer concepto". En símbolos:

$$\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon) = \dot{\alpha}\,\Psi(\alpha) \rightarrow (x)\,(x \notin \dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)\ \&\ x \neq \dot{\alpha}\,\Psi(\alpha) \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \Psi(x)))$$

Con esta modificación de la ley V, el "principio de comprensión" queda reformulado así:

$$(y)\,(f)\,(y \neq \hat{x}\,f(x) \rightarrow (y \in \hat{x}\,f(x) \leftrightarrow f(y)))$$

Frege consideraba que esta vía era la única transitable para escapar a la paradoja de Russell: le permitía conservar sus dos categorías fundamentales, *concepto* y *objeto*, y también el principio de *tertio excluso* para la Lógica. Mas pronto se comprobó que también esta vía quedaba obstruida y sin salida: Lesniewski[187], señaló que la reformulación de V. b no resultaba suficiente para evitar nuevas paradojas. Quine[188] y Geach[189] mostraron cómo se deducían paradojas de V. b'.

4. 4. Filosofía de la Lógica

No resulta fácil precisar la concepción de Frege de la Lógica, porque él no ha tratado expresamente del tema, por más que ha insistido en (y lo ha conseguido) distinguir lo lógico de lo psicológico. La concepción de Frege ha de ser trazada rastreando otras nociones suyas cuya elucidación deja traslucir lo que lo lógico era para Frege.

La noción más importante para este propósito es la de "analítico"; noción que ocupa su atención ya en la *Begriffsschrift*, y que resulta central, como hemos visto, en los *Fundamentos*. Que Frege asocia lo lógico a lo analítico (en el sentido que ha conferido a esto último) queda patente en las palabras con que concluye sus investigaciones en los *Fundamentos:* "Espero haber hecho verosímil en esta obra la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos y que, por consiguiente, son *a priori*. La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada. Las aplicaciones de la aritmética en la explicación de la naturaleza serían elaboraciones lógicas de hechos observados; calcular sería deducir"[190].

El criterio de analiticidad es la existencia de una demostración; analítico significa para Frege la existencia de una demostración en un sistema cuyos axiomas son principios generales y, por lo tanto, lógicos. Ahora bien, este criterio conlleva la distinción de dos tipos de proposiciones, con status bien diferenciado:

(1) Las proposiciones primitivas, las *Grundgesetze*

(2) Las proposiciones que se obtienen a partir de las primitivas mediante métodos deductivos: proposiciones analíticas (las leyes de la Aritmética, por ejemplo).

El concepto fregeano de analiticidad es de naturaleza *sintáctica* (demostrabilidad en un sistema lógico), en lo concerniente a las proposiciones derivadas. Es en esta parte en la que más insiste Frege, y donde más convincentes son sus argumentaciones. Una vez establecidas las leyes básicas, las *Grundgesetze*, se trata de reconocer qué otras proposiciones son deducibles de ellas, y clasificarlas, entonces, entre las analíticas.

[184] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 257.
[185] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 260.
[186] *Grundgesetze*, II, Apéndice, p. 26.
[187] *Confer* B. Sobocinski, "L'Analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski, en *Methodos*, 1, (1949), pp. 94-107; 220-228; 308-316.
[188] W. O. Quine, "On Frege's way out", en *Mind*, 64 (1955), pp. 145-159.
[189] 134 P. Geach, "On Frege's way out", en *Mind*, 65 (1956), pp. 408-409.
[190] *Fundamentos*, § 87, p. 111.

El problema está, sin embargo, en determinar la naturaleza de las proposiciones de base. Podemos reconocerlas, dice Frege[191] sin equívoco ni discusión como proposiciones de naturaleza lógica, debido a que todos los dominios del saber apelan, implícita o explícitamente, a ellas.

Según esto, las proposiciones de base resultan ser de naturaleza lógica porque así se nos imponen; porque su verdad se nos impone necesariamente. Y se distinguen de los axiomas de otros dominios (de los axiomas de la Geometría, por ejemplo), porque poseen un grado de necesidad más elevado. Por lo tanto, la lógica axiomática no constituye un sistema hipotético-deductivo, sino que pose carácter apodíctico (de aquí parte la crítica de Frege a la axiomática de Hilbert). Los axiomas de la Lógica no son hipótesis, sino principios verdaderos, necesarios, inmutables y únicos. Y aquí hace su aparición la Ontología de Frege (una especie de platonismo): Los axiomas de la Lógica poseen esas propiedades porque emanan de un mundo invisible, de un "tercer reino", que no es ni el de los objetos del mundo exterior, ni el de las representaciones subjetivas. Los objetos de ese "tercer reino" coinciden con los objetos físicos en que no precisan de sujeto alguno a cuyos contenidos de conciencia pertenezca, y con las representaciones subjetivas en que no son perceptibles por los sentidos[192]. Y es posible acceder a los objetos de ese tercer reino, aunque, ciertamente, no a través de la sensibilidad: por eso rechaza Frege[193] la tesis de Kant de que sin la sensibilidad no nos sería dado ningún objeto: el *cero*, el *uno* son objetos que no nos pueden venir dados por los sentidos, sino que "son dados directamente a la razón, la cual los puede contemplar como lo más propio de sí misma (Nota: Con esto no pretendo negar que sin las impresiones sensibles seríamos estúpidos como un madero y no sabríamos nada, ni de números ni de cualquier otra cosa). Y con todo, o mejor dicho, precisamente por esto, no son estos objetos fantasías subjetivas. No hay nada más objetivo que las leyes aritméticas"[194]. Así, por ejemplo, el teorema de Pitágoras es "intemporalmente verdadero"; verdadero con independencia de que haya alguien que lo reconozca como tal; o también: "que 3 cae bajo el concepto de número primo es una verdad objetiva; cuando la expreso no quiero decir que encuentro en mí una idea que llamo "tres" y otra que llamo "número primo", y que estas dos ideas se relacionan. Hablar así sería amputar el verdadero sentido de dicha frase... Lo mismo pasaría si, en lugar de decir: "encuentro en mí estas ideas", dijese: "construyo en mí estos conceptos", porque tampoco ahora daríamos cuenta más que de un proceso interior, en tanto que nuestra frase tiende a afirmar algo que fue y será siempre objetivamente válido, independientemente de nuestra vigilia y de nuestro sueño y con indiferencia con respecto al hecho de que haya habido o vaya a haber individuos para reconocer, o no, esta verdad"[195].

Los axiomas de la Lógica son de esta naturaleza: emanan de ese tercer reino poblado de juicios verdaderos, independientes del hecho de que los individuos humanos los efectúen, o no. Por sí mismos no pueden probar su validez ni indicar su origen, que es, en realidad, extralógico: "A la cuestión de saber por qué y a título de qué reconocemos una ley lógica como verdadera, la lógica no puede responder más que retrotrayendo esta ley a otras leyes lógicas. Cuando esta reducción resulta imposible, la lógica debe dejar esta cuestión sin respuesta. Si nos salimos de la lógica podemos decir: nos vemos constreñidos por nuestra naturaleza y por los datos externos a efectuar juicios; cuando juzgamos no podemos rechazar tal o cual ley, por ejemplo, la de identidad"[196]. El fundamento último de la Lógica no está en la Lógica, sino en la Ontología. Podría decirse, para justificar las primeras proposiciones irreductibles, que al margen de ellas se acabaría todo; ellas constituirían las condiciones de posibilidad de lo real.

En uno de sus últimos escritos *(Der Gedanke*, 1918) desarrolla Frege su teoría del "tercer reino", poblado por esos seres que él llama "pensamientos". El pensamiento *(der Gedanke)* es aquello con respecto a lo cual tiene sentido plantearse la verdad en general. El pensamiento es el sentido de una oración; es lo que A. Church, fiel seguidor de Frege, propone[197] traducir por "proposición", entendida ésta en sentido abstracto, como la entendió Bolzano en su *Wissenschaftslehre*, a la que llama *Satz an sich*, y como entiende Frege su *Gedanke:* el contenido significativo de la oración aseverativa, que es común a la oración y a sus traducciones a otras lenguas; el contenido objetivo del pensamiento que puede ser propiedad común de muchos. "Los pen-

[191] *Grundgesetze*, I, Introducción.
[192] "Der Gedanke" (1918). Trad. de C. R. Luis y C. Pereda, en Frege, *Escritos lógico-semánticos*. Tecnos, Madrid, 1974, p. 153.
[193] *Fundamentos*, § 89, p. 112.
[194] *Ibidem*, § 105, p. 123-124.
[195] "Über das Trägheisgesetz" (1890), en *Kleine Schriften*, ed. cit., p. 122.
[196] *Grundgesetze*, I, p. XVII.
[197] A. Church, "Propositions and Sentences" (1956), en T. M. Simpson (ed.), *Semántica filosófica: problemas y discusiones*. S. XXI, Buenos Aires, 1973, pp. 343-352.

samientos no son ni objetos del mundo exterior, ni representaciones. Hay que admitir un tercer reino"[198]. En él habita, por ejemplo, el pensamiento expresado en el teorema de Pitágoras; mas también lo pueblan los números y las leyes de la Lógica; y todos sus habitantes gozan de intemporalidad, de necesidad, de verdad y de independencia respecto de la actividad humana.

5. Giuseppe Peano (1858-1932)

Nació en Spinetta di Cuneo. Realizó todos sus estudios secundarios y superiores en Turín. Allí desarrolló también toda su actividad investigadora y pedagógica. En 1890 fue nombrado profesor extraordinario de cálculo infinitesimal en la Universidad de Turín; también fue profesor de la Real Academia de Artillería desde 1886 hasta 1901.

En 1891 fundó la *Rivista di matematica*, que luego fue también publicada en francés *(Revue de mathématique)* y en interlingua *(Revista de mathematica)*. En ella quedan recogidas las contribuciones de Peano y sus colaboradores -Arbicone, Bettazzi, Boggio, Burali-Forti, Cantoni, Castellano, Ciamberlini, Giudice, Fano, Padoa, Vacca, Vailati, Vivanti, etc.- a la magna empresa de reconstrucción sistemática de las Matemáticas y cuyo único parangón lo constituye el bourbakismo.

En 1898 adquirió una pequeña imprenta y se convirtió rápidamente en un aventajado impresor. Instalado en su modesta residencia de Cavoretto (cerca de Turín), le sirvió para imprimir la *Rivista di matematica* y para simplificar el simbolismo lógico y matemático en parte ideado por él.

En 1903 propuso el interlingua (lengua desarrollada a partir del latín sin flexiones) como lengua auxiliar internacional. Y en 1908 fue elegido presidente de la *Academia pro interlingua* (antigua Academia del Volapük) y la transformó en una asociación científica con la revista *Schola et Vita* como su órgano oficial de expresión.

De sus 212 obras científicas, 175 están consagradas a las Matemáticas y a la Lógica, y 27 a la Filosofía y a la lengua internacional (Interlingua). Ugo Cassina hizo una edición en tres volúmenes de las *Opere Scelte* (Roma, 1957-59) de Peano. En el vol. I aparecen los trabajos más importantes de Peano en Matemáticas. En el vol. II se recogen los trabajos de Lógica Matemática y de Interlingua y Algebra de la gramática. En el vol. III recoge el vol. V del *Formulatorio mathematico*[199].

Peano es un clásico de la lógica, si bien su obra quedó durante algún tiempo prácticamente olvidada. Ugo Cassina se lamenta también de la opinión de ciertos lógicos modernos según la cual la obra de Peano está ya superada y contiene un valor puramente histórico. Mas dicha opinión, afirma Cassina, se debe solamente a la falta de conocimiento de la obra de Peano. ¿En qué es clásica su obra? Peano es un clásico de las Matemáticas, de la Lógica y de la Filología comparada. Nuestra consideración se restringe aquí a la Lógica. La Lógica de Peano se nos aparece como un nudo cuyos cabos son las Matemáticas y la Lingüística. Su lógica, como va a ser la lógica moderna, concebida ya por Leibniz, es sustancialmente *calculus rationator* y *characteristica universalis*. En cuanto *calculus* la Lógica va unida a la Matemática; en cuanto *characteristica* se asienta sobre el lenguaje. Y en ambos Peano es un clásico.

La *characteristica universalis*

El proceso de constitución de la Lógica formal moderna viene determinado por el desarrollo de una *charateristica*, una formalización, que consiste, no en usar símbolos de forma más o menos generalizada -cosa que se ha venido haciendo desde antiguo-, sino en conseguir un lenguaje lo suficientemente sutil y completo como para regular su propio desarrollo. Cuando el simbolismo se utiliza, no sólo para anotar los modos de inferencia, sino también para fundamentar dichos modos inferenciales. Esto se consigue por primera vez con Frege y Peano. Ambos se apoyan en Boole, pero su proyecto consiste, no en integrar la Lógica en la Matemática, sino en completar el simbolismo matemático mediante un simbolismo lógico más fundamental, aplicable fuera del dominio de la matemática y totalmente autónomo de las particularidades y ambigüedades de los lenguajes ordinarios.

Esta es la idea común que guía los trabajos de Frege y de Peano, aun cuando este último no tenía noticia de la simbología de Frege en 1889[200].

[198] "Der Gedanke", *ed. cit.*, p. 156.

[199] Una lista cronológica detallada de las obras de Peano, en "Vita et opera de Giussepe Peano", en *Schola et vita*, VII (1932), 117-148. Para otros importantes trabajos sobre la lógica de Peano debidos a Ugo Cassina ver bibliografía sobre Peano, al final del capítulo.

[200] Entre las referencias a autores en la nota 1 de *Los principios de la Aritmética* no figura Frege. Es posteriormente cuando Peano hace referencia a la *Begriffsschrift* de Frege en *Principi di logica matematica* (1891) nota 5. Reimpresión en G. Peano, *Opere Scelte*, II, pp. 92-101.

El proyecto de Peano es, a la vez, más audaz y más modesto que el de Frege. Por una parte, intenta abarcar toda la Matemática -basta con ojear el tomo I del *Formulaire de Mathématiques* para percatarse de la magna empresa acometida por los matemáticos italianos[201]. Mas, por otra, se contenta con enumerar las leyes lógicas de las que hará uso en su exposición matemática sin organizarlas en un sistema deductivo[202].

Pero si, con todo, Peano es menos lógico que Frege, sin embargo, ha ejercido una mayor influencia en la Historia de la Lógica, ya que su ideografía, más manejable que la de Frege, ha penetrado rápidamente entre los matemáticos[203] y con ciertas remodelaciones y añadidos de Russell y Whitehead en los *Principia Mathematica* se convirtió en el lenguaje común de la Logica formal.

En la obra de lógica matemática de G. Peano se pueden distinguir los tres períodos siguientes:

(1) Estudio de los trabajos de G. Boole y E. Schröder sobre el cálculo de clases y de C. S. Peirce y H. MacColl sobre el cálculo de proposiciones: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Fratelli Bocca, Turín, 1888.

(2) Creación de su ideografía: *Los principios de la aritmética* (1889) y *Notations de logique mathématique. Introduction au formulaire de mathématiques* (1894).

(3) Sistematización de la Lógica como ciencia matemática: *Principii di logica matematica* (1891), reimpresión en *Opere Scelte*, II, ed. cit., pp. 92-101. *Formulario mathematico*, V. Fratres Bocca, 1908.

Peano fija prácticamente toda su simbología en la obra *Los Principios de la Aritmética*. En cuanto a la elección de símbolos se inspira en el alfabeto estenográfico de Gebelsberger y, a diferencia de Boole, evita la utilización de símbolos matemáticos para uso lógico.

Para indicar objetos reales cualesquiera emplea las letras latinas itálicas minúsculas $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Estos son símbolos de variables, cuyo sentido es "constante" (siempre el mismo) en la misma frase, pero generalmente diferente en diferentes frases. Para los símbolos con significación constante en todas las frases -constantes lógicas- emplea, o bien letras griegas o latinas (no itálicas minúsculas) derechas o invertidas, o bien series de letras latinas (romanas), que son abreviaciones del nombre griego o latino del objeto representado por el símbolo.

Los símbolos han sido, pues, escogidos de tal forma que no se produzcan homónimos. Su forma permite -a diferencia de lo que ocurre con los de Frege- una fácil composición tipográfica, ya que todas las fórmulas resultantes son unilineales.

Entre los símbolos introducidos por Peano cabe destacar por su importancia los siguientes:

$$\supset, \in, \ni, \iota, 1, \exists$$

El símbolo *C* mayúscula invertida, esto es, $\supset$, es la letra inicial de la palabra *consequentia* y es interpretada, por tanto, como signo de deducción *(Los principios de la Aritmética*, VIII), *"a ⊃ b"* significa: "de *a* se deduce *b*". Significado éste lógicamente ambiguo, puesto que Peano no distingue aún entre implicación "material" y relación de consecuencia lógica. Por lo demás, Peano no siempre mantiene la equivalencia entre el cálculo de clases y el de proposiciones, y, así, en *Notations de logique mathématique. Introduction au formulaire de mathématiques*, edic. cit. p. 127, presenta el signo *C* como inicial de la palabra "contiene", de modo que la *C* invertida, esto es, $\supset$, es interpretada como signo de la relación de inclusión entre clases: *"a ⊃ b"* significa "la clase *a* está contenida en la clase *b*".

El índice *x* colocado debajo del signo de deducción, $\supset_x$, significa "cualquiera que sea el individuo variable o indeterminado *x*".

El símbolo $\in$ es una innovación capital que señala la expecificidad del cálculo de clases sobre el de proposiciones. La letra $\in$ es la inicial de la palabra griega ἐστί (es) *"x ∈ a"* se lee "*x* es un individuo de la clase *a*". Señala la relación de pertenencia de un miembro a una clase; y ha de ser cuidadosamente distinguida de la relación de inclusión entre clases. Ambas relaciones no poseen las mismas propiedades formales: la última es transitiva; la primera, no.

[201] En el *Formulaire*, I, Turín 1895, se recogen reducidas a fórmulas precisas casi la totalidad de las proposiciones de las ciencias siguientes: Lógica, Algebra y Aritmética (Vailati, Castellano, Burali-Forti); Teoría de las magnituddes (Burali-Forti); Clases de números (Peano); Teoría de conjuntos (Vivanti); Teoría de límites (Bettazzi); Teoría de las series (Giudice); Teoría de los números algebraicos (Fano).

[202] En *Los Principios de la Aritmética* las fórmulas son simplemente inventariadas, no deducidas, ya que no se ofrecen reglas de infeencia. De modo que en la deducción de teoremas los pasos de una fórmula a otra no quedan justificados lógicamente. Frege le critica esta falta de justificación lógica.

[203] No obstante la resistencia y las críticas de Poincaré. *Confert* "Las matemáticas y la lógica", en *Ciencia y Método*, Libro II. cap. III. Trad. M. García Miranda y L. Alonso. Espasa-Calpe, Madrid, 1963.

En la pág. XII de *Los principios de la Aritmética* señala Peano explícitamente que puede establecerse una transformación recíproca entre las clases y las proposiciones, e introduce los símbolos operatorios correspondientes a la transformación dierecta y a la transformación inversa. De manera que, si "$x \in$" (x es) es el símbolo operatorio que permite transformar cada clase en una proposición, "$x \ni$" (el x que) es el símbolo operatorio de la transformación inversa. Y, así, si p es una proposición en x, entonces "$x \ni p$" indica la clase formada por las soluciones de p, esto es, las x que satisfacen la condición p. La forma de este símbolo ha variado a lo largo de la obra de Peano, adoptando las siguientes modalidades:

$$x: \ , [x \in] \ , \overline{x \in} \ , x \ni$$

Los símbolos ι y su inverso $\imath$ fueron introducidos por primera vez en *Demonstration de l'intégrabilité des equations différentielles ordinaires* (1890), reimpresión en *Opere Scelte*, I, ed. cit. Roma 1957, pp. 119-170. Su estructura con respecto a los restantes símbolos lógicos puede verse en el *Formulaire de mathématiques*, II, Frates Bocca, Turín 1897. Proposiciones 420 y 430.

El símbolo ι es la letra inicial de la palabra griega ἴσος (igual a). Es el signo para las clases unitarias, esto es, si x es un elemento de una clase, "ιx" indica la clase que contiene exclusivamente el elemento x. Junto con el símbolo $\in$ forma el símbolo compuesto $\in \iota$ que es idéntico a símbolo simple $=$. Así tenemos que:

$$y \in \iota x \ . = . \ y = x$$

El símbolo inverso de ι, a saber, $\imath$ (o $\bar{\imath}$), es el signo del elemento, esto es, si a es una clase que contiene un solo elemento, entonces "$\imath a$" indica el elemento que forma la clase a. Y si dos elementos pertenecen a la clase a, son necesariamente iguales. Obtenemos, pues:

$$x = \imath a \ . = . \ a = \iota x$$

Finalmente, el símbolo $\exists$ es introducido por primera vez en el *Formulaire de mathématiques*, II, ed. cit. Proposición 400. Es el signo de la proposición existencial: Si a es una clase, "$\exists a$" significa "hay a".

laciones y demostraciones matemáticas exige el establecimiento de nociones y distinciones que hasta entonces habían pasado inadvertidas. Y si bien el interés de Peano y sus colaboradores está puesto en la exposición y fundamentación de las Matemáticas, sin embargo, la exigencia de expresar simbólicamente las operaciones de la prueba matemática hizo que la Lógica se desarrollase en el *Formulaire* más allá de las formas existentes completando y rectificando la obra de Peirce y de Schröder.

El problema de una *characteristica universalis* se escinde en otros dos distintos: El de una lengua característica y el de una lengua universal. El álgebra constituye un ejemplo -el que tuvo Boole *in mente*- de escritura característica, en cuanto sistema de signos regido por una sintaxis independiente de los órganos de fonación. La Lógica simbólica, sobre el modelo del Algebra, ha construido una característica más amplia, pero no universal, ya que se limita a las disciplinas lógico-matemáticas, o mejor, al aspecto lógico matemático de las disciplinas.

Pero no han faltado los esfuerzos por construir una lengua universal, que ya no es característica, sino una lengua propiamente dicha, con escritura fonética, no ideográfica. Esta lengua común a todos los pueblos facilitaría las relaciones internacionales, borrando, así, la maldición de la torre de Babel. La lengua latina cumplió este objetivo, fue internacional en todas las ciencias desde la época del Imperio Romano hasta finales del s. XVIII. A partir del s. XIX cada autor escribe en su propia lengua nacional, y para Peano "tal multitud de lenguas, en trabajos de interés común para toda la humanidad, constituye un gran obstáculo para el progreso" (*Interlingua* (1924), reimpresión en *Opere Scelte*, II, ed. cit., p. 482). Su preocupación es conseguir que todo matemático, cualquiera que sea la comunidad lingüística a la que pertenezca, pueda leer el *Formulario*.

Presentó este problema al Congreso Internacional de Matemáticas de París en 1900. De este concreso salió como solución más aceptable la vuelta al latín, coincidiendo en este punto con el "Primo Congreso Internazionale latino" (Roma, 1903). Este congreso exhorta: "ut sermo latinus inter gentes universas communis habeatur, et adhibeatur ad humanitatis commercium fovendum, augendum, tenendum". En varias partes del mundo se publicaron periódicos en latín;

existencial: Si a es una clase, "$\exists a$" significa "hay a" o "los a existen", esto es, la clase a no es vacía. De modo que "$\exists a$" significa lo mismo que "$a - = \Lambda$":

$$a \in k. \supset : \exists a . = . a - = \Lambda$$

El interés de la simbología de Peano no se reduce al hecho de consutuir el punto de partida para la simbología russelliana, sino que en su aplicación a las re-

partes del mundo se publicaron periódicos en latín: "Phoenix" en Londres, "Praeco latinus" en Filadelfia, "Vox urbis" en Roma. Pero el primero muere en 1892 y el segundo en 1902. Comienza otra torre de Babel precisamente entre las soluciones propuestas para eliminarla. Couturat y Leau, *Histoire de la langue universelle*, París, 1903, analizan 57 proyectos de lengua artificial universal, entre los que cabe destacar por la importancia obtenida:

- El "Volapük", ideado en 1879 por Schleyer. Consiste en una transformación de la lengua inglesa. Alcanzó en pocos años amplia difusión: En 1888 había fundado 283 clubs y 25 periódicos en todos los países del mundo civilizado. A partir del Congreso de París (1889) decae y muere.
- El "Esperanto", publicado en 1887 por el médico Zamenhof.
- La "Lingua" de Henderson (1888) construida a base de vocabulario latino con gramática inglesa.
- La *Academia pro Interlingua* es fundada en 1887 en el Congreso de Munich con Schleyer como presidente. Sus estatutos fueron aprobados en el Congreso de París (1889). Sus reglas son:
  1- *Interlingua adopta omne vocabulo commune ad anglo, francais, hispano, italiano, portuguez, teutico et russo. Et omne vocabulo latino cum derivatos anglo.*
  2- *Omne vocabulo, que existe in latino, habe forma de thema latino*
  3- *Suffixo -s indica plurale.*

Ante esta situación, la decisión adoptada por Peano es la que queda reflejada, a la vez que ejercitada, en el artículo *De latino sine flexione, lingua auxiliare internationale* (1903), reimpresión en *Opere Scelte*, II, pp. 439-447. Este es le primer escrito de Peano dedicado al problema de la lengua auxiliar iternacional. Comienza en latín escolástico y termina en latín sin flexión (interlingua). Así también en su obra científica Peano comienza escribiendo en latín escolástico: *Los Principios de la Aritmética*, y acaba componiendo su vol. V del *Formulario* en interlingua.

En 1908 Peano es elegido presidente de la *Academia pro Interlingua* (antigua academia de volapük) y la transforma en una asociación científica que tiene como regla el principio de la "internazionalita" de los vocablos y como órgano de expresión la revista *Schola et Vita*. En 1910 la *Academia* inserta en sus estatutos: "Qui mitte ad thesaurario fr. 10 per anno, es socio de Academia".

El calculus ratiocinator

Si bien la noción de un *calculus ratiocinator* es diso-

precisas y explícitamente formuladas. Es por ello por lo que en el desarrollo de la Lógica Formal moderna algoritmo y simbolismo van unidos indisolublemente.

La idea de reducir el razonamiento a un cálculo aparece de forma explícita en R. Lulio y T. Hobbes, quienes inspiran el programa leibniciano, pero cuya realización efectiva comienza con Boole.

Con Boole la Lógica queda asociada, no a la Metafísica, sino a las Matemáticas. Es este cambio de orientación en la forma de entender la Lógica lo que marca el proceso de "cierre categorial" de esta disciplina durante la segunda mitad del s. XIX. El Algebra de la Lógica inaugurada por Boole y De Morgan, desarrollada por Jevons y Peirce y codificada por Schröder, constituye la base lógica del trabajo de Peano (así lo reconoce explícitamente éste. Resultaría una simplificación excesiva, no obstante, identificar la Lógica Matemática del S. XX con la Lógica Matemática de Boole, o considerar aquélla como un simple desarrollo de ésta. Frege y Peano constituyen los dos eslabones que unen el Algebra de la Lógica con la Lógica Matemática actual.

Desde Boole prácticamente todos los lógicos han adoptado su distinción fundamental entre proposiciones "primarias" y proposiciones "secundarias", o, como dice Schröder, entre el Cálculo de Clases y Cálculo de Proposiciones. Estos dos cálculos emplean los mismos signos y obedecen (en parte) a las mismas reglas, de modo que muchas fórmulas les son comunes y pueden considerarse como dos interpretaciones diferentes de un mismo cálculo. Las proposiciones "primarias" efectivamente pueden interpretarse en los dos sentidos -como relaciones entre clases o como relaciones entre proposiciones- mas no las proposiciones "secundarias", que sólo admiten ser intrepretadas como relaciones entre proposiciones. Este defecto de homogeneidad es lo que ha hecho que Peirce y MacColl reduzcan todos los elementos del cálculo lógico a proposiciones. Sin embargo, las reglas del cálculo son las mismas para las clases que para las proposiciones, y se puede hacer derivar la notación de las proposiciones de la clase o a la inversa. Boole sigue la primera dirección haciendo intervenir la noción "tiempo" y representando cada proposición por su duración de validez, esto es, por el conjunto de instantes en que es verdadera. Según esta dirección, seguida

ciable en abstracto de la de una *characteristica universalis*, no obstante, tanto genética como estructuralmente resultan indisociables. Un razonamiento formal, un verdadero cálculo, no puede llevarse a efecto más que sobre la base de una característica, sobre la base de un sistema de signos sujetos a combinaciones y transformaciones

también por Schröder, el cálculo de proposiciones constituye un caso particular del cálculo de clases. Peano, en cambio, sigue en dirección opuesta, retrotayendo el cálculo de clases al de proposiciones[204]. Esto lo consigue mediante la introducción del símbolo ∈ como signo de cópula de juicios singulares cuyo sujeto es un in-

[204] *Confert* L. Couturat. "La logique mathématique de M. Peano", en *Revue de Metaphysique et de Morale*, 7, 1889, pp. 616-646.

dividuo: "$x \in a$" se lee "x es un a". La relación de inclusión entre las clases a y b queda definida[205],

$$a \supset b \ . = : x \in a \ . \supset . \ x \in b$$

Esto es, "decir que la clase a está contenida en la clase b es decir que si x es un a, entonces es un b". De modo similar se define el producto y suma lógicos de dos proposiciones[206].

En las págs. VIII y IX de *Los Principio de la Aritmetica* inserta Peano una larga lista de proposiciones lógicas primitivas -un total de 43- sobre las que funda el cálculo lógico. Estos axiomas valen, a la vez, para el Cálculo de Clases y para el Cálculo de Proposiciones. Así, por ejemplo, el axioma 1 es el principio de identidad, que escribe $a \supset a$, y significa:

- Si a es una clase: "(todo) a es a"
- Si a es una proposición: "si a es verdadera, a es verdadera".

La mayor parte de las identidades que aparecen en esta lista han sido retomadas de Boole (y también de Schröder, Peirce, MacColl, e incluso de Leibniz)[207]. El número de axiomas admitidos como independientes resulta excesivo, especialmente si comparamos este sistema con el cálculo de Schröder, quien se contenta con tres axiomas para el Cálculo de Clases, otros tres para el de Proposiciones, más un axioma especial que sirve de enlace entre ambos cálculos. El mismo Peano reconoce estas objeciones, y en *I principii di Geometria logicamente espositi* (1889), reimpresión en *Opere Scelte*, II, ed. cit., p. 81 escribe: "La tabla de identidades lógicas de las que hacemos uso, fue confeccionada ya en mi opúsculo citado *[Los principios de la Artimética]*. Muchas de ellas fueron retomadas de Boole. Su número es grande. Constituiría un estudio interesante, no abordado hasta ahora, distinguir las fundamentales, que se deben admitir sin más, de las restantes, que están contenidas en las fundamentales.

Pero Peano es un matemático, no un lógico. Junto con sus colaboradores en el *Formulario* se ha propuesto, no construir un sistema de Lógica completo e independiente, sino desarrollar un algoritmo que permita analizar y verificar las demostraciones matemáticas. Se contenta con enumerar las leyes lógicas de las que hará uso sin organizarlas en un sistema deductivo. Los axiomas que sirven de base a su reconstrucción lógica de la Aritmética *(Los principios de la Artimética*, p. 1) son puestos como postulados, como reglas simples y evidentes. Es más, no admite que puedan ser demostrados, como hace Frege en sus *Grundgesetze*. Para Peano:

> "estas demostraciones son ilusorias. En realidad, puesto que estas reglas son ya las más simples reglas de razonamiento, para demostrarlas habría que aplicar o bien estas mismas reglas o bien otras más complicadas. En cualquier caso se comete un círculo vicioso"[208].

Sólo cabe, sigue diciendo Peano, examinar si una regla equivale a otra u otras y continuar esta descomposición hasta llegar a las más simples, que en el *Formulario* reciben el nombre de "proposiciones primitivas". Por eso los nueve axiomas para la Aritmética de *Los principios de la Artimética* quedan reducidos en el *Formulario* a cinco, que satisfacen las condiciones de consistencia e independencia, como ha demostrado Peano y Padoa[209].

En *Los principios de la Artimética* procede Peano como sigue:

(1) Parte de 4 ideas "primitivas"[210].

- *número* (entero positivo), representado por *N*
- *unidad*, representado por *1*.

[205] *Los Principios de la Aritmetica*, p. XI. Prop. 50. Véase igualmente *Formulaire de mathématiques*, II, ed. cit., proposición 12. Ha de advertirse que la fórmula de la izquierda del signo "=" constituye el definiendum y la fórmula a su derecha, el definiens: "Una def. es una proposición que tiene la forma $x = a$, en donde a es un agregado de signos que posee un sentido conocido; x es un signo o agregado de signos que carecen aún de significación: *(Los principios de la Aritmética*, p. XVI).

[206] *Los Principios de la Aritmética*, p. XI, Prop. 47 y 48. Y, asimismo, *Formulaire de mathématiques*, II, ed. cit., prop. 14, y *Notations de logique mathématique. Introduction au Formulaiere de mathématiques*, II, ed. cit., p. 140. Sin embargo, en el *Formulaire de mathématiques*, II, ed. cit., prop. 202 define la suma lógica de dos proposiciones mediante la adición de clases.

[207] *Confert* L. Couturat. "La logique mathématique de M. Peano" ed. cit., pp. 630-636.

208 *Recensione: G. Frege, Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* (1895), reimpresión en *Opere Scelte* II, ed. cit., p. 194.

209 *Confert* Peano, *Formulaire de Mathématiques,* vol. II, 1889, § 3, ed. cit., p. 30 y A. Padoa, "Essai d'une théorie algébraique des nombres entiers. Précedé d'une introduction logique à une théorie deductive quelconque", en *Bibliothéque du Congres international de philosophie*, París, 1900, vol. 3, pp. 309-365.
El método elaborado por Peano y Padoa para resolver el problema de si una proposición es derivable de otras se convirtió en el método standard en las pruebas de independencia.

210 Esta es otra diferencia con Frege: Peano considera que no todo es definible (en términos lógicos): "he definido todos los signos, a excepción de los cuatro que aparecen en las explicaciones del §1. Si tal como pienso, éstos no pueden reducirse ya más, entonces no es posible definir las ideas expresadas por ellos mediante ideas que se suponen conocidas previamente" (*Los principios de la Aritmética*, p. 31)

- *sucesor de a*, representado por $a + 1$
- *es igual a*, representado por =

Establece los 9 axiomas siguientes:

(1) $1 \in N$.
(2) $a \in N \,.\supset.\, a = a$.
(3) $a, b \in N \,.\supset: a = b \,.=.\, b = a$.
(4) $a, b, c \in N \,.\supset.\therefore a = b \,.\, b = c :\supset.\, a = c$.
(5) $a = b \,.\, b \in N :\supset.\, a \in N$.
(6) $a \in N \,.\supset.\, a + 1 \in N$.
(7) $a, b \in N \,.\supset: a = b \,.=.\, a + 1 = b + 1$.
(8) $a \in N \,.\supset.\, a + 1 \,-=\, 1$.
(9) $k \in K \,.\therefore 1 \in k \,.\therefore x \in N \,.\, x \in k :\supset_x .\, x + 1 \in k :: \supset .\, N \supset k$.

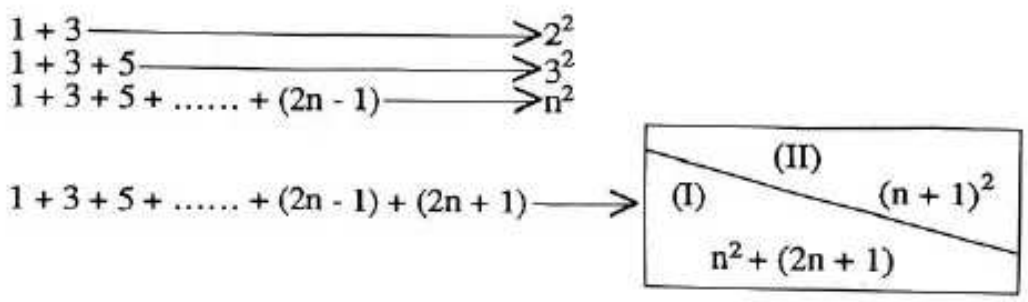
Los axiomas (2), (3), (4) y (5) concernientes a la igualdad pertenecen efectivamente a la Lógica elemental. Quedan, así, como específicos de la Aritmética, los cinco restantes conocidos universalmente como los "axiomas de Peano"[211], base de las modernas axiomatizaciones de la Aritmética. Estos se corresponden con los establecidos por Dedekind[212].

El axioma (9) es la trascripción del llamado *principio de inducción completa* (matemática) o *razonamiento por recurrencia*. Está formulado en términos del Cálculo de Clases, y puede leerse así: "Si k es una clase que contiene 1; y si x es número y pertenece a la clase k, $x + 1$ también pertenece a k, entonces todo número es k".

Este principio suele ser reconocido por la generalidad de los investigadores como específico de la Matemática[213]. Fue introducido en la Matemática por el matemático italiano Francesco Mauloryco en el siglo XVI[214], quien lo utilizó en su libro *Aritmeticorum libri duo* (en *Opuscula Mathematica*, Venecia, 1575). Pascal -a quien se suele atribuir el descubrimiento de este principio- conocía el libro de Mauloryco[215] y emplea este método en el estudio y sistematización del triángulo aritmético relativo a las potencias de un binomio[216]. Mas también este triángulo conocido como "triángulo de Pascal" había aparecido ya un siglo antes en el *General trattato di numeri et misure* (1556-1560) de N. Tartaglia[217]. Y, finalmente, J. Bernouilli (*Ars coniectandi*, 1686, publicado después de su muerte en 1706) emplea el método de inducción matemática con tanta frecuencia que Köstner[218] lo denomina "método de Bernouilli".

El principio de inducción completa posee un gran interés gnoseológico. Plantea el problema de si mediante un procedimiento fundado exclusivamente en el principio de identidad se pueden obtener verdades nuevas; en términos kantianos, si caben juicios sintéticos *a priori*.

Poincaré[219] resuelve el problema afirmativamente. También es nuestra modesta opinión el método de inducción completa constituye el paradigma de las idéntidades sintéticas. Apliquémoslo, por ejemplo, a la ley aritmética: "La suma de los n primeros números impares es el cuadrado de n". Tenemos que:



211 Confert: *Formulario mathematico*, V, ed. cit., p. 27.

212 R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888. Peano reconoce explícitamente (*Sul concetto di numero*, 1891, reimpresión en *Opere Scelte*, III, ed. cit., pp. 80-109) que sus axiomas proceden de la definición que Dedekind ofrece de "sistema simplemente infinito".

[213] Otra cuestión bien distinta, que dividirá radicalmente a logicistas (Frege-Russell) e intuicionistas (Poincaré-Brouwer), es si este principio es, o no, reducible a términos lógicos.

[214] *Confert* G. Vacca, "Sur le principe d'induction mathematique", en *Revue de Methaphysique et de Morale*, 19 (1911), p. 30-33.

[215] Véase G. Vacca, *Opus cit.*, p. 30. Pascal cita el libro de Mauloryco a propósito de la propiedad: $2 \cdot \frac{a\,(a+1)}{2} - a = a^2$, que Mauloryco demostró mediante dicho método.

[216] Pascal, *Traité du Triangle arithmetique* (en *Oeuvres de B. Pascal*, III, París. 1908, pp. 456-475).

[217] Los historiadores señalan incluso otras fuentes anteriores a Tartaglia. Así, M. Stifel (1486-1567) lo emplea en su *Aritmetica integra* (1544). Y, aun antes, el sabio chino Tchou Chi Ki (1303).

[218] *Confert* M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipziz, 1901-1913.

[219] *La ciencia y la Hipótesis*. Trad. cast. de A. B. Besio y J. Banfi. Espasa-Calpe, Madrid, 1963. Parte I, Cap. 1.

La igualdad $n^2 + (2n - 1) = (n + 1)^2$ constituye una identidad sintética, por cuanto que viene dada a través de unas reglas que no están en el cuadro, sino que se postula en cada caso. No se puede demostrar[220], sino que hay que demostrarla en cada caso.

Esto supone adoptar la posición de los intuicionistas (y de los matemáticos clásicos) frente a los logicistas. El principio supone la *iteración* de una operación un número finito de veces. Y la proposición general resultante, "todo número natural tiene la propiedad P" constituye una asersión hipotética en el sentido de que, si cualquier número *n* nos fuese dado, se podría mostrar que ese número tiene la propiedad P mediante el razonamiento que utiliza sólo los números *0* - *n*. Pero un número natural *n* nos es dado precisamente a través de la construcción, según la definición inductiva. Lo contrario es suponer la clase de los números naturales como algo dado de antemano en posesión de propiedades ya definidas, base en que se apoyan los logicistas para la reducción de la Matemática a la Lógica.

Frege, en efecto, reduce el principio de inducción matemática a lo que él llama lógica sirviéndose de la famosa definición de "el ancestral" de una relación[221], que transforma una definición inductiva en otra explícita mediante el uso de la cuantificación de segundo grado. Así, supuesto que *0* es un número natural y dada la relación ancestral respecto de *0* para la relación "es sucesor de"[222] podemos definir la propiedad "es un número natural" como la propiedad de todos los objetos que poseen la relación ancestral respecto de *0* para la relación "es sucesor de". Una de esas propiedades es "es un número natural", por lo que supone el uso de definiciones "impredicativas"[223]; y la consecuencia final -demasiado incómoda para los logicistas- es que todas las antinomias envuelven una definición impredicativa.

Volvamos ahora a la formulación que Peano ofrece del principio de inducción completa. Su análisis permite observar, por primera vez, bautizada en lenguaje formal la estructura de las antinomias que tanto habrían de molestar a los logicistas. En realidad la formulación que aparece en *Los Principios de la Aritmética* resulta bastante difícil de leer si nos atenemos al significado de los símbolos.

Cabe objetar, en primer lugar, que la fórmula que constituye el axioma 9 no está bien formada. La primera ocurrencia de $\in$ liga dos clases, siendo así que fue introducido espresamente por Peano para representar la relación "ser miembro de", esto es, la relación de individuo a clase. En realidad *k* es considerada como una propiedad que define, a la vez que contiene, a *N*, lo cual constituye una definición impredicativa. Para definir el número natural se presupone las propiedades de los números como existentes en Lógica anteriores a la definición de la secuencia de los números; pero la propiedad de ser un número natural es una de las propiedades presupuestas en la definición.

En segundo lugar, el principio está formulado en términos del Cálculo de Clases, mas, como hemos indicado más arriba, Peano retrotrae las clases a las proposiciones y por ello la última parte de la fórmula, $N \supset k$, que de acuerdo con los signos introducidos significa que la clase *N* está contenida la clase *k*, se convierte en la proposición siguiente: "Todo *N* es *k*". Ciertamente la lectura que antes hemos ofrecido del principio no se halla en *Los Principios de la Aritmética*, sino en el *Formulario*, V (ed. cit., pp. 27-28), en donde las posiciones logicistas de Peano resultan más explícitas.

Cabría responder a estas objeciones que no se puede acusar a Peano de formular una definición impredicativa desde el momento en que su intención no era definir los números, y sus axiomas sobre la Aritmética constituirían definiciones implícitas en donde las variables son susceptibles de ser sustituidas por cualesquiera expresiones que los conviertan en verdaderos[224]. Pero lo

[220] G. Vacca, *Opus cit.*, p. 30, nota 3, observa cómo curiosamente De Morgan comete un círculo vicioso al explicar el principio de inducción matemática mediante el teorema que hemos analizado -teorema que prueba Mauloryco mediante el principio citado.

[221] Dada una relación *R* se da una relación ancestral *R** entre los objetos *x* e *y* si, y sólo si, y posee cada una de las propiedades *R*-hereditaria que posee *x*. Una propiedad es *R*-hereditaria cuando si se predica correctamente de *b* y *a R b*, entonces se predica también correctamente de *a*. Frege define la relación ancestral en los §§ 26 y 29 de la *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Trad. cast. H. Padilla. U. N. A. M., México, 1972. El nombre de "ancestral" se

debe a A. Whitehead y B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge Univ. Press, 1910, Parte II, Sec. e. W. O., Quine (en *Lógica matemática*. Trad. cast. J. Hierro. Revista de Occidente, Madrid, 1972, § 39, pp. 218-224) la denomina "El ancestral".

[222] Confer *Los fundamentos de la Aritmética*. Trad. cast. Ulises Moulines, Laia. Barcelona, 1972. cap. IV.

[223] Russell ("On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types". *Proceedings of the London Mathematical Society*, IV, 1906, 29-53) y Poincare ("Los últimos esfuerzos de los logísticos", en *Ciencia y Método*, ed. cit., pp. 137-151) han señalado, cada uno por su parte, que las antinomias se producen cada vez que se hace uso de ciertas definiciones que denominan "no-predicativas" o "impredicativas". La definición de un objeto *0* es impredicativa cuando *0* es definido por la pertenenecia a una clase (o por el hecho de verificar una propiedad) *P*, a la vez que la definición de la clase (o de la propiedad) *P* depende del objeto *0*.

[224] Así, en el *Formulaire de Mathématiques*, vol. 3, Fratres Bocca. Turín, 1901, p. 44, declara explícitamente que sus axiomas pueden ser interpretados bajo otras interpretaciones además de cuando "0" y "sucesor" se toman en sentido ordinario.

cierto es que, de hecho, el axioma (9) envuelve una generalización acerca de todas las propiedades de los números naturales y con ello nos vemos abocados a la noción cantoriana de conjunto en cuanto totalidad de la que él mismo forma parte. En 1908 E. Zermelo[225] presenta un pequeño número de axiomas a partir de los cuales es posible deducir la teoría de conjuntos sin alterar su base lógica tradicional, pero obviando las antinomias que la nación cantoriana de conjunto acarreaba consigo. De este sistema axiomático, el axioma VI -Axioma de Elección- fue objeto de polémicos debates entre los lógicos y matemáticos. Russell lo denominó "principio multiplicativo", pero Zermelo, quien lo había introducido por primera vez en 1904[226] con el propósito de probar el teorema de "buena ordenación", lo llamó "Axioma de Elección", nombre que, si bien menos afortunado que el de Russell, es el que ha prevalecido. Su formulación es[227]:

> "Un conjunto *S* que puede ser descompuesto en un conjunto de partes disyuntas *A, B, C...*, conteniendo cada una al menos un elemento, posee al menos un subconjunto S_1 que tiene exactamente un elemento en común con cada una de las partes *A, B, C...*, consideradas".

Peano es -junto con Borel- el principial oponente a la admisión de este principio. Las razones que aduce[228] son sencillas. En primer lugar, la falta de prueba; y en segundo lugar, puesto que no es derivable de sus axiomas aritméticos, queda rechazado.

La segunda parte del artículo[229] en que Zermelo presenta una nueva prueba del "teorema buena ordenación" está dedicada a la discusión de las objeciones contra el "axioma de elección". La respuesta de Zermelo a Peano es concluyente: La falta de prueba no equivale a la falta de validez. Sólo nos veríamos obligados a rechazarlo en tal sentido cuando pudiésemos mostrar un caso particular en el que no resulta válido o en el que se deriven consecuencias contradictorias a partir de él.

Y a continuación, argumentando *ad hominem*, escribe: "Incluso el *Formulaire* de Peano (1897), que constituye un intento de reducir toda la matemática a "sologismos" (en el sentido aristotélico-escolástico), reposa totalmente sobre un conjunto de principios no probados, uno de los cuales es equivalente al principio de elección para un conjunto unitario y puede luego ser ampliado silogísticamente a un número arbitrariamente finito de conjuntos. Pero el axioma general que, siguiendo otras investigaciones, me he permitido aplicar a conjuntos arbitrarios no se encuentra, en este sentido, entre los axiomas de Peano"[230].

En definitiva, si el axioma de elección no puede ser refutado, sólo cabe separar los teoremas que exigen necesariamente el axioma mencionado de aquellos que pueden ser probados sin él y que constituyen el dominio de los principios de Peano. Ahora bien, el dominio de los principios de Peano es demasiado estrecho para permitir el desarrollo de la teoría de conjuntos, a la vez que resulta demasiado amplio como para excluir las antinomias. Los defensores de la teoría de conjuntos como una disciplina matemática, no confinada en los dominios de la Lógica, están en condiciones de evitar las antinomias mediante restricciones convenientes de sus axiomas. En 1938 K. Gödel[231] demostró la consistencia del "axioma de elección" y en 1963 P. J. Cohen[232] probó su independencia sin supuesto alguno adicional. De esta forma el sistema axiomático de conjuntos (ampliado en el sistema de Zermelo-Fraenkel), a la par que la "teoría de los tipos" de Russell, constituyen dos respuestas, aunque no definitivas, a la crisis de fundamentos originada por las antinomias.

En cualquier caso, la obra de Peano constituye el punto de partida en la sistematización de la Matemática bajo el método formal axiomático. Actualmente los axiomas de Peano, complementados con la teoría ramificada de los tipos, constituyen la fórmula más común adoptada por los logicistas en su formalización de las Matemáticas, especialmente en lo que respecta a los números naturales.

Los Principios de la Aritmética mantienen un ventaja sobre el *Formulario:* reflejan la génesis de la axiomatización y formalización matemáticas sobre cuya base se apoya la gran empresa acometida por Peano y colaboradores: Recoger en fórmulas precisas, encadena-

[225] "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I", en *Mathematische Annalen*, 65, 1908, pp. 261-268.

[226] "Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", en *Mathematische Annalen*, 59, 1904, pp. 514-516.
[227] "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", en *Mathematische Annalen*, 65, 1908, pp. 107-128.
[228] "Additione" (1906). Reimpresión en *Opere Scelte*, I, ed. cit., 344-358. Especialmente en pgs. 345-348.
[229] "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", *ed. cit.*, pp. 186-189.
[230] *Opus cit.*, p. 187.
[231] "The consistency of the axiom of choice and the generalized continuumhypothesis", en *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24 (1938), pp. 556-557.
[232] *The independence of the axiom of choice*. Stanford Univ., 1963, mecanografiado. La independencia del axioma, pero empleando supuestos de existencia de individuos o conjuntos, había sido probada ya en 1922 por A. Fraenkel, "The notion 'definitive' and independence of the axiom of choice", en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1967, pp. 284-289.

das lógicamente las unas a las otras y acompañadas, la mayor parte de las veces, de sus demostraciones a partir de axiomas, las verdades adquiridas en cada una de las ramas matemáticas. En esta magna tarea el simbolismo aventaja al algoritmo. La razón es clara: los matemáticos italianos no se habían propuesto construir un sistema de Lógica coherente y completo, sino desarrollar una notación útil para poder escribir en símbolos las proposiciones matemáticas. Pero los hechos sobrepasaron las intenciones y el método de Peano, que significó la revolución intelectual de Russell[233], transcendió con mucho los límites de la Matemática llegando a constituir un capítulo inexcusable de la Historia de la Lógica.

[233] B. Russell, "My mental development", en P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*. Northwestern Univ. Press, Illinois, 1971, p. 12.

BIBLIOGRAFIA

Sobre Bolzano:

D. A. Steele, *Introducción* a la traducción inglesa de *Parodoxien des Unendlichen*, Routledge and Kegan Paul, 1950.

Harold R. Smart, "Bolzano's Logic", en *The Philosophical Review*, 53 (1944), pp. 513-533.

G., Preti, "I fondamenti della logica formale pura nella 'Wissenschaftslehre' di B. Bolzano e nelle 'logische Untersunchungen' di E. Husserl", en *Sophia*, 3 (1935), pp. 187-192; 361-375.

Jan Berg, *Bolzano Logic*. Almqvist & Wicksell. Estocolmo, 1962.

H. Scholz, "Die Wissenschaftslehre Bolzanos", en *Abhandlungen des Fries'schen schule*, VI (1937), pp. 399-472.

Y. Bar-Hillel, "Bolzano's Definition of Analytic Propositions", en *Methodos*, II (1960), pp. 32-55.

Y. Bar-Hillel, "Bolzano's Porpositional Logic", en *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, I (1952), pp. 65-98.

J. Danek, *Les projets de Leibniz et de Bolzano; deux sources de la logique contemporaine*. Les Presses de l'Univ. Laval, Québec, 1975.

Jan Berg, "Bolzano's contribution to Logic and Philosophy of Mathematics", en *Logic Collo-*

Über die wissenschafliche Berchtigung einer Begriffsschrift (1882). Reimpreso en *Frege* (1962). Trad. Hugo Padilla, *Opus cit.*, pp. 209-214.

Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (1884). Trad. U. Moulines, *Fundamentos de la aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. Con introducción de C. Imbert. Laia, Barcelona, 1972.

Function und Begriff (1891). Trad. U. Moulines, "Función y concepto", en Frege, G., *Estudios sobre semántica*, Ariel, Barcelona, 1971, pp. 17-47.

Über Begriff und Gegenstand (1892). Trad. U. Moulines en Frege, G., *Estudios sobre semántica*, edic. cit., pp. 99-119.

Über sinn und Bedeutung (1982). Trad. U. Moulines en Frege G., *Estudios sobre semántica*, edic. cit., pp. 49-84.

Kritische Belechtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlensungen über die Algebra der Logik (1895). Riempreso en *Frege, G.* (1966), pp. 92-112.

Grundgesetze der Arthmetik, begriffsschriftlichabgeleitet, 2 vols. (1893 y 1903). Reimpresión en Olms, Hildesheim, 1966. Trad. parcial inglesa de M. Furth, *The basic laws of arimetic*. Univ. of California Press, Berkeley (Calif.), 1964.

qium 76. Nort-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 147-171.

M., Jauris (Comp.), *Bernard Bolzano, 1781-1848*. Edic. Univ. Karlova, Praga, 1981.

De Frege:

Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formellsprache des reinen Denkens (1879). Trad. de Hugo Padilla. *Conceptografía*... U. N. A. M. México, 1972, pp. 5-104.

"Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene", en *Berichte über die Verhanlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenchaften zu Leipzig, Mthematisch-physikalische Kalsse*, 48, 1896, pp. 361-378.

Was ist eine Function (1904). Trad. U. Moulines en Frege G., *Estudios sobre semántica*, edic. cit., pp. 163-176.

Funktion, Begriff, Bedeutung. Edic. G. Patzig. Vondenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2ª edic. 1962.

Logische Untersuchungen. Edic. G. Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.

Kleine Schriften. Edic. I. Angelelli. G Olms, Hildesheim, 1967.

Nachgelassene Schriften und winssenschaftlicher Briefwechsel. Edic. de H. Hermes et alii. Felix Meiner, Hamburg, 1969. Trad. ingl. de H. Kaal, *Posthumous writings*. Blackwell, Oxford, 1979.

Sobre Frege:

Angelelli, I., *Studies on Gottlob Frege and traditional philosophy*. Reidel, Dordrecht, 1967.

Birjukov, B. V., *Two Soviet studies on Frege*. Trad. ingl. I. Angelelli, Blackwell, Oxford, 1964.

Bell, D., *Frege's Theory of Judgement*. Clarendon Press. Oxford, 1979.

Dummett, M., *Frege. Philosophy of language*. Duckworth, Londres, 1973.

Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1967.

Jourdain, P. E. B., "The development of the theories of Mathematical logic and the principles of Mathematics". En *Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, 43 (1912), pp. 219-69.

Jourdain, P. E. B., "The function of symbolism in mathematical logic", en *Scientia*, 21, 1917, pp. 1-12.

Klemke, E. D. (comp.), *Essays on Frege*. Univ. Illinois Press, Urbana, 1968.

Kneale, W., "Gottlob Frege y la lógica matemática", en Ayer, Kneale y otros, *La revolución en filosofía*, trad. Montserrat Macao, Revista de Occidente, Madrid, 1958, pp. 33-49.

Kneale, W. y M., "La lógica general de Frege", en *El desarrollo de lógica*, Edic. cit., pp. 441-474.

Largeault, J., *Logique et philosophie chez Frege*. Nauwlaerts, París - Lovaina, 1970.

Mosterín, J., "La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático", en *Teorema*, 10 (1980), pp. 287-306.

Nidditch, P., "Peano and the recognition of Frege", en *Mind*, 72 (1963), pp. 103-110.

Quine, W. V., "On Frege's way out", en *Mind*, LXIV (1955), pp. 145-159.

Thiel, Ch., *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege*. Trad. J. Sanmartín, Tecnos, Madrid, 1972.

Walker, J. D. B., *A study of Frege*. Blackwell, Oxford, 1965.

Wells, R. S., "Frege's ontology", en *The review of metaph*. 4, 1951, pp. 537-73.

Wienpahl, P. D., "Frege'Sinn und Bedeutung", en *Mind*, 59, 1950, pp. 483-94.

Sobre de Peano

Cassina, U.:

- "Su la logica matematica di G. Peano", en *Bolletino della Unione matematica intaliana*, 12 (1933), pp. 57-65.
- "L'opera scientifica di Giuseppe Peano", en *Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano*, 7 (1933), pp. 129-38.
- "L'oeuvre philosophique de G. Peano", en *Revue de métaphysique et de morale*, 40 (1933), pp. 481-91.
- "Parallelo fra la logica teoretica di Hilbert e quella di Peano", en *Periodico di matematiche*, 17 (1937), pp. 129-38.
- "Ideografia e logica matematica", en *Periodico di matematiche*, 30 (1952), pp. 65-78.
- "L'ideographie de Peano du point de vue de la theorie du language", en *Rivista di matematica della Universita di Parma*, 4 (1953), pp. 195-205.
- *Critica dei principi della matematica e questioni di logica*. Edic. Cremonese, Roma, 1961; recoge varios de los trabajos antes citados.

Aimonetto, I., "Il conetto di numero naturale in Frege, Dedekind e Peano", en *Filosofia* (Turin), 20 (1969), pp. 579-606.

Couturat, L., "La logique mathematique de M. Peano", en *Revue de métaphysique et de morale*, 7 (1899), pp. 616-46.

Feys, F., "Peano et Burali-Forti precurseurs de la logique combinatoire", en *Actes du Xleme Congres international de philosophie*, vol. 5, Amsterdam, 1953, pp. 70-72.

Geymonat, L., "I fondamenti dell'aritmetica secondo Peano e le obiezioni 'filosofiche' di B. Russell", en A. Terracini, *opus* de 1955 (ver luego).

(1933), pp. 145-159.

Russell, B., "The logical and arithmetical doctrines of Frege", como Appendix A, en *The principles of mathematics*, I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1903. Reimpresión en G. Allen, Londres, 1972, pp. 501-52.

Schirn, M. (Comp.), *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik*. Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1975.

Smart, H. R., "Frege's logic", en *The philosophical review*, 54, 1945, pp. 489-105.

Geymonat, L., "Peano e la sorti della logica en Italia", en *Bolletino della Unione matematica italiana*, 14 (1959), pp. 109-118.

Kennedy, H. C., *Life and works of G. Peano*. Reidel, Dordrecht, 1980.

Nidditch, P., "Peano and the recognition of Frege", en *Mind*, 72 (1963), pp. 103-110.

Padoa, A., "Il contributo di G. Peano all'ideografia logica", en *Periodico di matematiche*, 13 (1933), pp. 15-22.

Padoa, A., "Ce que la logique doit à Peano", en *Actualités scientifiques et industrielles*, 395 (1936), pp. 31-37.

Terracini, A. (ed.), *In Memoria di G. Peano*, Cuneo (Turín), 1955.

Vailati, G., "La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les ecrits de M. J. Peano", en *Revue de métaphysique et de morale*, 86 (1899), pp. 86-102.

Velarde, J., Introducción (y bio-bibliografía de G. Peano) a su tradc. de Peano, *Los principios de la aritmética*. Pentalfa, Oviedo, 1979.

XIV. Russell

Bertrand Arthur William Russell nace en Trelleck, Gales, en 1872. Nieto de lord John Russell, quien por dos veces fue primer ministro con la reina Victoria. Cuando tenía dos años murieron sus padres, y cuando tenía seis murió su abuelo lord John Russell que se había hecho cargo de la tutela de Bertrand y de su hermano Frank. Educado en un ambiente puritano, tomó contacto con la Filosofía a través de los escritos de John Stuart Mill, amigo íntimo de sus padres y padrino suyo. En 1889 obtiene una beca para estudiar en la Universidad de Cambridge. Ingresa en el Trinity College en 1890, donde cursa tres años de Matemáticas y uno, después, de Filosofía, hasta 1894, fecha en que supera el examen en Ciencias Morales. En el Trinity College es *fellow* de 1895 a 1901, y *lecturer* de Filosofía desde 1910 hasta 1916, fecha en que es cesado en su cargo por sus actividades pacifistas y su postura crítica, lo cual le volverá a traer problemas con el gobierno británico, primero, y con el norteamericano después. En su larga y fecunda vida se ocupó de manera no tangencial, sino especializada de: Matemáticas, Lógica, Historia de la Filosofía, Política, Moral, Educación.

Sus principales aportaciones a la Lógica y a Filosofía de la Matemática las hace entre 1900 y 1910. El año 1900, como él mismo confiesa[1], fue el más importante en la evolución de su pensamiento filosófico; y el acontecimiento más importante de ese año, la asistencia, en compañía de Whitehead, al Congreso internacional de Filosofía en París. Allí quedó impresionado por la precisión y el rigor lógico que Peano y sus discípulos mostraban en las discusiones. Pidió a Peano sus obras y decidió adoptar su técnica en lógica matemática para dedicar, junto con Whitehead, la mayor parte del tiempo hasta 1910, a lo que finalmente resultó ser *Principia Mathematica*. No obstante, Russell fue publicando en ese período las investigaciones que iba realizando en el campo de la Lógica.

La primera obra de Russell sobre Filosofía es *An Essay on the foundations of Geometry* (1897), la cual constituía una reelaboración de su disertación de colegiatura (1895). En ella sigue el método kantiano de preguntarse por (y buscar respuesta a) las condiciones de posibilidad de la Geometría. Los axiomas de la Geometría expresan las condiciones de la experiencia; tienen, pues, un origen trascendental y son, por ello, necesarios: "Entre los axiomas de las geometrías, unos son deducidos del concepto de forma de exterioridad y son llamados a *'a priori'*. Son éstos los únicos que son necesariamente verdaderos de todo universo donde la experiencia es posible" (§ 181).

Hacia 1898, abandona el idealismo germano, tanto el de Kant como el de Hegel, y por influencia de G. E. Moore adopta una forma de realismo platónico; ello viene propiciado por su deseo de alcanzar una prueba de la verdad objetiva de las Matemáticas, concediendo a éstas independencia respecto de la mente humana, en tanto que la dialéctica hegeliana defendía que ninguna de las ciencias es completamente cierta, ya que todas dependen de alguna abstracción, y toda abstracción conduce, antes o después, a contradicciones. Por otra parte, Russell estaba convencido de que las proposiciones matemáticas son esencialmente relacionales y esta forma proposicional no encajaba en el idealismo hegeliano[2].

[1] *My mental development*, en P. A. Schilpp, *The Philosophy of B. Russell*, ed. cit., p. 12.

[2] "Una casualidad me llevó por esta época al estudio de Leibniz y llegué a la conclusión... de que un gran número de sus opiniones más características se debía a la teoría, puramente lógica, de que toda proposición consta de sujeto y predicado. Esta teoría es compartida por Leibniz con Spinoza, Hegel y el Sr. Bradley; y me parecía que, de rechazarla, la fundamentación de la metafísica por parte de todos estos filósofos se vendría abajo por completo" *(Atomismo Lógico*, en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., trad. cast., p. 456-57).

Las relaciones adquirirán una importancia fundamental en la construcción filosófica y matemática de Russell. Por eso en su libro sobre Leibniz *(A critical examination of the philosophy of Leibniz*, 1900) trata de resaltar la importancia de los hechos y proposiciones de relación, en cuanto opuestos a los hechos consistentes en sustancia y atributo y a las proposiciones de la forma sujeto-predicado.

Insatisfecho con las explicaciones, por entonces para él conocidas, sobre la naturaleza de la Matemática -la de Kant, que la considera como conjunto de juicios sintéticos *a priori;* y la Mill, que hace de ella un conjunto de generalizaciones empíricas- Russell se pone en la línea de Frege (de quien tuvo conocimiento más tarde) y busca asegurar la verdad y necesidad de la Matemática asentando ésta sobre la Lógica, o mejor, identificando ambas y buscando para ellas un fundamento inamovible. Esta es la tarea que acomete en su primera gran obra sobre Lógica y Fundamentos: *The principles of Mathematics* (1903).

1. Definición de número

La tesis fundamental mantenida en este libro es que la Matemática y la Lógica son idénticas.

Esta tesis logicista (expuesta ya con anterioridad por Frege, en 1884) mantiene la reducibilidad de la Matemática a la Lógica. Su desarollo comprende dos partes:

(a) Que los *conceptos* de la Matemática son derivables de conceptos lógicos a través de definiciones explícitas.

(b) Que los *teoremas* de la Matemática son derivabes de axiomas lógicos a través de una deducción puramente lógica.

En los *Principles* Russell comienza definiendo la Matemática Pura como "la clase de todas las proposiciones de la forma '*p* implica *q*', donde *p* y *q* son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni *q* ni *p* contienen ninguna constante, excepto las constantes lógicas"[3]. En la *Introducción* a la segunda edición de

otras. Con todo, la implicación (tanto la material como la formal) ocupa un lugar preferente en el cálculo proposicional que presenta en esta obra.

Otra corrección necesaria es sustituir "proposiciones" por "funciones proposicionales" cuando dice: "donde *p* y *q* son proposiciones que contienen una o más variables". En efecto, serán las funciones proposicionales las expresiones que contienen variables, y que se convierten en proposiciones cuando se asignan valores a las variables. Pero por entonces no tenía Russell definidas las funciones proposicionales.

Finalmente, la cláusula de que "ni *p* ni *q* contienen ninguna constante, excepto las constantes lógicas" resulta insuficiente: primero, porque, si bien la ausencia de constantes no-lógicas resulta una condición necesaria para el carácter matemático de una proposición, no es condición suficiente: Por ej., la proposición "existen por la menos tres cosas en el mundo" puede formularse en términos puramente lógicos (sin otras constantes que las lógicas) y, sin embargo, no puede probarse lógicamente que por lo menos existen tres individuos. Segundo, porque la noción de "constante lógica" es compleja y encierrra varios problemas: Primero, ¿existen tales constantes? Segundo, ¿cómo se definen? Tercero, ¿figuran en las proposiciones de la lógica? La respuesta que Russell da al primero se ajusta al más ordoxo platonismo. "Cuando escribí los *Principles*, compartía con Frege la creencia en la realidad platónica de los números, los cuales, en mi imaginación, personificaban el dominio eterno del Ser"[4]. Partía Russell de un análisis lingüístico: hay símbolos en las proposiciones lógicas, con un valor constante con respecto a la significación de tales proposiciones. Tales son, por ejemplo, "o", "y", "no", "si-entonces", "la clase vacía", "0", "1", "2"... Y opinaba en aquella época (con "una especie de inocencia matutina") que si un término contribuye al significado de una frase, algo debe haber que el término signifique, esto es, cada término tiene su correlato no-lingüístico en la realidad. Así: "llamáre 'término' a todo lo que pueda ser objeto de pensamiento, o pueda figurar en cualquier proposición verdadera o falsa, o pueda contarse como 'uno'. Así, pues, es esta la palabra más amplia en el vocabulario fisosófico. Usaré como sinónimo de ella las palabras unidad, individuo y enti-

los *Principles* (1937) advierte Russell que esta definición requiere varios cambios: en primer lugar, la forma implicativa no es la única que pueden tomar las proposiciones matemáticas: la implicación sólo es una entre las funciones de verdad y no más importante que

dad. Las dos primeras destacan el hecho de que todo término es 'uno', mientras que la tercera deriva del hecho de que todo término tiene que ser, es decir, 'es' en algún sentido. Un hombre, un momento, un número, una clase, una relación, una quimera o cualquier otra

[3] Trad. castellana en la edic. cit., p. 393.
[4] *Ibidem*, p. 383.

cosa que pueda mencionarse, es con seguridad un término; y siempre debe ser falso el negar que una cosa tal sea un término... Todo término, para comenzar, es un sujeto lógico... Además, todo término es inmutable o indestructible"[5].

Con esta doctrina, que compartía con Meinong, acomete Russell la definición de número cardinal. Se sirve para ello de ciertas nociones que Cantor había ya anticipado en su teoría de conjuntos, tales como "clases semejantes" e "igual número que"; siendo ésta una noción más primitiva que la de "número". Llega a la difinición de número como una clase de clases semejantes a través de los pasos siguientes:

(1) Dos clases tienen el mismo número si es posible establecer entre sus miembros una correspondencia biunívoca, de modo que a un miembro cualquiera de la una corresponde un miembro, y sólo uno, de la otra.

Podría objetarse, añade Russell[6], que la definición de relación biunívoca presupone ya referencia al número 1. Pero no es así. Una relación es biunívoca cuando si x y x' tienen la relación en cuentión con y, entonces x y x' son idénticas; en tanto que si x tiene esa relación con y e y', entonces y e y' son idénticas. Y así es posible definir qué se entiende por relación biunívoca sin acudir a la noción de unidad.

(2) Cuando dos clases tienen el mismo número, se dice que son "semejantes".

(3) No cabe prescindir de la noción "el mismo número de dos clases" sustituyéndola por la noción de "contar", porque el contar (para comprobar cuál es el número de dichas clases) sólo es aplicable a las clases que pueden ordenarse (que no son todas las clases); y a las que son finitas.

(4) No es satisfactoria la definición de los números por "abstracción", (debida a Peano)[7], según la cual los números son propiedades de clases, en el sentido siguiente: Dado que la relación de semejanza entre clases tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, estas propiedades, según Peano y el sentido común, indican que cuando está establecida la anterior relación estos dos términos, tienen cierta propiedad en común y Los números, así entendidos, son predicables de clases: un número es la propiedad que esta clase tiene en común con las clases semejantes a ella; y en este sentido se dice que un número cardinal es obtenido "por abstracción" a partir de las clases que poseen dicha propiedad.

Para Russell este tipo de definición por abstracción adolece de un defecto fatal: no demuestra que satisfaga la definición un solo objeto. Lo que en este caso significa "tener una propiedad común", es que cualquier clase tiene con respecto a una cierta entidad, su número, una relación que no tiene con respecto a nada más, y que todas las clases semejantes (y no otras entidades) tienen con respecto a dicho número. Esto es, hay una relación pluriunívoca de clases. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ a su número $N, N', N'' \ldots$ Ahora el conjunto de entidades: N, N', N'', es el conjunto de los números; y si existen muchos conjuntos de entidades N, N', N'', (y es demostrable que existe un número infinito de ellos), toda clase tendrá varios números, y la definición falla radicalmente al definir "el" número de una clase.

La definición por abstracción parte de la consideración de una propiedad común a varios objetos (que forman una clase), y si bien para muchas proposiciones una clase y una propiedad definidora de la misma son prácticamente intercambiables, hay, sin embargo, diferencias que en casos como el anterior conducen a callejones sin salida. La principal es que sólo existe una clase compuesta por un determinado conjunto de elementos, en tanto que hay muchas propiedades diferentes por las que puede definirse una clase. De ahí que, en el caso anterior, no hay razones para suponer que las clases semejantes posean exactamente *una* sola propiedad común y no, más bien, *un conjunto* de propiedades. Si el número es entendido como una propiedad común definidora de un haz o clase de clases, ¿cómo saber si dos clases pertenecen al mismo haz? Sólo sabiendo el número de esas clases, y para ello sólo en conjuntos finitos podemos utilizar el contar, pero quedamos impotentes, y desarmados lógicamente, ante conjuntos infinitos.

(5) La regla "considerar la propiedad común que poseen tales y cuales objetos", que da lugar a la definición por abastracción (y que resulta un proceso no válido lógicamente) ha de ser sustituida por ésta otra:

viceversa, y esa propiedad común es llamada su número.

"considerar la clase constituida por todos los objetos que

[5] *Ibidem*, p. 428.
[6] *Ibidem*, p. 485.
[7] "Il y a des idées, qu'on obtient par abstraction, et dont s'enrichissent incessamment les sciencies mathématiques, qu'on ne peut pas définir sous la forme énoncée. Soit u un objet; par abstraction on déduit un nouvel objet φu; on ne peut pas former une égalité φu = expression connue, car φu est un objet de nature différente de tous ceux qu'on a jusqu'à présente considerés. Alors on définit l'egalité, et l'on pose $hu, v.\supset : \varphi u = \varphi v. = . p u, v$; ou $h u, v$ est l'hypothèse sur les objets u et v; $\varphi u = \varphi v$ est l'égalité qu'on définit". (*Notations de Logique Mathematique. Introduction au Formulaire de mathématiques*, en *opere Scelte*, vol. II, ed. cit., p. 167-68).

poseen una relación dada entre sí". La definición "por abstracción" de número ha de ser sustituida por la definición "extensional" siguiente:

El número de una clase es la clase de todas las clases semejantes a la clase dada. Un número es algo que caracteriza a determinadas colecciones (clases): aquellas que tienen tal número. Y un tal número particular no es idéntico a una colección (clase) de elementos que tenga dicho número: el número 3 no es idéntico al trío formado por Juan, Pedro y Andrés. El número 3 es algo que estas colecciones (los tríos) tienen en común y que las distingue de otras colecciones. Si en una habitación hay 3 sillas cabe establecer una correspondencia biunívoca entre la clase de las sillas y otras clases: la compuesta por Juan, Pedro y Andrés; la compuesta por María, Juana y Josefa, etc. Todas estas clases son semejantes entre sí (puesto que se establece una correspondencia binunívoca entre ellas). Forman un haz (clase): el de los tríos, frente a otros haces (clases): el dos duos, el de las clases con un elemento, etc. Cada haz (clase) tiene una propiedad común y que lo distingue de los demás. Y esa propiedad común es que tienen el mismo número. Así, el haz (la clase) de los tríos tiene como propiedad común el número 3.

En consecuencia, un número, en general, es cualquiera de los haces en que las clases se agrupan por semejanza (por tener el mismo número). Un número resulta ser, así, un haz (una clase) de clases tales que dos cualesquiera de ellas son semejantes entre sí, y ninguna otra fuera del haz sea semejante a ninguna de las incluidas en el haz. O dicho de otro modo: un número es cualquier clase que sea el número de alguna clase.

En *The principles...* los números son clases; y las clases, como las relaciones, las constantes lógicas, etc., con reales, poseen una entidad actual. Contrariamente a Peano, Russell se negó a identificar la clase con el concepto-clase, debido a su interpretación extensional de la clase: dos clases con los mismos elementos son iguales. Puede, en cambio, que existan varios predicados comunes a una misma clase. La clase, al no ser un concepto, es la suma de sus elementos. Su definición (y la de número) resulta, así, una definición ostensiva. Por influencia de Meinong, quedó vinculado Russell, por aquella época, a un realismo exagerado que le llevaba a admitir la realidad de todo lo que fuera significado por

das por E. Moore y por él mismo. Las proposiciones son complejos atemporales de términos que poseen una peculiar unidad interna y constituyen, como para Moore, los acusativos objetivos de los actos proposicionales. Estos acusativos objetivos tienen ser: "el objeto de un pensamiento, aun cuando ese objeto no existe, tiene un ser que en modo alguno es dependiente de su ser-un-objeto-de-pensamiento". Por eso las proposiciones tienen ser: "hay proposiciones verdaderas y proposiciones falsas, como hay rosas blancas y rosas rojas"[8].

El resultado de esta teoría realista es un mundo excesivamente poblado: contiene no sólo todo aquello que es el caso -hechos-, sino también un infinito número de entidades que no son el caso -complejos no factuales.

Como decía Russell, explicando su abondono de esta teoría, "es increible que haya en el mundo entidades no dependientes de la existencia de juicios, que pueden ser descritos como falsedades objetivas... Sentimos que no habría falsedad si no hubiese mentes para cometer errores"[9]. Este sentimiento fue lo que impelió a Russell a abandonar, o, al menos, limitar su primitivo realismo, lo que consigue en gran medida en 1905 con su trabajo "On denoting", la contribución más importante a la lógica, según su autor[10].

2. Teoría de las descripciones

Con la teoría de las descripciones pretende Russell resolver el problema de las palabras que, contribuyendo al significado de una frase, no tienen significación aisladamente (caso de los llamados "sincategoremáticos") o no denotan objeto alguno, tales como "Centauro", "Pegaso", etc.

Este problema viene desde antiguo; Russell se refiere, en particular a las teorías de Meinong y Frege. Según Russell, el error del análisis de Meinong consiste en suponer que toda expresión denotativa gramaticalmente correcta representa un *objeto*. Ante expresiones tales como "el actual rey de Francia", "la montaña de oro", etc. nos encontramos con que no se refieren a nada existente, pero, por otra parte, es imposible dejar de reconocer que aquello a que se refieren es una entidad. Como no es de tipo real, será de

cualquier palabra que aparezca en una frase significativa. En su trabajo "Meinong's Theory of Complexes and Assumptions" (1904) Russell identifica los "objetivos" de Meinong con las proposiciones tal como eran defendi-

tipo ideal. Pero con ello se pretende, por ejemplo, que el actual rey de Francia, por una parte existe y, por otra, no existe. Esta situación amenaza con destruir el principio de Contradicción.

---

[8] En *Mind*, ed. cit., p. 523.
[9] *Philosophical Essays*. Longmans, Nueva York, 1910, p. 170.
[10] *La evolución de mi pensamiento...*, ed. cit., p. 87.

Esto es lo que, a juicio de Russell, intenta resolver Frege con la distinción entre *Sinn* (sentido) y *Bedeutung* (denotación), de modo que puede haber significaciones *(Sinn)* sin que haya objetos. Pero ¿Qué tipo de entidades son estas significaciones? No es ni el objeto *(Bedeutung)*, ni la representación que del objeto tenemos y que es totalmente subjetiva (*Vorstellung*): "Entre ambas se halla el sentido, que ciertamente ya no es subjetivo como la representación, pero, con todo, tampoco es el objeto mismo"[11]. Existe, pues, un tercer reino de entidades abstractas que son las significaciones.

Esta teoría tiene, según Russell, la ventaja sobre la de Meinong de no oponerse al principio de Contradicción, pero Russell la reduce al absurdo mostrando que es imposible referirse al sentido de una expresión referencial, porque en ese caso, (en la expresión "el sentido de 'gata'", por ejemplo), si se hiciera una referencia genuina al sentido en cuestión, éste se convertiría en un componente de la proposición, figuraría en ésta, y, si el sentido figura en una proposición, entonces la proposición se refiere al referente de ese sentido, o sea, a la gata, y de ese modo no lograremos referirnos al sentido que deseábamos[12].

Lo que es claro es que la teoría de las descripciones intenta dar cuenta de la significación de las expresiones definidas sin que necesariamente exista el objeto al que se refieren. Se pueden dar tres casos:

> "(1) Una expresión puede ser denotativa y, sin embargo, no denotar cosa alguna; por ejemplo, "el actual rey de Francia".
> (2) Una expresión puede denotar un objeto determinado; por ejemplo, "la actual reina de Inglaterra" denota una determinada mujer.
> (3) Una expresión puede denotar algo con un cierto margen de vaguedad; por ejemplo, "un hombre" no denota muchos hombres, sino un hombre determinado"[13].

Ante esto, la teoría de las descripiciones consiste en un método de traducción lógica: Cada oración que contiene una frase descriptiva puede ser traducida a otra que tiene el mismo significado, aunque normalmente una forma gramatical más compleja. La finalidad de este análisis es resolver los problemas planteados al denotacionismo, tanto al de Meinong y Frege como al de Russell de *The Principles*, ya que esta doctrina conducía a la admisión de entes ideales. El problema planteado partía de estas premisas[14]:

(1) Una tesis general sobre la significación, según la cual, para que una expresión sea significativa debe haber un *denotatum* y éste constituye el significado de la expresión.

(2) Una interpretación de las descripciones definidas como expresiones cuya función es denotar un individuo u objeto particular.

(3) El reconocimiento de que las proposiciones en las que dichas descripciones figuran como sujetos gramaticales son significativas.

La posición de Russell en la teoría de las descripciones consiste en admitir (1) y (3) pero negar (2). A ese efecto, la dificultad estriba en el supuesto tácito de que las frases denotativas tienen las mismas propiedades que los nombres. Este supuesto erróneo se basaba en que tanto las expresiones definidas como los nombres desempeñan por igual la función de sujeto gramatical. La misma estructura gramátical tiene la oración "Sócrates es sabio", que "el actual rey de Francia es sabio". Según la teoría de los nombres, estos deben tener un *denotatum*, en lo que consiste su significado. Si las expresiones definidas (descripciones definidas) funcionan lo mismo que los nombres, deben tener un *denotatum*, en lo que consiste su significado, pero entonces el principio de *tertio excluso* queda también de alguna manera afectado, porque si la frase denotativa "el actual rey de Francia" denota un individuo y si el principio de *tertio excluso* es válido, una de estas dos proposiciones "el actual rey de Francia es calvo" y "el actual rey de Francia no es calvo" debe ser verdadera. No obstante, si enumerásemos las cosas que en el mundo son calvas y a continuación hiciésemos lo mismo con las que no son calvas, no hallaríamos al acutal rey de Francia en ninguno de ambos conjuntos"[15].

---

[11] Frege, "Sobre el sentido y la referencia", en *Estudios sobre semántica*, Ariel quincenal, Barcelona, 1971, p. 55.

[12] *Confert* Searle, "Las objecciones de Russell a la teoría de Frege sobre el sentido y la denotación", en la compilación de T. M. Simpson, *Semántica filosófica; problemas y discusiones*, Siglo XXI, Madrid, 1973, pp. 49-55. Este autor sostiene que Russell matinterpretó a Frege: "Sus defectos (los argumentos de Russell) surgen de una presentación inicial errónea de la posición de Frege, combinada con una confusión persistente entre las nociones de figurar como parte de una proposición (ser un componente de una proposición) y la de ser algo a lo cual una proposición se refiere. La combinación de ambas cosas conduce a lo que es de hecho una negación de la distinción misma que Frege está tratando de establecer; y es sólo a partir de esta negación, y no a partir de la tesis original de Frege, pueden derivarse las conclusiones de Russell" (p. 53-54).

[13] Russell, "Sobre la denotación", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 54.

[14] *Confert* A. Rossi, *Lenguaje y significado*. Siglo XXI, México, 1969, pp. 86 y ss.

[15] "Sobre la Denotación", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 63.

Ante esto, Russell, o tiene que buscar una teoría diferente del uso de los nombres, o abandonar el supuesto de que las descripiciones definidas tienen las mismas propiedades que los nombres. Es esta segunda postura la que adopta. El método consistirá en una traducción del lenguaje normal al lenguaje lógico, de modo que si bien desde el punto de vista gramatical, tanto "Cervantes era manco" como "el autor del Quijote era manco" tienen la misma estructura, a saber, tanto la descripción definida "el autor del Quijote" como "Cervantes" funcionan como sujeto gramatical, no ocurre lo mismo desde el punto de vista lógico. Es función del análisis descubrir la forma lógica, y es entonces, traducidas a forma lógica, cuando ambas expresiones aparecen con una estructura diferente. En "el autor del Quijote era manco", "el autor del Quijote" es un sujeto gramatical, pero no el sujeto lógico; de modo que la proposición que dicha frase expresa no es del tipo sujeto-predicado, sino una clase compleja de proposiciones existenciales:

(1) "x es el autor del Quijote", no siempre es falsa

$$(\exists x)\ \varphi x$$

(2) "si x e y son los autores del Quijote, x e y son idénticos", es siempre verdadera:

$$(x)\ (y)\ [(\varphi x\ \&\ \varphi y) \rightarrow y = x]$$

(3) "si x es el autor del Quijote, x era manco", es siempre verdadera:

$$(x)\ (\varphi x \rightarrow \varphi x)$$

de modo que la frase completa quedaría traducida al lenguaje lógico de esta manera:

$$(\exists x)\ [\varphi x\ \&\ (y)\ (\varphi y) \rightarrow y = x)\ \&\ \Psi x]$$

Las consecuencias de este análisis son: Primero, la eliminación del sujeto gramatical, el cual queda reducido ahora a predicados y variables cuantificadas. Segundo, la reducción de la proposición original a un conjunto de proposiciones existenciales.

Respecto al primer punto, el mérito de este análisis consiste en solucionar el problema planteado a los denotacionistas en lo tocante a los entes ideales. Recordemos que, según esta teoría de la significación, palabras que se emplean no impliquen la existencia de ningún objeto o individuo, pese a ser significativos. Ahora la referenica recae sobre las variables individuales ligadas lo cual viene indicado en el lenguaje ordinario mediante las palabras "todo", "algún", etc.[16] Esta es la dirección que tomará Quine llegando a reducir todo a variables; no sólo las descripciones definidas, sino también los nombres. Este procedimiento consistirá en considerar a los nombres como descripciones encubiertas, con lo cual se soluciona el problema de la existencia: "Ser es ser el valor de una variable"[17].

Por lo que toca al segundo punto, el análisis llevado a cabo hace que las proposiciones de este tipo sean verdaderas o falsas, ya que en una proposición como "El autor del Quijote era manco" estaríamos afirmando:

(1) cuando menos una persona fue el autor del Quijote

(2) cuando más una persona fue el autor del Quijote

(3) quienquiera que fuese la persona que fue el autor del Quijote, esa persona era manca,

de manera que si no se cumple lo afirmado en (1), la proposición resulta falsa: En efecto.

$$-(\exists x)\ \varphi x \rightarrow -(\exists x)\ [\varphi x\ \&\ (y)\ (\varphi y \rightarrow y = x\ \&\ \Psi x]$$

Finalmente, conviene resaltar que este análisis resulta independiente de la teoría general sobre la significación (que una expresión tenga un *denotatum* para ser significativa). De modo que se puede atacar ésta, sin que la teoría de las descripciones quede afectada. Russell podría aceptar la crítica a su teoría de la significación y seguir vigente el presente análisis. Lo único que tendría que cambiar será la teoría de los nombres lógicamente propios. Esto debe tenerse en cuenta a la hora de analizar la crítica de Strawson[18] y la posición de Quine.

Russell demuestra que las descripciones definidas, aun funcionando como sujetos gramaticales, no deben interpretarse según el modelo de los nombres; por tanto niega que las proposiciones, en que aquéllas intervienen, tengan la forma sujeto-predicado, y el aspecto existencial de su análisis muestra que, sin embargo, son siempre verdaderas o falsas. Esto es debido a que la existencia es considerada como una propiedad de las funciones proposicionales.

para que hubiese significado tenía que haber *denotatum*. Ahora se ha conseguido que los símbolos o las

Es aquí donde se plantea la polémica con Strawson: Según Russell "el presente rey de Francia

---

16 Quine, *Desde un punto de vista lógico*, ed. cit., cap. I; y *Palabra y Objeto*, ed. cit., cap. V: "En la traducción de Russell... la carga de la referencia objetiva impuesta antes a la frase descriptiva se desplaza ahora sobre las palabras del tipo que los lógicos llaman variables ligadas.

17 Quine, *Desde un punto de vista lógico*, ed. cit., p. 42.

18 Strawson, "On Referring", *Mind*, vol. LIX, nº 235, 1950, pp. 320-344.

es sabio" es una proposición significativa, pero falsa. Significativa, porque tiene valor de verdad. Falsa, porque no cumple el requisito (1) del análisis.

Strawson distingue entre: (A1) una sentencia; (A2) uso de una sentencia; (A3) usanza *(utterance)* de una sentencia. Y (B1) expresión; (B2) uso de una expresión; (B3) usanza *(utterance)* de una expresión[19].

Hay dos errores, según Strawson, en la teoría de Russell:

(a) Creer que todo el que usara ahora la sentencia "el presente rey de Francia es sabio" estaría haciendo una afirmación verdadera o falsa.

(b) Creer que parte de lo que él estaría afirmando sería que existe actualmente uno y sólo un rey en Francia.

El significado *(Meaning)* es función de la sentencia o expresión; *mentioning* y *referring*, y verdad y falsedad, son funciones del uso de la sentencia o expresión[20]. De modo que "dar el significado de una expresión o sentencia es dar las directrices generales de su uso de cara a la formación de enunciados verdaderos o falsos"[21]. Ahora bien, el uso de una sentencia puede ser genuino o espurio, y cuando una sentencia es usada espuriamente, no es ni verdadera ni falsa.

Para sostener esto hay que rechazar los puntos (1) y (2) del análisis de Russell. Strawson sostiene que la existencia del objeto al cual las descripciones definidas tienden a referirse, no está implícitamente afirmada, sino *presupuesta: "S* presupone *S'* si *S'* es condición necesaria de la verdad o falsedad de *S"*; "el presente rey de Francia es sabio" *implica* de alguna manera que hay un rey en Francia, pero es un sentido especial y raro de implicar; no puede ser "entails" (o implicación lógica)"[22], porque en ese caso tendríamos que si $S \rightarrow S'$, juntar *S* y negación de *S'* sería una contradicción. Pero en *S* presupone *S'*, la unión de *S* con la negación de *S'* sería un absurdo lógico, pero no una contradicción.

Piensa Strawson que esta forma de plantear el análisis refleja mejor el lenguaje ordinario. Para ello acude a ejemplos; y es indudable que hay contextos que ejemplifican la teoría de Strawson. Pero en favor de Russell hemos de decir:

Que la teoría de Russell es más amplia que la de Strawson: a) no se reduce al lenguaje ordinario, donde se plantea la discusión con Strawson; b) se aplica no sólo a proposiciones como "el autor del Quijote era manco", sino también a proposiciones como "el autor del Quijote existe" a cuyos casos la crítica de Strawson no afecta; c) aun cuando Strawson tuviese razón, en el sentido de que Teoría de la Presuposición "reflejara" siempre con mayor precisión el lenguaje ordinario, el análisis de Russell sobre la afirmación de existencia no resultaría afectado[23].

El problema principal reside en considerar, o no, implícitamente definida la existencia del objeto al que la descripción definida se refiere. Strawson lo niega, pero la Teoría de la Presuposición ha sido cuestionada[24] e incluso rechazada[25]. Russell lo admite; su postura proviene, como hemos dicho anteriormente, de considerar a la existencia como una propiedad de las funciones proposicionales. Esto también es discutible; para Ayer, "Russell está equivocado al creer que la existencia debe siempre considerarse una propiedad de las funciones proposicionales"[26].

Atribuir existencia a una función proposicional es atribuirle la propiedad de ser satisfacible. En símbolos, "existencia" no intervendría como predicado, sino envuelta en el cuantificador particular o "existencial": $(\exists x)$ φx: Hay al menos un *x* para el que función φ es verdadera.

De ahí que para Russell sólo tenga sentido cuestionar la existencia de las descripciones, ya que éstas son funciones proposicionales y por tanto podrán convertirse en verdaderas o falsas, pero no tiene sentido cuestionar la existencia de los nombres: "Decir que no existen (los nombres) es algo desprovisto, en rigor, de sentido; pero decir que existen también carece rigurosamente de sentido. Es únicamente de las funciones proposicionales de las que ustedes pueden afirmar o negar existencia"[27]. Si deseáramos atribuir existencia a un objeto nombrado, tendríamos que apelar al procedimiento de decir que tiene tal o cual propiedad, o que es idéntico consigo mismo, de modo que ya estaríamos usando la descripción. Si es un nombre, no cabe dudar, cuestionar, acerca de la existencia de aquello a lo cual se refiere. Si lo hiciéramos incurriríamos en un absurdo parecido a preguntar "¿esto que existe, existirá?". Los nombres propios deberán denotar algo que conoce-

[19] *Ibidem*. p. 325.
[20] Strawson, *op. cit.*, p. 325.
[21] *Ibidem*, p. 327.
[22] *Ibidem*, p. 330.
[23] A. Rossi, *op. cit.*, p. 109.
[24] *Confert* Max Black, "Supuestos e implicación", en *Modelos y metáforas*, Tecnos, Estructura y función, Madrid, 1966, pp. 57-71.
[25] Quine, *Palabra y Objeto*, ed. cit., cap. V.
[26] A. J. Ayer, *Russell*, Grijalbo, 1973, p. 63.
[27] *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 327.

mos directamente; aunque el mismo Russell reconoce que "esta faceta de los nombres propios da origen a ciertas dificultades"[28].

No seguiremos con la polémica sobre la "existencia", cuya discusión nos llevaría al plano de la Ontología. Lo pertinente desde nuestro punto de vista es *¿Qué significa* "El presente rey de Francia es sabio"?

Según la teoría de Russell, si podemos comprender lo que una frase significa, debe ésta estar compuesta por completo de palabras que denoten cosas que conocemos o definibles en términos de tales palabras. No habría problema si las frases constasen sólo de nombres lógicamente propios, pero ¿En el caso de las descripciones definidas?

Quedamos en que "el actual rey de Francia" no funciona como sujeto lógico, y que no se refiere a nadie, luego el significado no está en relación con ningún *denotatum*. La respuesta[29] consiste en que el "el actual rey de Francia" es una "expresión denotativa" en cuanto que es una especie de expresión que tendría un *denotatum* y asimismo un significado, aun cuando actualmente no tiene ese *denotatum*. De modo que, si bien no podríamos definir la expresión de la forma "el así-y-así" con la que comienzan dichas frases, sí podemos definir las sentencias en las que la expresión aparece. Esto no es otra cosa que dejar a un lado la connotación de la frase y convertirla en función proposicional.

Este camino parece el indicado a seguir en las cuestiones del significado, ya que resuelve el problema planteado a los denotacionistas. Aplicado de forma general, se haría extensible a los nombres lógicamente propios; así se resolverían los problemas que, como hemos visto, plantean en cuanto a su significación. De hecho esta postura es adoptada expresamente por Quine, y a veces Russell también se inclinó a considerar a los nombres lógicamente propios como "descripciones encubiertas".

3. Las paradojas

En *The principles...* Russell había acometido el proyecto logicista de reducir la Matemática a la Lógica. Había definido los números como clases de clases, para poderlos tratar lógicamente. Pero el concepto de "clase", uno de los más importantes de la

su capacidad para generar infinitas contradicciones. Por aquel tiempo, cuando componía sus *Principles*, Russell le estaba dando vueltas al problema de las clases. Conocía la prueba de Cantor ("paradoja de Cantor") de que no existe un número cardinar mayor que todos, así como la paradoja de Burali-Forti, y, aplicando esta prueba a la clase universal, llegó a la paradoja de las clases que no son miembros de sí mismas.

La primera paradoja -"la paradoja del mayor ordinal"- publicada que surge de la teoría cantoriana de conjuntos es la de Cesare Burali-Forti[30].

Según la teoría de conjuntos de Cantor[31], a cada conjunto bien ordenado se asigna un número ordinal. Dados dos números ordinales cualesquiera, α y β, se cumple siempre una de estas tres relaciones:

$$\alpha = \beta \quad \text{w} \quad \alpha < \beta \quad \text{w} \quad \alpha > \beta \quad \text{(Comparación de ordinales)}$$

Por otra parte, todo conjunto de números ordinales, si se ordena según esta relación de orden, está bien ordenado, y su número ordinal es mayor que cualquiera de sus elementos (Un conjunto bien ordenado no es isomorfo a un segmento inicial suyo).

Sea, ahora, O el conjunto de todos los ordinales. Está bien ordenado, y tiene, por tanto, un número ordinal β. Tenemos entonces:

(1) Por una parte, β por ser un número ordinal es un elemento (un segmento) x de O, y, en cuanto tal, con número ordinal menor que el que corresponde al conjunto al que pertenece.

(2) Por otra parte, β es el mayor número ordinal, y, por tanto, mayor que cualquiera de los elementos (segmentos) x de O.

En símbolos:

$$(x)\, x \in O$$

Tenemos:

por (1)	$x < \beta$
y por (2)	$\beta > x$
y para $x = \beta$	$\beta > \beta$

lo cual constituye una inconsistencia para la relación <.

De esta paradoja tenía ya conocimiento Cantor es

"nueva lógica", amenazó con destruir la Lógica con

1895. Está íntimamente ligada a la llamada "paradoja

---

[28] *La evolución de mi pensamiento filosófico*, ed. cit., p. 189.
[29] *Confert* G. E. Moore, "Russell's 'Theory of descriptions'", en *The philosophy of Bertrand Russell*, editado por P. A. Schilpp. The Library of living Philosophers, T. V., Northwestern University, 1971, p. 217-223.
[30] "Una quaestione sui numeri transfiniti", en *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 11 (1897), pp. 154-164. Y en Heijenoort, *From Frege to Gödel*, ed. cit., pp. 104-112. Cantor conocía ya esta paradoja en 1895.
[31] *Confert*, para las nociones que siguen, J. Velarde, *Lógica Formal*. Pentalfa. Oviedo, 1982, pp. 334 y ss.

del mayor cardinal", o también "paradoja de Cantor", ya que fue hallada por él en 1899[32].

En la teoría cantoriana, a cada conjunto M corresponde una "potencia" o "número cardinal" $\overline{\overline{M}}$.

Dado un conjunto M, el conjunto de los subconjuntos de M (conjunto potencia) se designa por $\mathcal{P}M$.

Cantor demostró, además, este teorema (Teorema de Cantor)[33].

Para cualquier conjunto M el conjunto potencia de M tiene mayor número cardinal que M. Esto es:

$$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathcal{P}M}}$$

Apoyándose en los conjuntos finitos, el cardinal de $\mathcal{P}M$ es también designado por $2^{\overline{M}}$. (ya que el número de conjuntos contenidos en un conjunto que tiene n miembros es 2^n).

Tomemos ahora el conjunto de todos los conjuntos, y llamémosle S. Tenemos que:

(1) Por el teorema de Cantor:

$$\overline{\overline{\mathcal{P}S}} > \overline{\overline{S}}$$

(2) Puesto que $\mathcal{P}S$ es un conjunto (el conjunto de los subconjuntos de S) está incluido en S (puesto que, por el supuesto, S contiene todos los conjuntos habidos), esto es $\mathcal{P}S \subset S$.

El cardinal de $\mathcal{P}S$, en cuanto subconjunto de S, no puede ser mayor que el cardinal de S, esto es:

$$\overline{\overline{\mathcal{P}S}} \not> \overline{\overline{S}}$$

De (1) y (2) obtenemos, pues, una proposición

$$\overline{\overline{\mathcal{P}S}} > \overline{\overline{S}}$$

y su negación:

$$\overline{\overline{\mathcal{P}S}} \not> \overline{\overline{S}}$$

Cantor acaba su carta a Dedekind, en la que expone esta paradoja, con estas palabras: "Hay, pues, mulrtiplicidades determinadas que *no son al mismo tiempo unidades*, es decir, multiplicidades tales que una real 'existencia simultánea de todos sus elementos' es *imposible*. Son éstas las que yo llamo 'sistemas inconsistentes', en tanto que a las otras las denomino 'conjuntos'".

Durante los últimos años del siglo pasado las paradojas de Cantor y de Burali-Forti fueron objeto de intensas discusiones entre los matemáticos interesados por la teoría cantoriana de conjuntos. También Russell tuvo conocimiento de ellas, y, en 1902, sorprende a matemáticos y filósofos con una nueva paradoja, que se halla en la misma base de la teoría de conjuntos, puesto que se puede formular con conceptos sumamente elementales de dicha teoría. Por otra parte esta paradoja socava, no sólo la teoría de conjuntos, sino la misma Lógica, por lo que adquiere gran relevancia filosófica, comparable a las célebres aporías de Zenón de Elea.

Russell llega a su paradoja aplicando a la clase universal la prueba de Cantor de que no existe el mayor número cardinal. En 1902 se la comunica por carta[34] a Frege, y éste, que estaba dando cima a la obra de su vida (estaba a punto de aparecer el 2º volumen de *Grundgesetze der Arithmetik)*, le responde reconociendo que el descubrimiento de tal paradoja le produce gran sorpresa, más aún, estupor, puesto que ha hecho tambalear los cimientos sobre los que él ha intentado construir la Aritmética sin que por el momento encuentre manera de poner remedio.

Russell expone, por primera vez, su paradoja como sigue[35]:

> "... En la pág. 17 de su *Begriffsschrift* establece Vd. que una función también puede actuar como el elemento indeterminado. Eso creía yo antes, pero ahora esta idea me parece dudosa a causa de la siguiente contradicción. Sea w el predicado: ser un predicado que no puede ser predicado de sí mismo. ¿Puede w ser predicado de sí mismo? De cada respuesta se sigue su opuesta. Por lo tanto, debemos concluir que w no es un predicado. Del mismo modo, no hay clase (como una totalidad) de aquellas clases que, tomadas cada una de ellas como una totalidad, no pertenecen a sí mismas. De aquí concluyo que, bajo ciertas circunstancias, una colección definible no forma una totalidad...

[32] Se la comunica a Dedekind en carta de 31 de agosto de 1899, recogida en G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlín, 1932. Reimpr. Hildesheim, 1962, p. 448. También en J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*. Hermann, París, 1962, pp. 244-246.

[33] *Confert* una exposición sencilla de tal demostración en A. Fraenkel, *Set theory and Logic*. Addison-Wesley, Londres, 1966, pp. 42-43.

[34] De fecha 16 de junio de 1902. (En J. Heijenoort, *From Frege to Gödel*. ed. cit., pp. 124-125). Pero Russell la había descubierto un año antes: en junio de 1901 *(confert: My mental development*. ed. cit., p. 13)

[35] En J. Heijenoort, *From Frege to Gödel*, ed. cit., p. 124-25. La formulación que luego se generalizó es (por ej. "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 78):
"Sea *w* la clase de todas aquellas clases que no son miembros de sí mismas. En ese caso, cualquiera que pueda ser la clase *x*, "*x* es un *w*" equivaldrá a "*x* no es un *x*". En consecuencia, dando a *x* el valor de *w*, "*w* es un *w*" equivaldrá a "*w* no es un *w*".

> ... La anterior contradicción, expresada en ideografía de Peano, se formula como sigue:
>
> $w = cls \cap x \ni (x \sim \in x) . \supset : w \in w . = . w \sim \in w.$
>
> He escrito a Peano sobre esto, pero aún me debe constestación".

Russell llegó intuitivamente a tal resultado al tomar en consideración la clase (o el número) de todas las cosas que existen en el universo y creyendo en un principio, que tal clase (o número) habría de ser el más grande posible. Esto le llevó a considerar distintos tipos de clases: clases cuyos miembros son elementos y clases cuyos miembros son, a su vez, clases. A este segundo tipo pertenecen, por ejemplo, la clase de todas clases.

Por otra parte, una clase a veces es, y a veces no es, un miembro de sí misma. Por ejemplo, la clase de las cucharillas de café no es otra cucharilla de café; no es, por tanto, miembro de sí misma. A las clases que no son miembros de sí mismas se las llama *propias*. Y hay clases que son miembros de sí mismas. Por ejemplo, la clase de las cosas que no son cucharillas de café sí que es una de las cosas que no son cucharillas de café; la clase de las cosas que pueden ser enumeradas es ella misma algo que puede ser enumerado; y también: la clase de todas las clases es una clase. A las clases que son miembros de sí mismas se las llama *impropias*. Si consideramos ahora la clase de todas las clases propias (esto es, la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas), y preguntamos si tal clase es propia o impropia, obtenemos, como respuesta, una contradicción. En efecto: En virtud del principio lógico del *tertio excluso*, la clase de todas las clases propias, (llamémosla *w* o clase de Russell) o es propia o es impropia.

(1) Supongamos que *w* es propia. Pero *w* es, por definición, la clase de todas las clases propias. Síguese, pues, de las dos afirmaciones anteriores que *w* es miembro de sí misma. Pero *w*, si es miembro de sí misma, entonces no es propia. Partiendo, pues, del supuesto (1): *w* es propia, llegamos a la conclusión: *w* no es propia.

(2) Supongamos, pues, que *w* no es propia. Pero si *w* no es propia, entonces *w* no es miembro (por definición del concepto de clase propia). Partiendo, pues, del supuesto (2): *w* no es propia, llegamos a la conclusión: *w* es propia.

El resultado es, en consecuencia, que cada alternativa conduce a la contraria, y se produce una contradicción.

En términos formales puede representarse así[36]:
Para cualquier clase *x:*

(1) $x \in w \Leftrightarrow -(x \in x)$ ..... *Def.*

tomando, ahora, en consideración *w*, esto es, sustituyendo la variable de clase *x* por la constante de clase *w*, tenemos:

(2) $w \in w \Leftrightarrow -(w \in w)$

Así, $w \in w$ equivale a su propia falsedad: si es verdadera, es falsa; y recíprocamente.

La paradoja de Russell constituye el prototipo de un conjunto de paradojas cada una de las cuales da lugar a una contradicción formal. El mismo Russell ofreció diversas formulaciones de "la contradicción", como él llamaba a su paradoja[37]. Así, por ejemplo (en términos, no de la teoría de conjuntos, sino propiamente lógicos): Una propiedad es llamada "predicable", si se aplica a sí misma; y se llama "impredicable", si no se aplica a sí misma. Por ejemplo, la propiedad 'palabra' es palabra, y, por lo tanto, predicable; la propiedad 'hombre', en cambio no es hombre, y por lo tanto, es impredicable. Si ahora preguntamos qué tipo de propiedad -¿predicable o impredicable?- es la propiedad "impredicable", obtenemos que cada alternativa conduce a la contraria, y se produce una contradicción.

Tras la presentación de la paradoja de Russell, en 1903, fueron apareciendo nuevas paradojas:

• En 1905, Jules Richard propone[38] esta paradoja:

Escribamos en una tabla todas las variaciones de las 26 letras del alfabeto tomadas por orden alfabético y con repetición: de dos en dos, de tres en tres, etc. Como la definición de un número se forma con palabras, y éstas con letras, algunas de estas variaciones habrán de ser definiciones de números. Tachemos de la tabla las variaciones que no sean definiciones de números; obtenemos, así, una multitud enumerable de definiciones de números; y, por lo tanto, todos los números que se pueden definir mediante un número fi-

de sí misma (por definición de *w*). Y, si *w* no es miembro de sí misma, entonces *w* es propia

nito de palabras forman un conjunto infinito enumera-

---

[36] Otra formulación, a partir del principio de abstracción, en J. Velarde, *Lógica formal*, ed. cit., p. 218.

[37] *Confert* cap. X de *The principles;* "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., pp. 77 y ss.

[38] J. Richard, "Les principes des mathématiques et le problème des ensembles", en *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 16 (1905), p. 541.

ble, *E*. Consideremos ahora el número *N* definido como sigue: "sea *N* el número real que tenga como parte entera 0 y como *n-ésimo* decimal 1, si el *n-ésimo* decimal del *n-ésimo* número de la tabla es 0; y 0, en otro caso".

Este enunciado define, mediante un número finito de palabras, el número *N;* por lo tanto, *N* debe ser un miembro de *E*. Mas, por otra parte, *N* es distinto de cualquiera de los miembros de *E* (ya que para cualquier valor finito de *n* la *n-ésima* cifra de *N* es, diferente de la *n-ésima* cifra del *n-ésimo* de los números decimales que pertenecen a *E*, y, por lo tanto, *N* es diferente de dicho *n*-esimo decimal. En consecuencia: *N* es, y no es, a la vez, miembro de *E*.

• En 1905, Julius König publica[39] una paradoja análoga a la de Richard. Al igual que Richard, toma en consideración König el conjunto *E* formado por todos los números reales definibles por medio de un número finito de palabras. Puesto que el número de definiciones (de números definidos) es finito, tenemos muchos otros números, números reales no enumerables, además del conjunto *E* que es numerable. Esto es, *E* constituye un subconjunto del conjunto de los números reales; el complemento del conjunto *E* no es, pues, vacío. Si el conjunto de todos los números reales está bien ordenado el conjunto complemento de *E* está asimismo bien ordenado y tiene un primer elemento, que es definible como "el primero de los números reales indefinibles". Ese primer elemento del complemento de *E* es, a la vez, finitamente definible (pertenece a *E)* y no finitamente definible (no pertenece a E). De esta contradicción extrajo König la conclusión de que la hipótesis del continuo de Cantor quedaba refutaba. Queda también, en ese caso, refutado el teorema de buena ordenación de Zermelo estableciendo en 1904[41], ya que el número: "el primero de los números reales indefinibles" es el primer elemento, de acuerdo con la buena ordenación del continuo de Zermelo, del conjunto complementario de E de los números reales. Sin embargo, tras el descubrimiento de la paradoja de Richard, que es totalmente independiente de la hipótesis del continuo y del teorema de buena ordenación, la conclusión que König pretendía extraer no resultó fácilmente aceptable. Pero lo que sí resulta innegable es que, aceptado el teorema de Zermelo de que el conjunto de los números reales puede ser bien ordenado, obtenemos una paradoja que suele, por eso, ser llamada "la paradoja de Zermelo-König.

• La paradoja de Berry fue publicada[40] por Russell en 1908. Constituye una reformulación simplificada de la paradoja de Richard: Tomemos un léxico que contiene un número finito de sílabas. El nombre de cualquier entero posee un determinado (finito) número de sílabas, y sólo un número finito de tales nombres puede confeccionarse con el número finito de sílabas. Por lo tanto, los nombres de algunos enteros habrán de constar de por lo menos treinta y tres sílabas. Llamemos *E* al conjunto de números enteros así definidos. Y se dará, entre éstos, uno (llamémoslo *e)* que sea el menor, según la ordenación usual de los números enteros naturales. Consideremos, ahora, el enunciado: "el menor de los números enteros no susceptibles de ser nombrados con menos de treinta y tres sílabas". Este enunciado denota un número -el número *e*- que pertenece, por tanto, a *E*. Mas, por otra parte, "el menor de los números enteros no susceptibles de ser nombrados con menos de treinta y tres sílabas" es un nombre que consta de treinta y dos sílabas, y, por lo tanto, el menor de los números no susceptible de ser nombrado con menos de treinta y tres sílabas es susceptible de ser nombrado con menos de treinta y tres sílabas (con treinta y dos). Lo cual constituye una contradicción.

• En 1908, Kurt Grelling presentó[42] una paradoja que, si bien se parece a la de Russell, no viene formulada en términos de la teoría de conjuntos, sino que tiene que ver con la aplicación de adjetivos: Un adjetivo se llama *autológico* si puede ser aplicado válidamente a sí mismo, esto es, si vale el esquema *"'P' es P"*. Por ejemplo, los adjetivos "español", "polisílabo". Si no es *autológico* se llama *heterológico*. Son adjetivos heterológicos, por ejemplo, "alemán", "monosílabo". Si ahora preguntamos: el adjetivo "heterológico" ¿es autológico o heterológico? Si suponemos que es autológico, entonces, por definición de autológico, se aplica a sí mismo, y, por lo tanto, resulta que el adjetivo en cuestión es heterológico. Si, por el contrario, suponemos que es heterológico, entonces vale el esquema *"'P' es P"*, y, por lo tanto, es autológico.

[39] J. König, "über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuum-Problem", en *Mathemastische Annalen*, 61 (1905), pp. 156-160. Trad. inglesa en J. Heijenoort, *From Frege to Gödel*, ed. cit., pp. 145-149.
[40] En "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 78-79.
[41] "Beweis, dass jede Menge wohlgeordenet werden kann", en *Mathematische Annalen*, 59 (1904), pp. 541-516. Trad. ingl. en J. Heijenoort, *From Frege to Gödel*, ed. cit., pp. 139-141.
[42] K. Grelling - L. Nelson, "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti", en *Abhandlungen der Fries'schen Schule*. N. S. 2 (1908), pp. 301-334.

Otras muchas paradojas, ejemplificaciones de las expuestas, fueron discutidas intensamente en la primera década del siglo XX. Volvió a tomarse en gran consideración la paradoja "del mentiroso". Y todo ello provocó una crisis en la teoría de conjuntos y en la Lógica.

Russell no sólo plantea las paradojas de manera sencilla y sin tecnicismos matemáticos, en términos de lógica elemental, sino que acomete de inmediato la investigación de qué supuestos lógicos, hasta entonces comunmente aceptados, debían ser corregidos, a fin de resolver el problema de las paradojas. Ya en el Apéndice B de *The Principles* presenta, aunque en forma embrionaria, la que luego sería su famosa teoría de los tipos como un "intento de dar una posible solución a la contradicción". Los dos principios de la teoría de los tipos explícitamente enunciados son[43]:

(I) Toda función proposicional φx tiene, además de su rango de verdad, un rango de significado, i. e., un rango dentro del cual debe estar x para que φx sea una proposición, verdadera o falsa.

(II) Los rangos de significado forman "tipos", i. e., que si x pertenece al rango de significado de φx, entonces hay una clase de objetos, el "tipo" de x, todos los cuales deben pertenecer también al rango de significado de φx, aunque φ varíe.

Examina, luego, Russell la estratificación de tipos de clases, de relaciones, de proposiciones y de números. Con respecto a la primera de estas estratificaciones, en el tipo más bajo están los individuos o términos: "un 'individuo' o 'término' es cualquier objeto que no sea un rango". El tipo siguiente está formado por clases de individuos; el siguiente por clases de clases de individuos, etc. Obtenemos, así, una inmensa jerarquía de tipos, "siendo difícil calcular cuántos puede haber".

También las proposiciones podrían jerarquizarse en tipos, con el objeto de resolver las paradojas formuladas en términos de proposiciones[44], pero Russell se topa con dificultades, "las cuales hacen dudoso el que las proposiciones puedan tratarse como los demás objetos". Dificultades similares se presentan con los números, porque todos los números se consideran como un tipo, y el tipo de todos los números requiere una consideración de la totalidad de tipos y rangos, puesto que todos los rangos tienen números. En ulteriores versiones más definitivas de la teoría de los tipos quedan obviadas estas dificultades, tomando cada número como realizado en diferentes niveles con infinitas copias diferentes. Pero en *The Principles* su autor se limita a concluir que "la totalidad de todos los objetos lógicos o de todas las proposiciones implica, al parecer, una dificultad lógica fundamental. No he conseguido descubrir cuál pueda ser la solución completa a esta dificultad; pero, como afecta a los fundamentos del razonamiento, encomiendo encarecidamente su estudio a todos los estudiosos de la Lógica"[45].

Russell mismo pone todo su empeño en ese estudio, publicando sus reflexiones sobre las paradojas en un primer artículo en 1906[46]. Consideraba entonces que el supuesto, hasta entonces comúnmente admitido, que debía ser rechazado por ser el posible causante de las paradojas era éste ("principio de abstracción"): que para cualquier función proposicional existe la clase de objetos que la satisfacen, o que cada función proposicional existe como una entidad separada, como algo distinto de la combinación de signos que expresa la función proposicional, y llamado el "concepto" definido por la función. Hay que rechazar, pues, la existencia en general de una clase o de un concepto para cualquier función proposicional: hay algunas funciones proposicionales que no determinan clases ni conceptos. El problema queda reducido, entonces, a buscar un criterio que discrimine qué funciones proposicionales determinan esos objetos y cuáles, no. Russell señaló tres posibles vías para buscar un tal criterio, A) la teoría del zig-zag. B) la teoría de la limitación del tamaño. C) la teoría de las no-clases.

A) *La teoría del zig-zag*, establece que "las funciones proposicionales determinan clases cuando son completamente simples, y no lo hacen

[43] Trad. cast. cit., p. 815.

[44] Russell expone este tipo de paradoja en el Apéndice B de *The Principles* (trad. cast. p. 819): "Si *m* es una clase de proposiciones, la proposición "todo *m* es verdadero" puede ser o no ser en sí misma una *m*. Pero hay una relación biunívoca de esta proposición con *m:* si *n* es diferente de *m*, "todo *n* es verdadero" no es la misma proposición que "todo *m* es verdadero". Consideremos ahora toda la clase de proposiciones de la forma "todo *m* es verdadero" y que tengan la propiedad de no ser miembros de sus respectivos *m*. Llamemos a esta clase *w*, y sea *p* la proposición "todo *w* es verdadero". Si *p* es un *w*, debe poseer la propiedad definidora de *w;* pero esta propiedad requiere que *p* no sea *w*. Por otra parte, si *p* no es *w*, entonces *p* posee la propiedad definidora de *w*, y, por tanto, es un *w*. La contradicción parece inevitable".

[45] *Ibidem*, p. 820.

[46] "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Orders Types", en *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 4 (1906), pp. 29-53.

sólo cuando son complicadas y recónditas...; y la negación de una función predicativa es siempre una función predicativa. Aquí se niega la existencia a las clases conflictivas, no por ser demasiado grandes, sino por poseer una cierta cualidad en zig-zag (*x* pertenece a *w*, si y sólo si *x* no pertenece a *w*). Es, pues, ésta una teoría *intensional:* la existencia de la clase depende de la intensión (contenido o significado) de la función proposicional. La función proposicional que determina una clase la llama Russell "predicativa". El problema queda ahora reducido a buscar un criterio determinativo de las funciones predicativas, pero, en ese intento, Russell reconoce que "no ha encontrado otro principio guía que la evitación de contradiciones, y éste es, por sí mismo, un principio bien insuficiente puesto que nos deja siempre expuestos al riesgo de que ulteriores deducciones presenten contradicciones". Russell no encuentra, pues, por esta vía una salida definitiva hacia la evitación de las paradojas. Su oponente, Poincare, parece tener razón cuando enjuicia así esta teoría como "oscura" y, "en esa noche, un solo resplandor: la palabra zig-zag. Esto que el señor Russell llama la *zig-zag-giness* es sin duda el carácter particular que distingue el argumento de Epiménides"[47].

B) *La teoría de la limitación del tamaño* establece que las funciones proposicionales no determinan clases si son demasiado grandes. La existencia de una clase depende, ahora, no de la cualidad (o intensión) de la función proposicional, sino de su extensión. Es, pues, una teoría *extensional*. Las clases dejan de existir cuando son demasiado extensas. Los ordinales, por ejemplo, no forman una clase, y, de ese modo, desaparece la paradoja de Burali-Forti. El problema consiste ahora, en determinar cuándo la clase es demasiado extensa, cuándo hay que parar, por ejemplo, en la escala de los ordinales. Mas, con todo, un primer resultado de esta teoría es la no existencia de la clase universal o de la noción de "algo" en sentido irrestricto, es recogida en las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos hechas por Zermelo[48] y von Neumann[49]. En la teoría de conjuntos de Zermelo el "principio abstracción" queda limitado (y sustituido) por el "axioma de separación" *(Axiom der Aussonderung):* "para una función proposicional $\varphi(x)$ definida sobre elementos de un conjunto *M*, existe un subconjunto *M* φ que contiene aquellos elementos *x* de *M* para los que $\varphi(x)$ es verdad". Este axioma excluye las multitudes demasiado grandes, ya que restringe la aplicación del principio de abstracción a los objetos *x* que son elementos de un conjunto *M* cuya existencia está ya asegurada, con lo cual se evitan las paradojas.
Von Neumann, restringe, asimismo, la aplicación del principio de abstracción mediante la introducción de dos clases de colecciones: conjuntos y clases; no todos los objetos son admitidos en el reino de los elementos; ellos son las clases (las "clases últimas") que no son conjuntos, siendo éstos los objetos que pueden ser elementos y clases a la vez. La expresión de Russell "no demasiado grande" puede quedar formulada, según von Neumann, como "no equivalente al universo de todas las cosas", esto es, un objeto *F* no es un conjunto si sus elementos pueden ponerse en correspondencia con la totalidad de los individuos.

C) *La teoría de las no-clases* es sobre la Russell, finalmente, se inclina, si bien de manera un tanto críptica. Según esta teoría, las funciones proposicionales no determinan de por sí clases y relaciones. Las clases no existen nunca como objetos reales, y las proposiciones en las que aparecen los términos "clase" o "relación" sólo tienen significado en la medida en que se interpretan como una *façon de parler*, un modo de hablar sobre otras cosas, por lo que tales proposiciones deben ser reformuladas en términos de funciones proposicionales.

Russell presentó estas tres teorías en el artículo citado, inclinándose, finalmente, por la última. Por esa

to. Y esta idea, la de restringir la existencia de

época, interviene Poincaré polemizando contra Russell

[47] H. Poincaré, "Las matemáticas y la lógica", en *Ciencia y Método*. Trad. M. García Miranda y L. Alonso. Espasa-Calpe, Madrid, 1963, p. 145.

[48] E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", en *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 261-281. Trad. ingl. en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, ed. cit., pp. 199-215.

[49] J. von Neumann, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", en *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 154 (1925), pp. 219-240. Trad. ingl. en J. van Heijenoort, *o. c.*, pp. 393-413.

y los "logísticos" sobre las relaciones de la Lógica con la Matemática[50]. En lo que concierne a las paradojas, Poincaré ironiza sobre las tres teorías presentadas por Russell, considerándolas inservibles. Por su parte propuso identificar las funciones no-predicativas con aquellas que contienen un círculo vicioso, tal como queda de manifiesto en la paradoja de Richard, pero cuya explicación vale para las otras antinomias, incluida la de Epiménides.

> "Así, las definiciones que deben ser consideradas como no predicativas son las que contienen un círculo vicioso"[51].

Russell responde rápidamente a Poincaré en "Les paradoxes de la logique"[52]. Reconoce, aceptando la sugerencia de Poincaré y reclamando la autoridad de Ockham, que "la clave de las paradojas debe encontrarse en la idea de círculo vicioso". Y para evitar el sofisma del círculo vicioso se debe admitir este principio:

> "Todo aquello que contiene una variable aparente debe ser excluido de los posibles valores de esta variable".

o enunciado más exactamente así:

> "Todo lo que abarca a todos no puede ser uno de esos todos"[53]. Principio, éste, llamado "de círculo vicioso" y cuya formulación definitiva en los *Principia Mathematica*[54] es:
>
> "Todo aquello que presupone *el todo* de una colección no debe formar parte de la colección" o recíprocamente: "si, supuesto que una colección posee un total, tuviese miembros sólo definibles en términos de ese total, entonces dicha colección no posee total".

En "Les paradoxes de la logique", Russell señala[55] también que el principio de círculo vicioso no constituye de por sí la solución de las paradojas, sino solamente la consecuencia que una teoría debe proporcionar para aportar una solución, esto es, hay que construir una teoría de las expresiones con variables aparentes que aporte como consecuencia el principio de círculo vicioso. En este escrito Russell se inclina por la teoría de las no-clases, la cual establece la reducción de las clases a las respectivas funciones y fija la inadmisibilidad, para toda función, de su aplicación a sí misma como al propio argumento. La teoría establece que todas las proposiciones significativas sobre clases pueden ser consideradas como proposiciones sobre todos o algunos de sus miembros, esto es, como términos que satisfacen cierta función proposicional φx.

> "He observado que las únicas proposiciones sobre clases, que no pueden ser consideradas así, son las proposiciones del tipo de las que dan lugar a contradicciones. Por tanto, es natural suponer que las clases son, simplemente abreviaciones lingüísticas o simbólicas"[56].

Resulta, pues, evidente que "la noción de una clase que fuese miembro de sí misma deviene un sin sentido... Obtenemos así una serie de tipos tales que, en todos los casos en los que podía, primero, presentarse una paradoja, tenemos ahora una diferencia de tipo que quita cualquier sentido al juicio paradójico"[57].

La teoría de las no-clases es, con todo, sólo una propuesta: La construcción de la Lógica, en la que se introduzcan las clases como una *façon de parler*, en la que se establezcan explícitamente las reglas para traducir las fórmulas que contienen nombres de clases a otras que no las contengan. Ello conlleva "la necesidad de una reconstrucción de los primeros principios lógicos". Y esta reconstrucción es la que emprende Russell, primeramente, en *Mathematical Logic as based on the Theory of Types* (1908) y la que completa, luego, junto con Whitehead, en los *Principia Mathematica* (1910-13).

4. Teoría de los tipos lógicos

Russell había apuntado ya en *The Principles* (1903) la teoría de los tipos como solución a las paradojas. La primera exposición completa de esta teoría aparece en el artículo citado de 1908; la repite, luego, casi inalterada en el cap. II de la Introduc. a los *Principia Mathematica;* y, ante los comentarios de Poincare al artículo de 1908; señalando que en la descripción de la teoría de los tipos estaban presupuestos los ordinales, Russell publicó, en 1910, una traduc-

50 "Les mathématiques et la logique", en *Rev. Mét. Mor.*, 13 (1905), pp. 815-835; y 14 (1906), pp. 17-34; 294-317. Trad. cast. en *Ciencia y Método*, cit.
51 *Ibidem*, en la trad. cast. p. 147.
52 En *Rev. Mét. Mor.*, 14 (1906), pp. 627-650.
53 *Ibidem*, p. 640.
54 *Principia Math.* I, *Introd.* cap. II, § I, p. 37.
55 "Les paradoxes de la logique", ed. cit., p. 640.
56 *Ibidem*, p. 636.
57 *Ibidem*, p. 637.
58 "La théorie des Types Logiques". ed. cit.

ción francesa[58] de las páginas de los *Principia* en las que aparece la teoría de los tipos.

La exposición de la teoría de los tipos comienza, en ambos escritos, con la constatación de que la característica común a todas las paradojas expuestas[59] es la "autorreferencia o reflexividad": "En cada una de las contradicciones se dice algo acerca de *todos* los casos de un determinado género, y de lo que se dice parece resultar un nuevo caso, que es y no es a la vez del mismo género que los casos comprendidos, *todos* ellos, en lo que se dijo"[60]. En el artículo de 1908 Russell pasa revista, una por una, a todas las paradojas expuestas para ver cómo efectivamente sucede esto: en la exposición de los *Principia*, en cambio, los autores se limitan a señalar que "todas nuestras contradiciones son ejemplos de falacias del círculo vicioso. Sólo queda por ver, por tanto, que las totalidades ilegítimas en cuestión están excluidas por la jerarquía de tipos que hemos construido"[61].

En realidad, fue Poincaré[62] quien primero se percató de la conexión entre las nuevas paradojas 'del infinito' (como la de Burali-Forti, por ejemplo) y la de Epiménides, señalando la analogía que existía entre ambos tipos de contadicciones. Russell aceptó en seguida[63] esta opinión de Poincaré, aplicando a la paradoja de Epiménides un procedimiento de resolución análogo al aplicado a los demás tipos de paradojas: la teoría de los tipos "resuelve... todas las paradojas concernientes a las clases y las relaciones. Para resolver la de Epiménides necesitamos una doctrina similar concerniente a las proposiciones"[64].

Sin embargo, ya por esa misma época, Peano sugirió la división de las paradojas en "lingüísticas". (la de Richard, por ejemplo) y "matemáticas" (la de Burali-Forti, por ejemplo). Pero Russell no tomó, entonces, en cuenta esta sugerencia de Peano y construyó su "teoría ramificada de los tipos" con el propósito de dar solución a las paradojas de ambos tipos.

De hecho, esta teoría de los tipos recibió el calificativo de "ramificada" bastante posteriormente: una vez que fue separada y sistematizada la teoría "simple" de los tipos. La primera exposición, en 1908, es presentada por Russell como "La teoría de los tipos", y se recoge, luego, en los *Principia* (1910) bajo el título de "La teoría de los tipos lógicos". Su autor la propone como un método que permite resolver todas las paradojas ("lógicas" y "semánticas") al tiempo que la considera, en consonancia con el sentido común, lo cual la hace intrínsecamente verosímil.

Función proposicional

La noción de "función" había adquirido ya con Frege una singular relevancia con su aplicación en el campo de la Lógica. Siguiendo en la misma dirección que Frege, también Russell concede gran importancia a las funciones, en especial a partir de 1906, cuando por primera vez, propone la eliminación de las clases (Teoría de las no-clases) y su sustitución por funciones proposicionales.

Por *función proposicional* entiende Russell[65] una expresión que contiene una variable, x, y que expresa una proposición en cuanto se le asigna un valor a x. Una *variable* es "cualquier símbolo cuyo significado no esté determinado". Y se llaman *valores* de la variable a "las determinaciones de las que es susceptible su significado".

Según lo anterior, φx es una función proposicional: no es una proposición, ya que, debido a la ambigüedad de x, no hace, en realidad, una aserción. Por ejemplo, "x está herido" es un valor ambigüo de la función $\varphi\hat{x}$. La ambigüedad es, pues, la característica esencial de la función: "φx" denota ambiguamente φa, φb, φc, *etc.*, en donde φa, φb, φc, *etc.*, son los diferentes valores de la función $\varphi\hat{x}$.

Russell distingue la función en sí, que representa por $\varphi\hat{x}$ de la función proposicional, anotada por φx. La primera "señala ambigüamente, mientras que un valor indeterminado de la función ["φx"] es aquello que está señalado ambiguamente. φx designa un valor indeterminado de la función $\varphi\hat{x}$, debido a que x representa una variable *real* (en oposición a las variables *aparentes*).

59 Nótese que Russell, a este respecto, equipara, y pasa revista a, las siguientes paradojas: 1) La de Epiménides; 2) la suya con-

cerniente a las clases y su análoga concerniente a las relaciones; 3) la de Berry; 4) la de König; 5) la de Richard y 6) la de Burali-Forti.

[60] "La lógica Matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 80-81.

[61] *Principia Math.* I, ed. cit., p. 62.

[62] H. Poincaré, *Las matemáticas y la lógica*, ed. cit., p. 145.

[63] En *Les paradoxes de la logique*, ed. cit., p. 632: "De tels paradoxes son connus depuis le temps d'Epimenide le Crétois, et l'idée qu'ils proviennent d'un cercle vicieux parait due à William d'Ockham. Cette opinion, que M. Poincaré ressuscite, je la partage complètement.

[64] G. Peano "Additione", en *Revista de mathematica*, 8 (1906), pp. 143-157. Reimpres. en *Opere Scelte*, vol. I, ed. cit., pp. 344-358.

[65] *Principia Mathematica* I, pp. 14 y 38.

Mientras que, si se sustituye x por una significación concreta (por una constante), representada por a, entonces φa designa un valor determinado de la función $\varphi\hat{x}$, y se convierte en una proposición.

De este modo, correspondiente a cualquier función proposicional φx existe un *rango*, o *dominio*, de *argumentos* (en el caso de las funciones *predicativas* (ver luego) es una clase de *individuos)* determinado por la función $\varphi\hat{x}$, y que se representa así: $\hat{x}\ \varphi x$[66]; y un rango, o dominio de *valores*, consistente en todas las proposiciones (verdaderas o falsas) que pueden obtenerse dando todas las posibles determinaciones a x en φx.

Las *proposiciones* se obtienen a partir de las funciones proposicionales según uno de estos dos procedimientos:

(a) *Singularización de la variable argumental.* Tal como se ha indicado, si en la función proposicional φx se sustituye x por uno de sus valores, a, que constituyen el rango de argumentos de la función $\varphi\hat{x}$, obtenemos, entonces, un valor de la función $\varphi\hat{x}$, esto es, una proposición, φa. Lo que significa que el valor de x, i. e., a satisface la función $\varphi\hat{x}$.

(b) *Generalización de la variable argumental.*

(b_1) Si a partir de la función proposicional φx, resulta que *todos* los valores de x satisfacen la función $\varphi\hat{x}$, entonces todas las proposiciones que componen el rango de valores de la función $\varphi\hat{x}$ son verdaderas, lo cual se simboliza así *(Cuantificador universal):* $(x)\ \varphi x$, y puede leerse: "φx es siempre verdadera" o "φx es verdadera para todos los posibles valores de x".

(b_2) Si, a partir de φx resulta que *algunos* (al menos uno) de los valores de x satisfacen la función $\varphi\hat{x}$, entonces algunas de las proposiciones que componen el rango de valores de la función $\varphi\hat{x}$ son verdaderas. Ello se simboliza así *(Cuantificador existencial):* $(\exists x)\ \varphi x$, y puede leerse: "existe un x para el cual φx es verdadera" o "existe un x que satisface $\varphi\hat{x}$".

que φx tiene significado. Por consiguiente, la cuantificación entraña el supuesto de que tal campo está determinado; por ello la x que aparece en $(x)\ \varphi x$ y en $(\exists x)\ \varphi x$, se llama (siguiendo a Peano) "variable aparente". Cuando la variable x aparece en una proposición cuyo valor de verdad no depende de los vales de x sino de la estructura interna que comporta, la varible x es (se llama) *aparente*. Por ejemplo, la implicación formal: $(x)\ (\varphi x \rightarrow \psi x)$, ya que significa que para todos los posibles valores de x, si x satisface $\varphi\hat{x}$, entonces x satisface $\psi\hat{x}$. Es decir, supone la afirmación simultánea de todas las implicaciones *materiales* implícitas en las variables.

Finalmente, las *propiedades* pueden considerarse como funciones de un argumento que tienen como valores proposiciones. Por los ejemplos que aduce ("x esta herido"; "x es hombre", etc.), parece que Russell estendió las funciones como propiedades[67], en cuyo caso, la propiedad (la función) lleva asociada un *rango de significación*, que es la clase de cosas a las que puede ser significativamente aplicada. Y también, en ese caso, un valor de la función es una proposición considerada como algo no lingüístico, como lo que la frase expresa.

Jerarquía de funciones

La jerarquía de funciones es construida desde la consideración del llamado principio de círculo vicioso, por cuanto que Russell consideraba por entonces que todas las paradojas, tanto las lógicas como las semánticas, (ya que la distinción de ambos tipos de paradojas será posterior), "son resultado de una cierta especie de círculo vicioso". La jerarquización de funciones tiene dos dimensiones: los tipos y los órdenes. Y en la exposición de la teoría de los tipos en los *Principia* se combina la teoría simple de los tipos con la teoría de los órdenes, dando como resultado la "jerarquía ramificada". Sin embargo, es ya generalmente aceptada la observación de Ramsey, de que "la teoría 'ramificada' de los tipos... consta realmente de dos partes distintas, dedicadas, respectivamente a dos grupos de paradojas", y de que la teoría simple de los tipos es suficiente para evitar las paradojas "lógicas y

Ahora, el rango de x, tanto en $(x)\ \varphi x$ como en $(\exists x)\ \varphi x$, abarca el campo completo de valores de x para los

---

[66] El rango de argumentos constituye, a su vez, el *campo de significación* de la función $\varphi\hat{x}$, ya que se dice que una función es significativa para el argumento x si posee un valor para éste último. El campo de significación de una función estará integrado por todos los argumentos para los que la función resulte verdadera o falsa.

[67] Y en *La evolución de mi pensamiento filosófico*, ed. cit., p. 188, escribe: "Una propiedad será lo que queda de cualquier proposición en la que aparece un nombre cuando el nombre se omite o se reemplaza por una variable".

cho la consistencia de la Lógica o de la Matemática). Se puede, por tanto, prescindir en Lógica de esta parte (la ramificación de órdenes) de la teoría russelliana. Queda, así, la parte que ha sido generalmente aceptada y utilizada por los lógicos, y que ha venido en llamarse "la teoría simple de los tipos".

Jerarquía de los tipos

Dada una función proposicional φx, habrá argumentos con los que φx no tenga sentido. (Por ejemplo, si en la función proposicional "x es triangular" asignamos a x el valor determinado "la virtud", obtenemos, no una proposición, sino una colección de símbolos carente de sentido: "la virtud es triangular"). Los argumentos con los que φx adquiere valores forman el *campo de significación* de φx. Pues bien, la esencia de la teoría de los tipos es la siguiente: determinar qué expresiones no pueden sustituir a x en φx.

Un *tipo* se define como el campo de significación de una función proposicional, esto es, como la colección de aquellos argumentos para los que dicha función resulta significativa (tiene valores). Según esto, obtenemos una división de entidades en tipos lógicos.

De donde resulta que dos tipos que tienen un miembro en común coinciden, y dos tipos diferentes se excluyen. Tal división viene exigida por el principio de círculo vicioso, según el cual las totalidades legítimas no deben contener miembros definidos en términos de ellos mismos, o bien en términos formales: aquella expresión que contenga una variable aparente no debe constituir un posible valor de dicha variable, es decir, ha de ser de diferente tipo; ha de ser de un tipo *superior*. Por consiguiente, lo que sostiene la teoría de los tipos, a fin de evitar falacias de círculo vicioso, es dividir las funciones en tipos, cada uno de los cuales no contenga funciones que refieran a la totalidad del tipo. En lenguaje técnico: lo que determina el tipo de una expresión son las variables aparentes que en ella intervienen. Además, no resulta necesario saber qué objetos pertenecen al tipo más bajo. Lo esencial y necesario es que si el más alto tipo de la variable aparente que intrviene en una expresión es n, entonces la función en la cual ocurre esa varible es de tipo $n + 1$. De este modo, todas las nociones (proposiciones, funciones, clases, relaciones) que envuelven nociones lógicas (no ponen en entredi- matemáticas", en tanto que las paradojas "semánticas" tipo lógico más alto que el de sus argumentos, y cuando se habla de función de funciones se ha de tener presente que la nueva función es de un tipo superior al de sus componentes. Obtenemos, así, una infinita jerarquía de tipos. A los términos que en las "proposiciónes elementales" no sean funciones los denomina Russell "individuos". Por ejemplo, en la proposición "Sócrates es justo", representada por φa, el término a (Sócrates) es un individuo. Los individuos forman, pues, el tipo primero; llamémosle tipo 0. Según esto: el tipo 0 consta de todos los individuos; el tipo 1 consta de todas las funciones de individuos; el tipo 2 consta de todas las funciones de funciones de individuos; y, en general, el tipo $n + 1$ consta de todas las funciones de funciones de tipo n. La condición necesaria para que una fórmula de la forma $x \in y$ sea significativa es que x sea de un tipo inferior a y. Resulta evidente que, traduciendo las clases a funciones, con la anterior teoría se evita la paradoja de Russell y las demás concernientes a las clases (la de Cantor, la de Burali-Forti...)[68], y traduciendo las propiedades a funciones, es asimismo posible evitar la paradoja de Russell sobre la propiedad "impredicable".

Jerarquía de órdenes

Para evitar las paradojas del tipo de la del mentiroso o de la de Richard, consideró necesario Russell introducir una ulterior distinción en cada tipo:

> "..... esto puede verse fácilmente en lo siguiente. Sea $f(\varphi\hat{z}, x)$ una función de dos variables: $\varphi\hat{z}$ y x. Entonces, si, manteniendo por el momento fijo a x, aseveramos esta función para todos los posibles valores de φ, obtenemos una proposición: $(\varphi)\ .\ f(\varphi\hat{z}, x)$. Aquí, si x es variable, tendremos una función de x; pero como esta función abarca una totalidad de valores de $\varphi\hat{z}$, ella misma, en virtud del principio de evitación del círculo vicioso, no puede ser uno de los valores incluidos en la totalidad. Resulta, pues, que la totalidad de los valores de la función $\varphi\hat{z}$ que interviene en $(\varphi)\ .\ f(\varphi\hat{z}, x)$ no es la totalidad de todas las funciones en las que x pueda darse como argumento, y que no existe una totalidad tal como ésta, constituida por todas las funciones en las que x pueda intervenir como argumento"[69].

Dejando el tipo 0 para los individuos (individuo = lo

las nociones (proposiciones, funciones, clases, relaciones) se reparten en tipos. La función pertenece a un

ficada de los tipos divide cada tipo superior al tipo 0 en

---

[68] Las clases quedan reducidas, ahora, por Russell a enunciados relativos a funciones que las definen: "Una clase es, así, un objeto derivado de una función y que presupone la función exactamente como, por ejemplo, $(x)\ \varphi x$ presupone la función $\varphi\hat{x}$. Por lo tanto, una clase, en virtud del principio de evitación del círculo vicioso, no puede significativamente ser el argumento de su función definitoria. Es decir, si representamos por "$\hat{z}(\varphi z)$" a la clase definida por $\varphi\hat{z}$, el símbolo "$\varphi(\hat{z}(\varphi z))$" debe resultar carente de sentido". *(Principia Mathematica*, I, p. 62-63).

[69] *Principia Mathematica*, I, p. 48-49.

una jerarquía de *órdenes:* Dentro de cada tipo, las funciones de ese tipo son jerarquizadas en infinitos órdenes. La base de tal jerarquía consiste en todas las funciones proposicionales que son definibles sin referencia a una totalidad de funciones de tipo *n*. Tales funciones, caracterizadas por el hecho de que ellas no abarcan variables salvo individuos (no tienen más argumentos que los individuos, no presuponen ninguna totalidad de funciones), son denominadas *funciones de primer orden.* Por ejemplo: φx, $\Psi(x, y)$, $(y)\ \varphi(x, y)$, etc., o en lenguaje ordinario: "todo el mundo ama a *x*". Una función de primer orden se representa así: $\varphi!\ \hat{x}$; y un valor para tal función se representa así: $\varphi!\ x$. En consecuencia, $\varphi!\ x$ representa cualquier valor de una función que no abarca variables, excepto individuos.

Están, luego, las *funciones de segundo orden:* "aquellas que contienen variables que son funciones de primer orden, pero no contienen otras variables excepto (posiblemente) individuos"[70]. Por ejemplo: $f(\varphi!\ \hat{z})$, $g(\varphi!\ \hat{z}, \Psi!\ \hat{z})$, etc. Estas matrices contienen individuos y funciones de primer orden como argumentos. Y de estas matrices, si contienen más de una variable, cabe obtener nuevas funciones, también de segundo orden, y cambiando todos sus argumentos, excepto uno, por variables aparentes. Así: $(\varphi)\ .\ g(\varphi!\ \hat{z}, \Psi!\ \hat{z})$, que es una función de $\Psi\hat{z}$; $(\varphi)\ .\ F(\varphi!\ \hat{z}, x)$, que es una función de *x*.

De manera análoga, serán *funciones de tercer orden* aquellas que contengan como argumentos funciones de segundo orden, y que no contengan variables aparentes ni argumentos excepto individuos, funciones de primer orden y funciones de segundo orden. Y, así, podemos continuar indefinidamente: "Si el más alto orden de una variable que tenga lugar en una función, sea como argumento o como variable aparente, es una función de orden *n-ésimo*, entonces la función en la que ocurre es de orden *(n + 1)-ésimo*.

Finalmente, Russell define una función de una variable como *predicativa* cuando sea del orden inmediatamente superior al de su argumento, y, si tiene varios, si el más alto es de orden *n*, entonces, cuando sea de orden *n + 1*. En otras palabras: una función es predicativa "si es del orden más bajo compatible con él teniendo los argumentos que tiene". Según esto, una

Así, por ejemplo, en la proposición "Napoleón era corso" $= \varphi!\ x$, no hay referencia alguna a ningún conjunto de propiedades. Tenemos, pues, una función predicativa de inviduo (de primer orden). En cambio, en la proposición "Napoleón tenía todas las cualidades de un gran general", habrá de interpretarse como: "Sea *f* lo que quiera, si '*x* fue un gran general' implica *fx*, entonces f (Napoleón), sea *x* lo que quiera":

$(f)\ [(x)\ (x\ es\ gran\ general \rightarrow f!\ x) \rightarrow f!\ (Napoleón)]$

Aquí sí que hay una referencia a una totalidad de cualidades (de funciones) *f*. No es, pues,una función predicativa de individuos (es de segundo orden). Cuando decimos aquí "Napoleón tenía todas las cualidades...", este enunciado atribuye una propiedad (una función) a Napoleón, pero no una propiedad (función) predicativa. De modo que dondequiera que aparezca "todas las funciones que", las funciones en cuestión deberán limitarse a un orden, si se quiere evitar el círculo vicioso; y, como hemos visto en el ejemplo de Napoleón, el orden no queda determinado por el argumento, por lo que las funciones que pueden tomar un argumento dado son de una serie infinita de órdenes.

Según lo anterior, en los *Principia*, las funciones de primer orden son llamadas "funciones predicativas" y representadas así: "$\varphi!\ \hat{x}$" o "$\varphi!\ (\hat{x}, \hat{y})$", etc. En efecto: "se dice que una función es *predicativa* cuando es una matriz... Una matriz es la mismo que una función elemental"[71]. Una *función elemental* es aquella "cuyos valores son todos proposiciones elementales"[72]. Una *proposición elemental* es "aquella que no contenga variables *aparentes* (Por ej.: "esto es rojo") y a los términos que, en tales proposiciones, no sean funciones, se les llama *'individuos'*"[73]. Finalmente: "simbolicemos mediante "$\varphi!\ \hat{x}$" o "$\varphi!\ (\hat{x}, \hat{y})$", etc.., una función elemental cuyo argumento o argumentos son individuos. A una función de éstas la denominamos *"función predicativa de un individuo"*. Tales funciones, juntamente con las que se deriven de ellas por generalización, se llaman *"funciones de primer orden"*[74].

La jerarquización de las funciones en órdenes tiene como objeto evitar las paradojas "semánticas", como, por ejemplo, la de Berry, concerniente al enunciado: "el menor de los números enteros no susceptibles de ser nombrados con menos de treinta y tres sílabas". Aquí la

función predicativa no envuelve ninguna totalidad excepto la de sus argumentos y la(s) que estos presupongan.

[70] *Ibidem*, p. 52.
[71] *Principia Mathematica*, I, p. 164.
[72] *Ibidem*, p. 127.
[73] *Ibidem*, p. 161.
[74] *Ibidem*, p. 162.

Russell[75], "hace referencia a la totalidad de los nombres, y, sin embargo, se le puede admitir que se presente manifestando ser uno entre nombres". Pero, en virtud del principio de evitación de círculo vicioso, no puede haber algo que sea una totalidad de nombres (en el sentido en que la paradoja habla de "nombre"), y los nombres deben ser jerarquizados según su orden. Dados los nombres de objetos de un determinado tipo (del tipo *i*, por ejemplo), la jerarquía de funciones de tipo $i + 1$ establece una jerarquía correspondiente de los nombres en diferentes órdenes: a) *Nombres elementales:* esto es, los nombres lógicamente propios, que no entrañan ninguna descripción, y que no entran, por tanto, en esta jerarquía. b) *Nombres de primer orden* de objetos de tipo *i*, que son los que contienen una descripción por medio de una función de primer orden de tipo $i + 1$; es decir, si $\varphi!\hat{x}$ es una función de primer orden, "el término que satisface $\varphi!\hat{x}$" es un nombre de primer orden. c) *Nombres de segundo orden* de objetos de tipo *i*, que son aquellos que envuelven una descripción por medio de una función de segundo orden de tipo $i + 1$; es decir, si $f(\varphi!\hat{z})$ es una función de segundo orden, "el término que satisface $f(\varphi!\hat{z})$" es un nombre de segundo orden.

Un tal nombre, por contener su expresión definitoria una función de segundo orden, contiene también (y debe ser definible sólo en términos de) la totalidad de funciones de primer orden; algunas de las cuales entrañarán referencia a la totalidad de nombres de primer orden. De este modo se puede proceder a través de una jerarquía total. Volviendo, ahora, a la paradoja, vemos que la palabra "nombrable" es ambigüa respecto al orden. Para resolver la ambigüedad hay que especificar: "nombrable por nombres de orden *n*". Y cualquier nombre que contenga la expresión "nombrable por nombres de orden *n*" es necesariamente un nombre de orden superior a *n*. Así, partiendo, por ejemplo, de $k = 33$, resulta que el menor de los números enteros no susceptibles de ser nombrados con un nombre de orden *n* en menos de *k* sílabas *es* nombrado en menos de *k* sílabas, pero nombrado con un nombre de orden $n + 1$, y no con un nombre de orden *n*. Con lo cual la paradoja se disuelve.

De manera análoga cabe tratar la paradoja del mentiroso. Esta exige una jerarquía en órdenes de las proposiciones: Las proposiciones constituyen una "totalidad ilegítima", esto es, un conjunto que carece de totalidad

paradoja se produce con la noción semántica "nombrable con menos de *k* sílabas". La palabra "nombrable" según esta proposición: "todas las proposiciones son verdaderas o falsas". Pero esta proposición "no podrá ser legítima a menos que 'todas las proposiciones' se refiera a alguna colección ya definida, lo que no puede hacerse si se crean nuevas proposiciones mediante expresiones que contengan 'todas las proposiciones'"[76]. Por ello, "es necesario descomponer nuestro conjunto [de proposiciones] en otros más pequeños, cada uno de los cuales sea capaz de una totalidad"[77]. A tal efecto las proposiciones son colocadas en una jerarquía de órdenes. Son *Proposiciones elementales* aquellas que no contienen funciones ni variables aparentes. "Una proposición tal como 'esto es rojo', en donde 'esto' es algo dado por la sensación, será elemental"[78]. Una proposición elemental se representa por φa, en donde *a* es un individuo (el término que en la proposición no es función). A partir de φa (de las proposiciones elementales) cabe establecer el proceso de generalización (cuantificación) y hablar de totalidades (colecciones), distinguiendo órdenes de proposiciones:

(a) *Proposiciones de primer orden:* aquellas que contienen una o más variables aparentes, cuyos valores posibles son individuos, pero no contienen otras variables aparentes. Las proposiciones de primer orden son valores de las funciones de primer orden. Según esto, una proposición de primer orden no abarca una totalidad excepto la de individuos; no es una proposición acerca de proposiciones; aparece, por ejemplo, en estas formas: $(x)\ \varphi!\ x$ ó $(\exists x)\ \varphi!x$, en donde $\varphi!x$ es una función predicativa de un individuo.

(b) *Proposiciones de segundo orden:* aquellas que lo son sobre proposiciones de primer orden. Si *p* representa una proposción elemental variable o una proposición de primer orden variable, entonces $f(p)$ es una función de alguna de estas formas: $F(\varphi!\ x)$ ó $f\{(x)\ \varphi!\ x\}$ ó $f\{(\exists x)\ \varphi!x\}$.

Por tanto, una proposición que abarca la totalidad de las proposiciones de primer orden es valor de una función de segundo orden. Y así sucesivamente, de modo que la jerarquía proposicional puede derivarse de

legítima", esto es, un conjunto que carece de totalidad, lo cual significa que no puede tomarse ninguna expresión acerca de "todos sus miembros". Si hubiese una totalidad de proposiciones contendría entre sus miembros la jerarquía funcional: en general, una proposición de orden *n* es aquella que abarca una variable aparente de orden *n-1* en una jerarquía funcional, es decir, aquella que lo es sobre proposiciones de orden *n-1*.

[75] *Ibidem*, p. 63.
[76] *Ibidem*, p. 37.
[77] *Ibidem*.
[78] *Ibidem*, p. 91.

La jerarquía de proposiciones permite resolver la paradoja del mentiroso en cualquiera de sus versiones. En los *Principia* viene formulada así: un hombre dice "estoy mintiendo". Lo cual puede interpretarse como : "Hay una proposición que yo estoy afirmando y que es falsa", esto es, "yo afirmo *p*, y *p* es falsa". Aquí la paradoja se produce por la ambigüedad (la falta de especificación respecto del orden) de la palabra "falsa". Para deshacer esa ambigüedad hay que especificar el orden de la falsedad, o lo que es lo mismo, el orden de la proposición a la que se adscribe la falsedad. Y, según la jerarquización de las proposiciones, "si *p* es una proposición de orden *n*, una proposición en la que intervenga *p* como variable aparente no es de orden *n*, sino de un orden más alto. Por lo tanto, es evidente que la especie de verdad o falsedad que pueda partenecer al enunciado "hay una proposición *p* que yo estoy afirmando y la cual tiene una falsedad de orden *n-ésimo*" tiene una verdad o falsedad de un orden superior a *n-ésimo*. Por lo tanto, el enunciado de Epiménides no cae dentro de su propio alcance y, por consiguiente, no surge contradicción"[79].

Lo mismo vale para el enunciado singular "yo estoy mintiendo". Si consideramos tal enunciado como una forma condensada de presentar simultáneamente todos los enunciados: "yo estoy afirmando una proposición falsa de primer orden", "yo estoy afirmando una proposición falsa de segundo orden", y así sucesivamente, nos encontraremos con la siguiente situación: puesto que no se está afirmando ninguna proposición de primer orden, el enunciado "yo estoy afirmando una proposición falsa de primer orden" es falso. Este enunciado es de segundo orden, y, por tanto, el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de segundo orden" es verdadero. Este es un enunciado de tercer orden, y es el único enunciado de tercer orden que se está haciendo. Por lo tanto, el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de tercer orden" es falso. Así, pues, vemos que el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de orden *2n + 1*" es falso, mientras que el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de orden *2n*" es verdadero. Pero en este estado de cosas no hay contradicción[80].

La jerarquización de las proposiciones permite resolver satisfactoriamente todas las versiones de la para-

El axioma de reducibilidad

La teoría simple de los tipos ha sido, generalmente, aceptada como autoevidente por la mayoría de los lógicos. La teoría ramificada de los tipos, por el contrario, ha encontrado mayor resistencia en su aceptación. El mismo Russell se percató de que las restricciones impuestas por la jerarquía de órdenes, si bien permitían solventar cierto tipo de paradojas, sin embargo, presentaban serias dificultades. La teoría prohibe formular principios y teoremas básicos de las matemáticas clásicas: El principio de inducción matemática no puede ser establecido en toda su generalidad para cada propiedad o función de los números naturales, sino sólo para todas las propiedades de primer orden o para todas las de segundo orden o para las de tercer orden, etc. "una función proposicional de *x* puede ser, como hemos visto, de cualquier orden; por consiguiente, un enunciado acerca de 'todas las propiedades de *x*' carece de sentido. (Una 'propiedad de *x*' es lo mismo que una 'función proposicional que vale para *x*')[81]. La teoría ramificada de los tipos prohibe, asimismo, formular el teorema del Límite Superior Mínimo, (debido a Dedekind, y que corresponde al concepto suyo de "cortadura"), el cual afirma que para cualquier conjunto C no vacío de números reales R existe un número real *r* que es el límite superior mínimo del conjunto, esto es, un número real que no es menor que cualquiera de los del conjunto y tal que cualquier otro número real no menor que cualquiera del conjunto es mayor que él. En símbolos:

Siendo:

$$C \subset R \;\&\; (x)\,(y)\,(x \in C \;\&\; y \in R),$$

tenemos:

$$r \geq x \;\&\; (y \geq \rightarrow y > r)$$

Según la definición dada por Dedekind, mediante el concepto de "cortadura", un número real es la clase de todos los números racionales menores que todos los racionales que satisfacen una propiedad característica (una función). Así, por ejemplo, el número real $\sqrt{2} = m$ es la clase de todos los números racionales menores que todos los números racionales cuyos cuadrados son mayores que 2; *m* produce una "cortadura" (ver *supra*). Traducida

solver satisfactoriamente la paradoja del mentiroso, si bien, como los autores de los *Principia* reconocen: "nunca se requiere en la práctica y sólo tiene interés para la solución de paradojas".

esta definición a la teoría ramificada de los tipos, *m* es definido como una función de racionales satisfecha por todos y sólo aquellos racionales menores que todos los

---

[79] *Ibidem*, p. 62.
[80] *Ibidem*.
[81] "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 110.

racionales cuyos cuadrados son mayores que 2. Ahora, para un orden i, dado un conjunto R^i de números reales, que satisfacen una condición (función) F^{i+1}, el límite superior mínimo, L. S. M., de R^i (que, de acuerdo con el teorema, lo posee) es definido como el conjunto de todos los racionales Q^{i-1} que pertenecen a cualquier R^i que satisface la condición F^{i+1}. El L. S. M. es la función R^i L. S. M. satisfecha para todos los racionales Q^{i-1} menores que todos los racionales Q^{i-1} no pertenecientes a cualquiera de los números reales R^i que satisfacen F^{i+1}. Pero, de acuerdo con la teoría ramificada de los tipos, la función que especifica el L. S. M. de R^i, esto es, R^i L. S. M., debe ser de un orden superior al de los números reales de los que es L. S. M., ya que, en su especificación, envuelve una referencia a la totalidad de las funciones que especifican números reales, incluida ella misma. De modo que el L. S. M. de R^i ha de ser de un orden superior al de los números pertenecientes a R^i. En consecuencia, la aplicación de la teoría ramificada de los tipos prohibe la utilización del teorema sobre el Límite Superior Mínimo, lo cual resulta muy perjudicial para el Análisis.

Para evitar estos efectos no deseados producidos por las restricciones impuestas por la teoría ramificada de los tipos, introduce Russell el *Axioma de reducibilidad*.

El Axioma de reducibilidad establece que dada una función proposicional de cualquier tipo, de cualquier orden y de cualquier número de argumentos, hay una función del mismo tipo y del mismo número de argumentos pero de primer orden (predicativa de individuos). Así, en caso de una función de un argumento, $\varphi\hat{x}$, hay una función predicativa $\Psi!\,\hat{x}$ que es verdadera cuando φx es verdadera y falsa cuando φx es falsa. Simbólicamente:

$$(\varphi)\,(\exists\Psi)\,(x)\,(\varphi x \equiv \Psi!\,x)$$

Para explicar los objetivos del axioma introduce[82] Russell la noción de *predicado:* Llama *predicado* de un objeto a una función predicativa que es una verdad de tal objeto. La noción de "predicado" es distinta de la noción de "propiedad". Esta es más amplia e incluye a la primera. Hay propiedades que se refieren a una totalidad de propiedades y hay otras que no: sólo las segundas son predicados. Así, al decir "Napoleón era corso" o "Napoleón era grueso" no nos referimos a ningún conjunto de propiedades. En el primero de los ejemplos, la proposición viene a decir: "Si para todo objeto x el predicado 'ser un gran general' entraña un predicado φ, Napoleón posee siempre el predicado φ':

$$(\varphi)\,(x)\,[(x \text{ es un gran general} \rightarrow \varphi!x) \rightarrow \varphi!\,(\text{Napoleón})]$$

Aquí tener los predicados que poseen el predicado φ es una *propiedad* del objeto a (Napoleón), pero no es un *predicado* de a, porque el predicado φ se refiere, lógicamente, no directamente a Napoleón, sino a sus cualidades (predicados), considerados como objetos susceptibles de tener un predicado común.

Con estas especificaciones, "el axioma de reducibilidad es equivalente a la suposición de que 'cualquier combinación o disyunción de predicados es equivalente a un predicado único'; es decir, a la suposición de que, si aseveramos que x tiene todos los predicados que satisfacen la función $f(\varphi!\,\hat{z})$, habrá algún predicado que tendrá x, siempre que nuestra aserción sea verdadera, y que no tendrá cuando sea falsa; y, similarmente, si aseveramos que x posee alguno, más bien que todos, de los predicados que satisfacen la función $f(\varphi!\,\hat{z})$. Mediante esta suposición, el orden de una función no-predicativa puede disminuirse en un grado; por tanto, después de un cierto número finito de pasos habremos logrado pasar de cualquier función no-predicativa a una función predicativa formalmente equivalente"[83].

En nota aclara Russell que la combinación o disyunción de predicados ha de entenderse *intensionalmente*, ya que en sentido *extensional* (por enumeración) no sería necesaria la suposición. Ahora bien, esta explicación de Russell da a entender que las cuantificaciones, universal y existencial, constituyen, respectivamente, una conjunción continuada y una disyunción continuada. Así, en el ejemplo anterior el enunciado: "Napoleón poseía todas las cualidades de un gran general" equivaldrá al enunciado: "Napoleón era perspicaz, hábil, diestro, arriesgado, valiente, persuasivo, etc." Según esto, la jerarquía de las funciones en órdenes no viene exigida, a diferencia de la jerarquía de los tipos, por la naturaleza de las cosas, sino por las confusiones lingüísticas que puedan producirse. Tal será la conclusión que extraerá Ramsey, en 1926, y generalmente aceptada a partir de entonces.

piedades. Pero si decimos: "Napoleón tenía todas las cualidades de un gran general" o "un español típico es el que posee todas las cualidades que posee la mayoría de los españoles", nos estamos refiriendo a una totalidad de

El axioma de reducibilidad permitía a Russell librarse de las onerosas restricciones impuestas por la teoría ramificada de los tipos. Así, le permitía definir la identidad en términos de funciones predicativas[84]: "x

[82] *Principia Mathematica*, I, p. 56.
[83] *Ibidem*, p. 59.
[84] *Ibidem*, p. 169.

es idéntico a y" significa: "y satisface todas las funciones predicativas que satisface también x":

$$(x = y) =_{def.} (\varphi)\,(\varphi!\, x \rightarrow \varphi!\, y)$$

Si x satisface una función φ de orden n $(n > 1)$ hay también una función φ de primer orden (predicativa) a la que satisface x (en virtud del axioma de reducibilidad), y que también satisface y (en virtud de la definición de identidad), y puesto que φ de primer orden es formalmente equivalente (en virtud del axioma del reducibilidad) a φ de orden n, entonces y satisface también φ de orden n.

De modo análogo, el principio de inducción matemática puede ser formulado en términos de propiedades exclusivamente del primer orden. Y, asimismo, el teorema del Límite vuelve a quedar vigente, ya que a la función de un orden superior R^i L. S. M. corresponde (en virtud del principio de reducibilidad) la función predicativa $R!$ L. S. M., que es un número real como los demás.

En la primera edición de los *Principia* Russell aduce varias razones para aceptar el axioma de reducibilidad. Un primer argumento en favor del Axioma[85] es que la asumpción de éste es menor que la asumpción de la existencia de clases. Y la razón aducida es que el Axioma viene implicado por la existencia de clases, ya que, si existe la clase, entonces para cualquier función $\varphi\hat{x}$ de cualquier orden hay una clase α que se compone exactamente de los objetos que satisfacen $\varphi\hat{x}$, y por tanto hay una función predicativa coextensiva con $\varphi\hat{x}$, esto es, "x pertenece a α", que constituye una función predicativa de x.

Este argumento, empero, parece ir precisamente contra la propia teoría ramificada de los tipos, i. e., contra la jerarquía de órdenes, volviendo a introducir una concepción "realista" de las clases[86]: Primero, porque el Axioma afirma la existencia de una función (predicativa) con independencia de que podamos, o no, especificarla, lo cual va en contra de la teoría que prescribe ir construyendo (jerarquizando) las funciones en órdenes. Y, segundo, porque el Axioma establece que cualquier clase que pueda ser especificada puede serlo predicativamente, lo cual significa que toda la jerarquía de funciones no-predicativas (de orden superior a 1) re-

dente por sí. Pero, de hecho, la autoevidencia nunca es más que una parte de la razón para aceptar un axioma, y no es nunca indispensable. La razón para aceptar una axioma, como para aceptar cualquier otra proposición, es siempre ampliamente inductiva; es decir, que muchas proposiciones casi indudables puedan deducirse de él y que no se conozca ningún modo igualmente aceptable en que dichas proposiciones pudieran ser ciertas si el axioma fuese falso, y que nada que sea probablemente falso pueda deducirse de él"[87]. Según esto, Russell propone la aceptación del axioma sobre la base de la evidencia inductiva. Pero han sido muchos los que consideraron tal base como lógicamente inadecuada, porque su certeza podía ponerse en duda y porque su certeza, si resulta verdadero, parece ser empírica y no lógica. Así, Wittgenstein sostiene que "Proposiciones como el 'Axioma de reducibilidad' de Russell no son proposiciones lógicas, y esto explica nuestro sentimiento de que aunque fuesen verdaderas sólo podrían serlo por una feliz casualidad. Se puede pensar un mundo en el cual el axioma de reducibilidad no sea válido. Pero es claro que la lógica no tiene nada que ver con la cuestión de si nuestro mundo es realmente así o no"[88]. La alternativa al axioma recomendada por Wittgenstein es la consideración estrictamente extensional de las funciones, lo cual significa que una función solamente puede producirse en una proposición por sus valores. Ello implica que todas las funciones de funciones son extensionales.

Chwistek, por otra parte, tomó[89], respecto del axioma de reducibilidad, una decisión que Russell, en la 2ª edic. de los *Principia*[90], calificó de "heroica": emprendió la tarea de elaborar un sistema puramente constructivista (y en sentido nominalista) de los fundamentos de la Matemática, prescindiendo de los axiomas de reducibilidad, de extensionalidad, y tratando de evitar, al mismo tiempo, las definiciones impredicativas que entrañan círculo vicioso. Los resultados, empero, obtenidos por Chwistek no fueron satisfactorios.

En la Introducción a la segunda edición de los *Principia* (1925), Russell comenta estas críticas al Axioma de reducibilidad. Reconoce que "este axioma tiene una justificación puramente pragmática: conduce a los resultados deseados y no a otros. No obstante, no es la clase de axioma con la que podamos quedar satisfe-

sulta irrelevante para las Matemáticas.

En segundo lugar, "difícilmente puede mantenerse la proposición de que el axioma de reducibilidad es evi-

chos. Pero tampoco puede decirse que, hasta ahora, se haya conseguido una solución satisfactoria"[91]. Y en el

---

[85] *Ibidem*, p. 58.
[86] *Confert* M. Sainsbury, *Russell*, ed. cit., p. 336.
[87] *Ibidem*, p. 59.
[88] Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 6. 1232 y 6. 1233
[89] L. Chwistek, "Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik", en *Mathematische Zeitschrift*, 14 (1922), pp. 236-243.
[90] *Principia Mathematica*, I, 2ª ed. 1925, p. XIV.

Apéndice C[92] estudia la alternativa sugerida por Wittgenstein[93]. Consiste en suponer que las funciones de proposiciones son siempre funciones de verdad, y que una función sólo puede darse en una proposición a través de sus valores, lo cual equivale a decir que las funciones pueden aparecer como argumentos sólo a través de los valores de verdad de los funtores /, ~, ∨, &, →, ≡, etc. En consecuencia, todas las funciones de funciones son extensionales, y todas las funciones formalmente (i. e., extensionalmente) equivalentes del mismo orden son idénticas. Bajo este supuesto ofrece Russell en el *Apéndice* B[94] una prueba del principio de inducción matemática sin asumir el axioma de reducibilidad. Pero confiesa que, sin el axioma, se ve incapaz de tratar adecuadamente el infinito dedekindiano y los números reales en general, así como también el teorema de Cantor de que $2^n > n$ (siendo n infinito). Por consiguiente, sin el axioma de reducibilidad, la teoría ramificada de los tipos no provee una base lógica suficiente y satisfactoria para la Matemática.

Concluye, así, Russell reconociendo que "quizá algún axioma posterior, que ofrezca menos objeciones que el de reducibilidad, podría dar estos resultados; pero no hemos conseguido encontrarlo"[95].

Poco después de la aparición de esta 2ª edición de los *Principia*, F. P. Ramsey acomete el estudio del axioma de reducibilidad en dos importantes trabajos[96]: *The foundations of Mathematics* (1925) y *Mathematical Logic* (1926). "No hay razón -dice Ramsey[97]- para suponer este axioma como verdadero; y si fuese verdadero, ello sería un feliz accidente y no una necesidad lógica, ya que no es una tautología...". Tal axioma no tiene sitio en matemáticas, y todo lo que no puede ser probado sin usarlo no puede ser considerado como probado en absoluto".

La tesis central de la que parte Ramsey es que las Matemáticas deben hacerse puramente extensionales. Entiende[98] "extensión" en su sentido lógico, en el que la extensión de un predicado (función) es una clase. Según esto, llamar a las Matemáticas "extensionales" significa que tratan, no con predicados (funciones), sino con clases; no con relaciones, sino con correlaciones o "relaciones en extensión". La clase es para Ramsey, no un principio de clasificación, sino un conjunto de cosas del mismo tipo lógico. En tanto que Russell sostiene, en los *Principia*, que una clase sólo puede ser definida por medio de una función proposicional, Ramsey considera que no hay objeción lógica a la definición por enumeración de cualquier clase, aunque ésta sea infinita: que no podamos *de facto* definir una clase infinita por enumeración se debe al hecho empírico de ser mortales quienes enumeran, hecho que los lógicos han de ignorar. Así, por ejemplo, en tanto que para Russell, cabe definir la clase que consta de los tres individuos a, b y c mediante la función proposicional "$x = a \vee x = b \vee x = c$", Ramsey, que repudia -como antes lo hizo Wittgenstein- la definición russelliana de identidad, considera inaceptable este método[99]. Una fórmula como $a = b$ no es, en realidad, una proposición, ya que, o bien a y b son nombres de la misma cosa, en cuyo caso la proposición no dice nada, o bien lo son de diferentes cosas, en cuyo caso es absurdo; en ningún caso constituye una aserción de un hecho.

Desde esta interpretación extensional establece, luego Ramsey, el concepto de "función predicativa", con vistas a prescindir del axioma de reducibilidad. a) Entiende por "proposición elemental" aquella que explícitamente está construida como una función de verdad de proposiciones atómicas. Así, por ejemplo, puede que tengamos "φa" y "$\varphi a: (\exists x)\ \varphi x$", que son la misma proposición, puesto que $(\exists x)\ \varphi x$ no añade nada a φa. Pero la primera es elemental; la segunda, no. b) Entiende por "función atómica de individuos" el resultado de reemplazar por variables cualquiera de los nombres de individuos en una proposición atómica. Los valores de una función atómica de individuos son, pues, proposiciones atómicas. c) Y entiende por "función de verdad de proposiciones" aquella que incluye entre sus argumentos funciones, las cuales son funciones de verdad de sus argumentos. Sean, por ejemplo, las funciones $\varphi_1\ (\hat{x})$, $\varphi_2\ (\hat{x})$, etc., entonces decir que la función $\Psi\hat{x}$ es una función de verdad (la suma lógica, por ejemplo) de las funciones $\varphi_1\ (\hat{x})$, $\varphi_2\ (\hat{x})$, etc., y las proposiciones p, q, etc., significa que cualquier valor de Ψx, Ψa por ejemplo, es la función de verdad de los correspondientes valores de $\varphi_1 (x)\ \varphi_2 (x)$, etc., i. e., $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a$, etc., y las pro-

[91] *Ibidem*, p. XIV.
[92] *Ibidem*, pp. 659-66.
[93] *Tractatus*, 5. 54 y ss.
[94] *Principia* I, pp. 650-58.
[95] *Ibidem*, p. XIV.
[96] Recogidos ambos en F. P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics*. Edic. de R. B. Braitwaite. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1ª edic. 1931, pp. 1-61 y 62-81.
[97] *The Foundations of Mathematics*, edic. de 1931, p. 28.
[98] *Ibidem*, p. 14.
[99] *Ibidem*, p. 16.

posiciones p, q, etc. Así, pues, la suma lógica de las funciones $\varphi_1(\hat{x})$, $\varphi_2(\hat{x})$, etc. es determinante como ψx ("función de verdad de proposiciones"), donde ψa es la suma lógica de $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a$, etc., una proposición definida para cada a, de modo que ψx es una función definida.

Con las anteriores precisiones define[100] Ramsey una *función predicativa* de individuos como cualquier función de verdad de argumentos que (sean finitos o infinitos en número) son todos: o funciones atómicas de individuos o proposiciones (atómicas). La función predicativa, así entendida, permite un número infinito de argumentos; y en esto difiere de las funciones elementales de los *Principia*. "Admitir un número infinito de argumentos entraña que no definimos el rango de las funciones como el de aquellas que podrían ser construidas de una cierta manera, sino que las determinamos mediante una descripción de sus significados"[101].

De modo análogo se define una función predicativa de funciones (predicativas) de individuos y de individuos como aquella que es una función de verdad cuyos argumentos son todos: o bien proposiciones o bien funciones atómicas de funciones de individuos y de individuos. Sea, por ejemplo, la proposición: $(\varphi) . f(\varphi\hat{x})$, donde $f(\varphi\hat{x})$ es una función predicativa de funciones. El rango de valores de φ es todas las funciones predicativas; i. e., $(\varphi) . f(\varphi\hat{x})$ es el producto lógico de las proposiciones $f(\varphi\hat{x})$ para cada función predicativa; y como éste es un determinado conjunto de proposiciones, $(\varphi) . f(\varphi\hat{x})$ tiene asignada una determinada significación.

Concluye Ramsey que la construcción anterior tiene muchas más ventajas que la paralela de los *Principia:* "En los *Principia* el rango de φ es el de las funciones que pueden ser expresadas de manera elemental, y dado que $(\varphi) . f(\varphi!\hat{z}, x)$ no puede ser expresado de esa manera, tampoco puede ser un valor de $\varphi!$; pero yo defino los valores de φ, no por cómo pueden ellos ser expresados, sino por qué tipo de sentidos tienen sus valores, o mejor, por cómo quedan correlacionados con sus argumentos los hechos que afirman sus valores... Y puesto que cualquier función formada por generalización sigue siendo actualmente predicativa, no hay ya necesidad alguna de un Axioma de Reducibilidad"[102]. A esto se añade que la noción de "función predicativa" no entraña contradicciones.

gicas", no conciernen a la Lógica (no pueden ser establecidas en términos estrictamente lógicos), sino que todos ellos contienen alguna referencia al pensamiento, al lenguaje o al simbolismo. Como ya antes había señalado Peano de la paradoja de Richard, este tipo de paradojas conciernen, no a la Matemática, sino a la Lingüística. No se deben a un defecto lógico o matemático, sino a ideas defectuosas concernientes al pensamiento o al lenguaje. No resultan, pues relevantes para las Matemáticas o para la Lógica. Y el otro grupo de paradojas (las paradojas "lógicas") son aquellas que contienen sólo términos lógicos o matemáticos, tales como "clase" y "número", y muestran que algo debe estar equivocado en nuestra Lógica o Matemática.

Russell, sin hacer distinción, atribuyó las paradojas (todas) a un mal funcionamiento de la Lógica, buscando remedio en la teoría de los tipos, la cual, en realidad, como muestra Ramsey, tiene dos partes bien distintas, destinadas, respectivamente, a solventar los dos grupos de paradojas.

Las paradojas "lógicas" quedan eliminadas con la "teoría simple de los tipos", es decir, con la restricción de que una función proposicional no puede tomarse a sí misma como argumento, y con la división de las funciones y clases en una jerarquía de tipos según sus posibles argumentos. "Esta parte de la teoría, dice Ramsey, me parece incuestionablemente correcta". Pero las paradojas "semánticas" complican la teoría russelliana: exigen la jerarquía de órdenes y esta complicación es innecesaria, según Ramsey, porque tales paradojas no son de la incumbencia de la Lógica. Para solventar tales paradojas habrá que acudir, como luego hará Tarski, a recursos semánticos.

5. El sistema formal de los Principia

Russell se inspira ampliamente en la simbología de Peano para la construcción de su sistema.

a) *Ideas primitivas y simbología:*

(1) El sistema se inicia con las *proposiciones elementales:* aquellas que no contienen variable alguna; o dicho de otra forma, que no entrañan palabras como "todo", "alguno", "el", o equiva-

En consecuencia, según Ramsey, el axioma de reducibilidad es supérfluo (amén de no ser lógico). Es fruto de la teoría ramificada de los tipos, la cual, a su vez, fue elaborada para eliminar las paradojas "semánticas". Pero este tipo de paradojas, que Ramsey llama "epistemoló-

palabras como "todo", "alguno", "el", o equivalente a ellas. Cualquier combinación de proposiciones elementales dadas será elemental. Las proposiciones elementales se representan mediante las letras p, q, r,...

---

[100] *Ibidem*, p. 39
[101] *Ibidem*, p. 39.
[102] *Ibidem*, p. 42.

(2) *Funciones proposicionales elementales:* Son las expresiones que contienen un constituyente indeterminado, es decir, una variable, o varios constituyentes tales que, cuando el constituyente indeterminado o los constituyentes se determinan (i. e., cuando se asignan valores a la variable o variables), el valor resultante de la expresión en cuestión es una proposición elemental. Una función proposicional se representa, según sea de uno, dos o más argumentos, mediante $\varphi x, \varphi(x, y), \varphi(x, y,...)$.

(3) *La aserción.* Cualquier proposición puede estar simplemente considerada o también aseverada; para ello se emplea el signo $\vdash$. Así la aserción de la proposición p se simboliza por $\vdash p$.

(4) *La negación.* Si p es una propsoción, la proposición "no-p" se representa por "$\sim p$".

(5) *La disyunción.* Si p y q son proposiciones cualesquiera, la proposición "p o q", en donde las alternativas no se excluyen mutuamente, se representa por "$p \vee q$".

(6) *La cuantificación universal.* La verdad de todos los valores de una una función proposicional φx se representa por "$(x)\ \varphi x$", en donde x se denomina variable aparente; mientras que en φx, en donde x no se especifica, x se denomina variable *real*.

b) *Definiciones*

A partir de las ideas primitivas se definen otras en términos de las primitivas. Siendo $p, q, r, \ldots$ proposiciones; $\varphi x, \varphi y, \ldots$ funciones proposicionales y utilizando puntos (al modo de Peano) como signos de separación, tenemos:

(1) *Implicación* ("material"):
$$p \supset q \ .=. \sim p \vee q \ Df.$$

(2) *Conjunción:*
$$p \ . \ q \ .=. \sim (\sim p \vee \sim q) \ Df.$$

(3) *Coimplicación:*
$$p \equiv q \ .=. \ p \supset q \ . \ q \supset p \ Df.$$

(4) *Cuantificador existencial:*
$$(\exists x).\ \varphi x \ .=. \sim \{(x) \ . \sim \varphi x\} \ Df.$$

(5) *Identidad:*
$$x = y \ .=. \ (\varphi) : \varphi! \ x \ . \supset . \ \varphi! y \ Df.$$

c) *Proposiciones primitivas (Pp)*

• *Axiomas del cálculo proposicional:*

(1) $\vdash : p \vee p \ . \supset \ . \ p$ ..... $Pp.$

(2) $\vdash : q \ . \supset . \ p \vee q$ ..... $Pp.$

(3) $\vdash : p \vee q \ . \supset . \ q \vee p$ ..... $Pp.$

(4) $\vdash : p \vee (q \vee r) \ . \supset . \ q \vee (p \vee r$ ..... Pp[103].

(5) $\vdash : . \ q \supset r \ . \supset : p \vee q \ . \supset . \ p \vee r$ ..... $Pp.$

(6) $\vdash : \varphi x \ . \supset . \ (\exists z) \ . \ \varphi z$ ..... $Pp.$

(7) $\vdash : (x). \ \varphi x \ . \supset . \ \varphi y$ ..... $Pp.$

(8) $\vdash : . \ (x). \ p \vee \varphi x \ . \supset : p \ . \vee . \ (x) \ . \ \varphi x \ldots \ Pp.$

• *Reglas:* Además de (entre) estas proposiciones primitivas, Russell introduce otras, (en cuya formulación utiliza el lenguaje ordinario), que tienen distinto carácter. Son, propiamente, *reglas* (de transformación), y en cuanto tales diferentes de los axiomas o *leyes:*

(9) Todo lo implicado por una proposición elemental verdadera es verdadero..... Pp[104].

(10) Si φy es verdadera, donde φy es cualquier valor de $\hat{\varphi x}$, entonces $(x) \ . \ \varphi x$ es verdadera ..... Pp[105].

Están también:

(11) El Axioma de *Reducibilidad:*
$\vdash \therefore (\varphi) \ (\exists f) \ \therefore (x) \varphi x \ . \equiv \ . \ f! \ x$

(12) La *Identidad:*
$x = y \ .=. \ (\varphi): \varphi! \ x \ . \supset . \ \varphi! \ y$

(13) El Axioma de *Infinito:*
$\alpha \in N \ C \ induct. \supset \alpha. \ \exists! \ \alpha.$

(14) El Axioma *Multiplicativo* (de Elección)[106]:
$\exists! \ \epsilon_{\Delta} \ 'Cl \ ex \ '\mu$, el cual resulta equivalente a:
$\mu \in ''\Omega \cup 1$, en donde $\mu \in C \ ''\Omega$ significa que μ es una clase que puede ser bien ordenada.

[103] Bernays demostró que ese axioma es supérfluo o redundante: "Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalkuls der *Principia Mathematica*", en *Mathemastische Zeitschrift*, 25 (1926), pp. 305-320.

[104] "No podemos expresar simbólicamente este principio porque, en cierto modo, cualquier simbolismo en el que p es variable sólo ofrece la *hipótesis* de que p sea verdadero, pero no el *hecho* de que sea verdadero". (*Principia*, I, p. 94).

[105] "No podemos expresar simbólicamente esta proposición; pues si la trascribimos por "$\varphi y .) . (x). \varphi x$", nuestra expresión querrá decir: "*φy* implica que todos los valores de $\varphi \hat{x}$ son verdaderos, donde a y puede corresponder cualquier valor del tipo apropiado", cosa que no sucede así por regla general" (*Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 120. Y *Principia*, I, p. 132.

[106] Este axioma fue llamado por Zermelo "axioma de elección", nombre que, finalmente, prevaleció en los *Principia* como una hipótesis, y todos los enunciados dependientes de él llevan marca. Se utiliza para probar el teorema de buena ordenación, y, por lo tanto, para la comparación de ordinales. Pese a las reticencias hacia el axioma de elección, en 1938 Gödel probó su consistencia, y en 1963 (Cohen probó su independencia sin supuesto alguno adicional, ya que su independencia, pero empleando supuestos de existencia de individuos o conjuntos especiales había sido probada ya, en 1922, por Fraenkel.

El sistema lógico de los *Principia* viene presentado de modo gradual: lógica de proposiciones, lógica de funciones y jerarquía de funciones, lógica de clases y lógica de relaciones.

Las clases se introducen como "símbolos incompletos"[107]. Se entiende por clase el conjunto de objetos que satisfacen una función proposicional, de forma que cada función proposicional determina una clase, y que dos funciones que son formalmente equivalentes (se coimplica su verdad) determinan la misma clase, y a la inversa: dos funciones que determinan la misma clase son formalmente equivalentes. Y, cuando dos funciones son formalmente equivalentes, se dice que tienen la misma *extensión*. Para Russell, pues, una clase no es sino la extensión de una función. El conjunto de objetos que componen la clase determinada por la función $\varphi \hat{x}$ se representa por $\hat{x}\,(\varphi x)$. Una clase está, pues, siempre en relación con una función que la determina, y una misma clase tiene muchas funciones determinantes. Cuando no sea necesario especificar una función determinante de una clase, esto es, cuando las proposiciones que intervienen en la función dependen sólo de la *extensión* de ésta (funciones "extensionales"), entonces la clase puede ser representada por una letra griega: α, con el objeto de aligerar la notación, pero teniendo siempre presente, como ya antes había señalado Russell en su "teoría sin clases", que las clases son símbolos incompletos: no tienen una significación aislada; tan sólo se definen en su uso, y siempre, en todo caso, pueden ser expresadas en términos de función y argumento, si bien la utilización práctica recomienda su notación mediante letras griegas. Así, se entiende por clase:

$$Cls = \hat{\alpha}\ \{(\exists \varphi).\ \alpha = \hat{z}\ (\varphi! z)\},$$

en donde una letra griega, tal como α, es sencillamente una abreviatura de una expresión de la forma $\hat{z}\ (\varphi! z)$.

De modo análogo se introducen las relaciones tomadas en *extensión*. Una relación viene determinada por una función de dos o más argumentos. Así la función $\varphi(\hat{x}, \hat{y})$ determina la relación R entre x e y. Considera la relación como una clase de pares ordenados (x, y) para los que $\varphi(\hat{x}, \hat{y})$ es verdadera; tal relación es representada así:

$$\hat{x}\ \hat{y}\ \varphi(x, y)$$

Y cuando no resulte necesario especificar la función determinante (consideración de las relaciones en *extensión*), la notación anterior puede quedar reducida a una letra latina mayúscula, R. Así:

$$R = \hat{x}\ \hat{y}\ \varphi(x, y) = \hat{x}\ \hat{y}\ (x\,R\,y)$$

6. Fundamentación de la Aritmética

La consideración de las clases (y las relaciones) como "símbolos incompletos", libera a Russell de un compromiso ontológico: permite "eludir la decisión acerca de si una clase de cosas tiene, en algún sentido, existencia como objeto. Por otra parte, es indiferente a nuestra lógica tomar una decisión respecto de esta cuestión"[108].

Respecto de las clases, Russell se presenta, así, como un agnóstico[109]: ni afirma ni niega su realidad como entidades actuales. Clases, números, relaciones (en extensión), puntos, instantes, partículas de materia, incluso objetos ordinarios fueron tratados del mismo modo que las descripciones: cada uno de ellos fue reducido de una entidad actual a un símbolo incompleto que vendría interpretado en términos de funciones proposicionales y variables u objetos sensibles. Así, todas las proposiciones sobre clases, pueden ser resueltas en proposiciones sobre los valores de las funciones proposicionales. Y los números, en cuanto que son clases de clases, son funciones consideradas en extensión o descripciones generales, y no objetos físicos o sucesos mentales. La definición lógica de número viene establecida así: "el número de elementos de una clase dada es la clase de todas las clases semejantes a la clase dada". El número 0 es, entonces, la clase de todas las clases semejantes a la clase nula, entendiendo por ésta la clase de los x que hacen a una función proposicional $\varphi(x)$ siempre falsa. En simbología de los *Principia*:

$$a \in 0: \equiv : \alpha = \Lambda,$$

o también:

$$a \in \hat{z}\,(\varphi z): \equiv : x\ .\ \sim \varphi x.$$

El número 1 es la clase de todas las clases semejantes a la clase unitaria, siendo ésta definida

$x\ y\ \varphi(x, y)$.

[107] *Principia Mathematica*, I, p. 71-72: "Los símbolos para clases, al igual que los símbolos para las descripciones, son, en nuestro sistema, símbolos incompletos; sus *usos* están delimitados, pero en sí mismos no conllevan significación alguna... Así, pues, las clases -hasta el punto en que las hemos introducido- son convenciones meramente simbólicas o lingüísticas, y no objetos genuinos como lo son sus miembros si son individuales".

[108] *Principia Mathematica*, I, p. 24.

[109] "Cuando renunciamos a afirmar que hay clases, no deberá suponerse que afirmamos dogmáticamente que no hay ninguna. Somos sencillamente agnósticos frente a ellas: lo mismo que Laplace, podemos decir: *'Je n'ai pas besoin de cette hypothèse'*" *(Introd. a la Filos. Matemt.*, ed. cit., p. 1376.

una clase no nula y tal que si dos elementos pertenecen a ella, son iguales:

$$a \in I : \equiv : (\exists x) : x \in \alpha : y \in \alpha . \supset_y . y = x,$$

o también:

$$\hat{z}(\varphi z) \in I . \equiv : (\exists x) : y \in \hat{z}(\varphi z) . \equiv_y . y = x.$$

El número 2 es la clase de todas los duos; el número 3, como la clase de los tríos, etc.:

$$a \in 2 . \equiv . (\exists x)(\exists y) . x \neq y . z \in \alpha . \supset_z . z = x . \vee . z = y.$$

$$a \in 3 . \equiv . (\exists x)(\exists y)(\exists z) . (x \neq y) . (y \neq z) . (x \neq z) . u \in \alpha . \supset_u . u = x . \vee . u = y . \vee u = z.$$

Estas definiciones de números como clases de clases nos permiten obtener números aislados, pero no la serie de los números enteros. Podemos definir el número 12 como la clase de las docenas (apóstoles, meses del año, signos del zodiaco, etc.) pero esta definición no implica en modo alguno la existencia del inmediato inferior (el 11) o el inmediato superior (el 13). La teoría cardinal del número, considerado como la clase de clases, ha de ser completada con la toría ordinal. Para ello parte Russell de la axiomática de Peano para la Aritmética, pero, a diferencia de éste, Russell se propone una ulterior reducción al plano lógico de las tres ideas consideradas por Peano como "primitivas" o "irreductibles" de la Aritmética: "Cero" (0), "número" (N) y "sucesor" (a + 1).

Russell comienza criticando la concepción de número de Peano, por cuanto que esa manera de proceder no nos asegura ni la existencia ni la unicidad de la serie natural de los números. En efecto, lo que hacen los cinco axiomas de Peano es, simplemente, caracterizar una progresión, es decir, una serie que no tiene por qué ser necesariamente la de los números naturales. Las tres ideas primitivas pueden convenir a un número infinito de interpretaciones, todas las cuales satisfacen los cinco axiomas. Por ejemplo, siendo *"N"*: la serie *0, 2, 4, 6; "0": 0* (mantiene ese valor) y *"a + 1": a + 2*; o también *"N"*: la serie *1, 1/2, 1/4, 1/8, ...; "0": 1*; y *"a + 1": a/2*.

El hecho (este formalismo) de que esta concepción del número nos lleve a tal variedad de interpretaciones revela, según Russell, que ella es inadecuada. Una adecuada concepción de los números exige que éstos "sirvan para contar objetos corrientes, lo cual requiere que tengan un significado *definido* y no meramente que gocen de ciertas propiedades formales"[110]. Para lograr una defición adecuada de número, que evite las dificultades señaladas, transforma, Russell el axioma V de Peano, que caracteriza la inducción matemática, en una definición, introduciendo las siguientes nociones:

a) *Propiedad "hereditaria":*

> "Una propiedad se llama 'hereditaria' en la serie de los números naturales si, todas las veces que conviene a un número *n*, conviene también a *n + 1*, el sucesor de *n*. De modo análogo, una clase será 'hereditaria' si, siempre que *n* es un miembro de ella, lo es también *n + 1*"[111].

Según esto, decir que una propiedad es hereditaria equivale a decir que conviene a todos los números no menores que alguno de ellos. Si de ellos tomamos el 0, ello significa que conviene a todos los no menores que 0, esto es, conviene a todos sin excepción.

b) *Propiedad "inductiva":*

> "Una propiedad se llama 'inductiva' cuando se trata de una propiedad hereditaria que conviene a *0*. Análogamente, una clase se llama 'inductiva' cuando se trata de una clase herediataria de la que *0* es un miembro"[112].

De esta definición se sigue que cualquier número natural dado es un miembro de cualquier clase inductiva.

c) *"Posteridad" de un número:*

> "La 'posteridad' de un número natural dado respecto de la relación 'inmediato predecesor' (que es el converso de 'sucesor') es la totalidad de aquellos elementos que pertenecen a toda clase hereditaria a la que el número dado pertenece"[113].

De esta definición se desprende que la posteridad de un número natural se compone de este número natural y de todos los números naturales mayores que él.

De acuerdo con las nociones anteriores cabe establecer, ahora, la definición siguiente:

[110] *Introduc. a la Filos. Matemát.*, ed. cit., p. 1272. E *Ibidem*, p. 1271: "Los números no los queremos simplemente para verificar fórmulas matemáticas, sino para aplicarlos correctamente a los objetos corrientes. Queremos tener diez dedos, dos ojos y una nariz. Un sistema en el que "1" significase 100 y "2" significase 101, podría estar muy bien para la matemática pura, pero no nos serviría para nada en la vida cotidiana. Es conveniente que "0", "número" y "sucesor" tengan un significado que nos proporcione el balance exacto de dedos, ojos y narices".

[111] *Introduc. a la Filos. Mat.*, ed. cit., p. 1278.

[112] *Ibidem.*

[113] *Ibidem*, p. 1278-79.

• *Número natural (=N):*

> "Los 'números naturales' son la posteridad de 0 respecto de la relación 'inmediato predecesor' (que es el converso de 'sucesor')"[114].

De esta manera, una de las tres ideas primitivas de Peano, i. e., la de "número" *(=N)* queda definida en función de las otras dos: *0* y *sucesor*. A su vez, estas dos ideas primitivas se hacen explícitas mediante la definición lógica del número como clase de clases:

> "El número *0* es el número de términos de una clase que no tiene términos, es decir, de la llamada 'clase nula o vacía'... Tenemos, así, la siguiente definición puramente lógica:
> *"0 es la clase cuyo único miembro es la clase nula"*[115].

Por lo que respecta a la idea de "sucesor", dado un número *n*, sea α una clase de *n miembros* y *x* un término que no sea miembro de α. Entonces, la clase compuesta por α con la adición de *x* tendrá *n + 1* miembros. Tenemos, así, la siguiente definición:

> *"El sucesor del número de términos de la clase α es el número de términos de la clase compuesta por α y x, siendo x cualquier término no perteneciente a la clase α"*[116].

De esta manera las tres ideas primitivas de Peano *(0, número y sucesor)* han quedado reducidas a ideas puramente lógicas. Y respecto de los cinco axiomas, el primero *(0* es número) y el quinto (la inducción matemática) son resultado, según lo expuesto, de la definición de "número natural". Se prueban, también, fácilmente el cuarto *(0* no es sucesor de ningún número) y el segundo (el sucesor de un número es un número). El tercero (dos números no pueden tener el mismo sucesor) exige, para su establecimiento, el axioma de infinitud (los elementos individuales que existen en el universo no constituyen una totalidad finita), ya que, de lo contrario, si el número total de objetos del universo fuese, por ejemplo, 10, entonces no habría ninguna clase de 11 individuos, y el número 11 sería una clase vacía; lo mismo ocurriría con el número 12, y tendríamos, así, 11 = 12; con lo que el sucesor de 10

En conclusión:

> "admitiendo que el número de individuos del universo no sea finito, se conseguirá no sólo definir las tres ideas primitivas de Peano, sino también demostrar sus cinco proposiciones primarias [axiomas] por medio de las ideas primitivas y de proposiciones pertenecientes a la Lógica. Se desprenderá entonces que toda la matemática pura, en cuanto deducible toda ella de la teoría de los números naturales, será solamente una prolongación de la Lógica"[117].

He aquí la conclusión de la teoría logicista, la fundamentación lógica de la Aritmética.

Esta teoría no está, a su vez, exenta de críticas.

En primer lugar, la noción de "hereditario" parece ser una característica lógica general, aplicable a no importa qué clase de objetos. Y así pretente hacérnoslo ver Russell aplicándola al fenómeno de descendencia propio de los seres vivos[118]. Por ej., siendo *R* la relación "padre", los conceptos de "antecesor" y de "posteridad" conservan su significado habitual.

Sin embargo, hay un aspecto esencial no tenido en cuenta por Russell en esta argumentación: la noción de "hereditario", aplicada a los números reviste un *carácter de necesidad* que no posee en otros dominios. En el dominio de los seres vivos, las propiedades hereditarias pueden modificarse, desaparecer o conducir a especies nuevas, incluso la vida, como propiedad específica, puede desaparecer, con lo cual, todo ser viviente (dejando aparte el primero) tiene un predecesor; pero no se sigue que tenga necesariamente un sucesor, de modo que quepa decir "después de todo ser vivo habrá siempre otro ser vivo". Cuando se trata de números, en cambio, dado un número *n* se sigue necesariamente *n + 1*.

La noción general de "hereditario" supone, ciertamente, para todos los miembros de una serie (excepto para el primero) la existencia de un predecesor, pero no implica que la serie de miembros prosiga indefinidamente y que todo miembro tenga necesariamente un sucesor. Esta última condición sólo la cumple la noción de "hereditario" numérico, que difiere, en consecuencia, de la noción general (lógica) de "hereditario". La reducción de la inducción matemática al plano lógico queda, así, en entredicho. Vuelve a

sería el mismo que el sucesor de 11, a pesar de no ser 10 el mismo que 11.

[114] *Ibidem*, p. 1279
[115] *Ibidem*.
[116] *Ibidem*.
[117] *Ibidem*, p. 1280.
[118] *Ibidem*, p. 1281.
[119] *La ciencia y la hipótesis*. Trad. cast. de A. B. Besio y J. Banfi. Espasa-Calpe, Madrid, 1963, Parte I, cap. I.

pio de inducción matemática; éste es un principio sintético *a priori*.

En segundo lugar, tanto la definición que Russell ofrece de "sucesor", como la validez del axioma tercero dependen de la hipótesis (o "axioma") del infinito. En efecto, para poder afirmar la proposición "por grande que sea el número *n*, hay en el universo un número de individuos más grande que *n*" es necesario probar la existencia de un número infinito de individuos en el universo. Pero el principio de no-contradición (la lógica) no nos permite, por sí mismo, resolver la cuestión de saber si existe, o no, en el universo un número finito o infinito de individuos: "no parece haber, incluso, ninguna necesidad lógica por la que debiera haber un individuo; por la que, de hecho, debiera haber siquiera un universo"[120]. El "axioma del infinito", postulado por Russell para su construcción lógica de la Aritmética, resulta, pues, una proposición que, si bien es susceptible de formularse en términos lógicos, no puede, sin embargo, ser afirmada como una verdad por la Lógica: "nada en lógica necesita de su verdad o falsedad, y sólo puede ser aceptada o rechazada sobre fundamentos empíricos"[121]. Resulta, entonces, que la construcción de la Aritmética descansa sobre premisas empíricas, lo cual supone la negación misma del proyecto logicista de fundamentar la Aritmética sobre únicamente la Lógica.

7. Filosofía de la Lógica

"La lógica, dice Russell[122], consta de dos partes. La primera investiga qué son las proposiciones y qué formas pueden tener; esta parte enumera las diferentes clases de proposiciones atómicas, de proposiciones moleculares, de proposiciones generales, etc. La segunda parte consta de ciertas proposiciones generales supremas, que afirman la verdad de todas las proposiciones con ciertas formas. Esta segunda parte se fusiona con la matemática pura, todas las proposiciones de la cual, en el análisis, resultan ser verdades formales de ese tipo general".

Consideramos, como también de lo que aquí expone Russell parece desprenderse, que la noción fundamental en Lógica es la de "proposición" y que en torno a ella cabe exponer buena parte, si no la totalidad, de la filosofía de la Lógica de un autor.

El mismo Russell afirmó que había habido una evolución en su pensamiento filosófico respecto de esta cuestión, pero también es cierto que a lo largo de toda esa evolución se mantiene con bastante constancia una "pronunciada actitud realista"[123]. El realismo de Russell está presente no sólo en pasajes de *The Principles* y de "Meinong's Theory..." (ver *supra*), sino también en otros muchos pasajes de sus escritos posteriores. Tras el abandono de ese primer realismo exagerado, fruto que "una especie de inocencia matutina"[124], siguió dominando su pensamiento una forma, un tanto modificada, de teoría referencial: la teoría del juicio como relación múltiple, expuesta en trabajos publicados entre 1910 y 1914: *Philosophical Essays* (1910), *Principia Mathematica*, Introduc. (1910), *Problems of Philosophy* (1912) y *Our knowledge of the external World* (1914). Según esta teoría, un juicio no consta de un objeto único, i. e., la proposición, sino que tiene varios objetos interrelacionados. En cada juicio o acto proposicional aparece una relación entre tres términos. Por ejemplo, en "Juan cree que la tierra es redonda", tenemos: "Juan", "tierra" y "redonda"; en "esto es rojo": la mente ("yo"), "esto" y "rojo". Estos términos, sustituidos por variables, nos proporcionan la formulación general siguiente: "A cree que X es Y" o "A juzga que X es Y", que puede ser parafraseada como A atribuye la Y-idad a X ("Juan atribuye la redondez a la tierra"). Creer o juzgar no constituye, según esta teoría, una especie de relación entre la persona que cree o juzga y un hecho único. Así, "cuando juzgamos que Carlos I murió en el cadalso tenemos ante nosotros, no un objeto, sino varios; o sea, Carlos I, morir y el cadalso. Parecidamente, cuando juzgamos que Carlos I murió en su lecho, tenemos ante nosotros los objetos, Carlos I, morir y su lecho. Estos objetos no son ficciones; son tan reales como los objetos del juicio verdadero. Por consiguiente, evitamos la necesidad de admitir falsedades objetivas o de admitir que cuando juzgamos falsamente no tenemos nada ante el espíritu. Por tanto, según esta opinión, el juicio es una relación de la mente con otros varios términos: cuando estos otros términos tienen *inter se* una

[120] Russell, *Introd. a la Filos. Matemát.* ed. cit., p. 1388. Y añade en nota: "Las proposiciones primitivas de los *Principia Mathematica* son tales, que permiten la inferencia de que al menos existe un individuo; pero ahora vemos que, en pura lógica, esto constituye más bien un defecto".

[121] *Principia Mathematica*, II, p. 183.

[122] *Our Konowledge of the External World*, ed. cit., p. 61.

[123] K. Gödel, "La lógica matemática de Russell", en *Obras Completas*. Trad. J. Mosterín. Alianza, Madrid, 1981, p. 299.

[124] *Confert: La evolución de mi pensamiento...* ed. cit., p. 178.

relación "correspondiente", el juicio es verdadero; cuando no, es falso"[125].

La teoría del juicio como relación múltiple difiere de la que lo considera como relación dual en que en vez de obtener un objeto internamente complejo obtenemos varios objetos que pueden o no existir como una unidad fuera del juicio complejo. Así, si juzgo que "A" ama a "B", no hay una relación dual de mí al "amor de A por B", sino una relación entre mí y A y el amor y B.

Esta teoría presenta, sin embargo, serias dificultades. En el ejemplo que acabamos de citar, "ama" es uno de los objetos del juicio al igual que "A", pero en el complejo factual de objetos funciona como una relación y una relación que establece cierto orden entre los objetos A y B. Ahora bien, si la relación es de mí a "A" y a "ama" y a "B" ¿cómo explicar la dirección y sentido en que quedan los objetos?, ya que no es mi acto mental el que coloca esos objetos en un orden, sino la relación "ama" que dota a la proposición de unidad propia independiente del acto mental. Además, se está presuponiendo la existencia de cualidades y relaciones reales, esto es, cualidades como redondez o amor.

Finalmente, como el mismo Russell reconoce en su período siguiente, esta teoría exige un postulado: presupone la existencia de un yo, cuya naturaleza no es la de las cosas que se dan en el mundo, de ahí que considere imperiosa "la tarea de elaborar una teoría de la representación y de la creencia en que no se haga uso para nada del "sujeto" o de un "acto" como elemento constitutivo de una representación"[126].

Durante el año 1918 Russell abandona las tesis de Brentano sobre la sensación en cuanto compuesta de tres elementos: acto, contenido y objeto, y en una serie de conferencias, agrupadas luego bajo el título de *La filosofía del atomismo lógico*, desarrolla las ideas discutidas con Wittgenstein durante el período 1912-14. Esta filosofía del "atomismo lógico" aparece reflejada en otros trabajos de aquella época: "Sobre las proposiciones: qué son y cómo significan" (1919); *The Analysis of Mind* (1921); Introducción a la edición inglesa del *Tractatus* de Wittgenstein (1922); *Atomismo*

Russell, como último residuo en el análisis, son átomos lógicos, no átomos físicos. El análisis formal es la parte de la Lógica que trata con las formas de la realidad. A la forma se accede mediante el análisis del lenguaje. "Y podremos explicar (aunque no definir formalmente) lo que entendemos por la "forma" de una proposición de la manera siguiente: La "forma" de una proposición es aquello que permanece invariable en ella cuando cada constitutivo de la proposición se reemplaza por otro"[127]. Así, "Sócrates es anterior a Aristóteles" tiene la misma forma que "Napoleón es más grande que Wellington", aunque los constitutivos de ambas proposiciones sean, respectivamente, diferentes. La forma proposicional es, pues, lo que queda cuando se sustituyen por variables los constituyentes de las proposiciones: Así, "x R y" puede representar la forma proposicional de los ejemplos anteriores.

Hay diferentes tipos de formas, y mediante el análisis formal (mediante el análisis del lenguaje) se procede descompononiendo los enunciados complejos en enunciados elementales, y posteriormente, recurriendo a la observación, se puede verificar si esos enunciados elementales corresponden, o no, a *hechos* elementales en la realidad, pero esta verificación no es ya una tarea del análisis. El proceso del análisis prosigue en el plano lingüístico tratando de llegar a los "nombres lógicamente propios" que nombran directamente los *"particulares"* o *"simples"*.

Esta doctrina comporta, al menos, tres supuestos ontológicos. El primero concierne a la naturaleza de las cosas, y se presenta en oposición a la metafísica monista: No hay más que hechos aislados. Un hecho es un complejo de particular (es) y cualidades y relaciones; es "aquello que hace verdadera o falsa a una proposición"[128]. Las proposiciones difieren de los nombres; "las proposiciones no son nombres de hechos... Resulta completamente evidente que una proposición no es el nombre de un hecho, por la simple razón de que hay siempre *dos* proposiciones en relación con cada hecho"[129]. A cada hecho corresponden siempre dos proposiciones, la una verdadera y la otra falsa. A un nombre, en cambio, sólo le cabe una única relación con el particular que nombra. El cometido de

lógico (1924), e *Introducción* a la 2ª edición de los *Principia* (1925).

La razón de denominar a esta teoría "atomismo lógico" es que los átomos a los que trata de llegar un nombre consiste exactamente en nombrar un particular; hay, pues, un particular para cada nombre; en cambio, siempre hay dos proposiciones en correspondencia con cada hecho. Y, finalmente, los hechos son

---

[125] *Ensayos filosóficos*, ed. cit., p. 222-223.
[126] "Sobre las proposiciones: qué son y cómo significan", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 428-29.
[127] Russell, *Introduc. a la Filos. Matemát.*, ed. cit., p. 1385.
[128] "La filosofía del atomismo lógico", en *Lógica y Conocimiento*. ed. cit., p. 256.
[129] *Ibidem*, p. 262.

objetivos, forman parte del mundo real y son independientes de nuestro pensamiento: "el mundo... no queda exhaustivamente descrito por medio de una serie de 'particulares', sino debemos asimismo tener en cuenta lo que yo llamo hechos, los cuales... forman parte del mundo real en la misma medida que las sillas y las mesas particulares"[130].

El segundo de los supuestos concierne a los primeros principios del conocimiento, y sostiene que no hay otra fuente de conocimiento de la realidad que la experiencia sensible. Sólo mediante la observación cabe verificar si las proposiciones -destinadas a expresar hechos- son verdaderas o falsas. Nada tiene que hacer el análisis (lingüístico) a este respecto: "nada hay en la naturaleza del símbolo que nos indique cuál es la (proposición) verdadera y cuál la falsa. Si lo hubiera, podríamos indagar la verdad acerca del mundo con sólo atender a las proposiciones, sin necesidad de que mirásemos a nuestro alrededor"[131].

El tercero de los supuestos versa sobre la sintaxis: la forma de las proposiciones guarda relación con la forma de los hechos, de modo que un lenguaje lógicamente perfecto sería completamente analítico, "y mostraría a simple vista la estructura lógica de los hechos afirmados o negados"[132]. En este sentido, el análisis lingüístico sí contribuye a la adquisición de conocimiento: "las propiedades del lenguaje pueden ayudarnos a entender la estructura del mundo"[133].

La doctrina del "atomismo lógico" de Russell comporta una ontología del *hecho* configurada desde su teoría semántica que fusiona significado y referencia: Para que una frase sea significativa debe estar compuesta de palabras que denotan cosas que conocemos o que son definibles en términos de tales palabras. En el lenguaje, los nombres lógicamente propios se refieren a objetos; y un nombre carece de significado si no existe un objeto del cual sea nombre. La fuente de los significados de las palabras se halla en la definición ostensiva, de modo que el primer paso sería: elementos simples en el lenguaje ("nombres") elementos simples en la realidad ("particulares"). A partir de estos elementos "simples" podemos reconstruir los demás compuestos: serán relaciones, combinaciones, etc. de aquéllos, y su significado estará en función del de aquéllos primeros. El problema creencias, en la medida en que tales palabras tienen algún significado. Así, tendríamos un nombre lógicamente propio para cada simple, pero no nombres lógicamente propios para los complejos, ya que estos últimos pueden definirse a partir de sus componentes simples y su estructura. Para que una frase sea significativa, debe estar compuesta de palabras que denotan cosas que conocemos, o que son definibles en términos de tales palabras.

Pero sostener esta doctrina implica:

(1) Erigir un criterio en virtud del cual podemos discernir los nombres lógicamente propios de los que no lo son (de las descripciones).

(2) Dar una explicación de palabras tales como *o, y, que, alguno*, etc., así como de otras tales como "Pegaso", "Sirena", "Abracadabra", etc., que no denotan objetos ni son descripciones.

(3) Distinguir *usos* de las palabras: aunque tengamos palabras-objeto como, por ejemplo, "madre", no es lo mismo usarlas en sentido indicativo que en sentido interrogativo.

El punto (1) nos enfrenta con el problema de los "particulares" y los "universales". La posición ha variado respecto de este asunto: en *The Principles*, desde una "inocencia matutina", cada "término" es poseedor de "todas las propiedades communmente asignadas a las sustancias o a los sustantivos" (§ 47). La teoría de los tipos empezó a minar esta simplicidad de *The Principles*, al establecer que algunas palabras no pueden ser sustituidas por otras sin hacer desaparecer el sentido. En *Análisis del Espíritu* (1921) es donde mejor quedan reflejadas las consecuencias del atomismo lógico, que, en lo referente al significado, distingue las siguientes nociones:

(1) *Nombre lógicamente propio* ("esto") significa (se refiere) a un particular.

(2) *Nombre propio* ("Juan") significa un conjunto de particulares.

(3) *Nombre común* ("hombre") significa una clase entera de conjuntos de particulares.

(4) *Particulares:* "llamo 'particulares' a tales elementos simples esenciales"[134], que intervienen en los

ma consiste, pues, en buscar un vocabulario mínimo, a partir del cual podemos definir todas las palabras usadas al expresar nuestro conocimiento empírico o nuestras

hechos atómicos y que no son relaciones.

A Russell le "parece evidente (como se lo parecía a Leibniz) que lo complejo haya de componerse de sim-

---

[130] *Ibidem*, p. 257.
[131] *Ibidem*, p. 263.
[132] *Ibidem*, p. 277.
[133] *An Inquiry into Meaning and Truth*, ed. cit., p. 429.
[134] *Análisis del Espíritu*, ed. cit., p. 213; *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 279-80.

ples, por más que el número de sus elementos constitutivos pudiera remontarse al infinito"[135]. En *El conocimiento humano* se plantea la tarea de encontrar esos particulares. Los más parecidos son los llamados "particulares egocéntricos", tales como *esto, aquí, ahora;* serían objetos conocidos directamente, experimentados.

La posición fluctuante de Russell sobre la naturaleza de los "particulares" (o "simples") se aprecia en la siguiente discusión:

> -"Sr. Carr: ¿No cree que, al llamar compleja a una cosa, está Vd. afirmando que hay realmente cosas simples? -Sr. Russell: No, no creo que lo segundo esté necesariamente implícito en lo primero"[136].

A partir de entonces, dice Russell[137], se convenció más de lo que entonces estaba de que no hay razón para esperar que el análisis llegue a los simples. Le llevó a esta convicción el análisis de las cualidades, según el cual, éstas, contrariamente a la consideración tradicional, para la que contaban como universales, son más afines a las particulares, a las "sustancias". Ahora queda invertida la posición inicial, de modo que los nombres lógicamente propios serían un caso límite de las descripciones. Completada en sus extremos, será la posición de Quine[138]: eliminar los términos singulares, tratando los nombres como términos generales.

En *An Inquiry into Meaning and Truth* (1940) vuelve a plantearse Russell las dos cuestiones a las que el título hace referencia, esforzándose por conectar la "significación" y la "verdad" con la "creencia" en vez de con la "proposición".

Un año antes A. Kaplan en I. M. Capilowish habían publicado un trabajo[139], en el que desde presupuestos conductistas intentaban mostrar la redundancia de las "proposiciones", analizando éstas en términos de oraciones. Los autores introducían la noción de "conducta implícita" para designar lo que sucede a, o en, un organismo cuando usa un signo. Un signo es una clase de "signos-vehículo" -su sonido o forma- que cumplen la misma "ley de interpretación", consistiendo la interpretación en una cierta clase de conducta implícita. Kaplan y Capilowish introducen, luego, el término "apropiado" para designar la relación entre la conducta implícita y las situaciones: se dice que la conducta implícita de un organismo *O* es "apropiada" a una situación *S* si aquélla es causada por S y *O* reconoce *S*. Y:

> "un signo oracional es *verdadero* si, y sólo si, existe una situación de cierta clase, de manera que una interpretación correcta de cualquier signo-vehículo del signo es apropiada a la situación"[140].

En *An Inquiry*... Russell se refiere con aprobación al artículo de Kaplan y Copilowish, si bien exige una definición del término "signo-vehículo" que, según él, podría ser ésta: aquello que convierte a un acontecimiento en signo-vehículo de otro es la "similitud en sus efectos", de aquí que:

> "una clase acontecimientos *S* es, para un organismo *O*, un *signo* de otra clase de acontecimientos *A* cuando, como resultado de un hábito adquirido, los efectos de un elemento de *S* en *O* son (en ciertas circunstancias y con ciertas limitaciones) aquellos que producía un elemento de *A* antes de que se hubiese adquirido el hábito en cuestión"[141].

La proposición no es ya definida como el objeto de un acto mental, sino que queda reducida a una conducta implícita manifestada por quien la cree. Lo que Kaplan y Copilowish llaman "conducta implícita" es -dice Russell- exactamente lo que él quiere decir con "proposición". Las proposiciones "han de ser definidas como acontecimientos psicológicos de ciertas clases", en el sentido de que:

> "las oraciones significan algo otro que ellas mismas, que puede ser lo mismo cuando las oraciones difieren, y ese algo debe ser psicológico (o fisiológico) dado que las proposiciones pueden ser falsas"[142].

La verdad y la falsedad no va, en consecuencia, ligada las proposiciones en cuanto entidades objetivas, sino a la conducta promovida por la oración. Y, así,

> "un signo oracional presente a un organismo *O* es *verdadero* cuando, *como signo*, provoca una conducta que habría sido provocada por una situación que existe si esa situación hubiese sido presentada al organismo"[143].

[135] "Atomismo lógico", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 475.
[136] "La filosofía del atomismo lógico", en *Lógica y conocimiento*, ed. cit., p. 283.
[137] *La evolución de mi pensamiento filosófico*, ed. cit., p. 255.
[138] W. O. Quine, *Desde un punto de vista lógico*. Ariel, Barcelona, 1962; y más detalladamente en *Palabra y Objeto*. Labor, Barcelona, 1968, cap. V, especialmente pp. 185-200. En la nota (4), p. 193 dice Quine: "... el lector puede comprobar que el modo expuesto de eliminar las descripciones es realmente el de Russell, pese a las diferencias del planteamiento".
[139] A. Kaplan - I. M. Capilowish, "Mus there be propositions?", en *Mind*, 48 (1939), pp. 478-84.
[140] *Ibidem*, p. 482.
[141] *An Inquiry*..., ed. cit., p. 185.
[142] *Ibidem*, p. 189.
[143] *Ibidem*, p. 187.

El análisis conductista no consigue desembarazarse, con todo, de los actos mentales tales como deseos o creencias. Russell se esfuerza por conectar "significación" con "creencia" pero en este aspecto vuelve a la posición adoptada en *The Analysis of Mind*, sin obviar las anteriores objeciones y sugiriéndo tan sólo como definición causal de la creencia ésta:

> "podemos decir que dos estados son ocurrencias de la misma creencia cuando causan la misma conducta"[144].

Y, en general, con la misma dificultad se topa la concepción nominalista, en la que el concepto de "proposición" queda eliminado, reducido al de "oración". Con esta reducción consigue eliminar el escollo de la significación (= la proposición como significado de las oraciones); pero en esta operación el nominalista se ve obligado a pedir herramientas al realista. Necesita apelar a otros conceptos, diciendo de las oraciones, o bien que poseen el mismo significado, o bien que son sinónimas. Y "el mismo significado" o "sinónimo" exigen apelar a entidades abstractas (proposiciones). Al menos, por ahora, no se ha conseguido una explicación en términos puramente nominalistas.

[144] *Ibidem*, p. 193.

BIBLIOGRAFIA

A) Obras de Russell:

An Essay on the Foundations of Geometry. Cambridge Univ. Press, 1897.

A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz. Cambridge Univ. Press, 1900.

The Principles of Mathematics. Cambridge Univ. Press, 1903. Reedic. en Allen & Unwin, Londres, 1937. Trad. cast. *Los Principios de la Matemática*. Espasa- Calpe, Buenos Aires, 1948.

"Meinong's Theory of Complexes and Assumptions", en *Mind*, XIII (1904), pp. 204-219; 336-354; 509-524.

"On Denoting", en *Mind*, XIV (1905), pp. 479-493.

"Sur la Relation de la Mathématique à la Logistique", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, XIII (1905), pp. 906-916.

"Les Paradoxes de la logique", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, XIV (1906), pp. 627-650.

"Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", en *The American Journal of Mathematics*, Modern Knowledge, 1912. Trad. cast. de Joaquín Xirau, *Los problemas de la filosofía*. Labor, Barcelona, 1928.

"The Philosophical Importance of Mathematical Logic", en *The Monist*, XXIII (1913), pp. 481-493.

Our Knowledge of the External World. Open Court, Londres, 1914. Reedic. en Allen & Unwin, Londres, 1926. Trad. cast. de Ricardo Velzi, *Conocimiento del mundo exterior*. Losada, Buenos Aires, 1946.

Mysticism and Logic. Longmans, 1918. Reedic. en Penguin Books, Londres, 1953.

Introduction to Tractatus Logico-Philosophicus by L. Wittgenstein. Londres, 1922.

An Introduction to Mathematical Philosophy. Allen & Unwin, Londres, 1919. Reedic. en Allen & Unwin, 1953. Trad. cast. de Juan B. Moliner. *Introducción a la filosofía matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.

Analysis of Mind. Library of Philosphy, Londres, 1921.

XXX (1908), pp. 222-262. Reimpr. en *Logic and Konowledge*, pp. 59-102.

Principia Mathematica 3 vol. (En colaboración con N. Whitehead). Cambridge Univ. Press, 1910-1913. Reedic. en Cambridge Univ. Press, 1927. Trad. cast. hasta *56 de J. M. Domínguez. Paraninfo. Madrid, 1981.

"La Théorie des Types Logiques", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, XVIII (1910), pp. 263-301.

The Problems of Philosophy. Home Univ. Library of Trad. cast. de E. Prieto, *Análisis del Espíritu*. Biblioteca temas del Siglo XX, Buenos Aries, 1950.

An Inquiry into Meaning and Truth. Allen & Unwin, Londres, 1940.

Human Knowledge. Allen & Unwin, Londres, 1948. Trad. cast. de Antonio Tovar, *El conocimiento humano*. Revista de Occidente, Madrid, 1950.

Logic and Knowledge. Allen & Unwin, Londres 1956. Trad. cast. de Javier Muguerza, *Ensayos sobre lógica y conocimiento*. Revista de Occidente, Madrid, 1966.

My Philosophical Development. Allen & Unwin, Londres 1959. Trad. cast. de Juan Novella Domingo, *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Aguilar, Buenos Aires, 1960.

B) Estudios:

Ayer, A. J., *Russell*. Trad. J. J. Acero. Grijalbo, Barcelona, 1973.

Black, M., *The nature of mathematics. A critical survey*. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1950.

Benacerraf, P., Putnam, H. (Comp.), *Philosophy of Mathematics*. Blackwell, Oxford, 1964.

Butler, R. J., "The Scaffolding of Russell's Theory of Descriptions", en *The Philosophical Review*, LXIII (1954), pp. 350-364.

Calleja, P., "El tercero incluido en la contraparadoja de Russell", en *Mathematicae notae*, IX (1949), pp. 152-154.

Copi, I. M., *The theory of logical types*. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1971.

Copleston, F. C., "Bertrand Russell", en *Revista de Filosofía* (Madrid), IX (1950), pp. 261-278.

Darbon, A., *La Philosophie des Mathématiques. Etudes sur la logistique de Russell*. París, 1949.

Del Pando, J. E., "La lógica de Bertrand Russell", en *Universidad de Antioquía* (Medellín, Colombia), XXXVII (1940), pp. 85-104.

Dufumier, H., "Les théories logico-métaphysiques de MM. B. Russell et G. E. Moore", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, XVII (1909), pp. 620-653.

Edwards, P., "Russell's Doubts about Induction", en *Mind*, LVIII (1940), pp. 141-163.

Feys, R., "Le raisonnement en termes de faits dans la logistique russellienne", en *Revue Néo-Scolastique de Philosophie*, XXIX (1927), pp. 393-421; y XXX (1928), pp. 154-192; 257-274.

Galimberti, A., "Russell, il suo metodo e la logica matematica", en *Rivista critica di storia della Filosofia*, VIII (1953), pp. 290-300.

Ghyka, M., "Bertrand Russell and Scientific Philosophy", en *The Personalist*, XXVIII (1947), pp. 129-139.

Greenwood, Th., "L'avenir de la logique russellienne", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, XL (1933), 363-378.

"Mr. Bertrand Russell's First Work on the Principles of Mathematics", en *The Monist*, XXII (1912), pp. 149-158.

McKenny, J. L., "Concerning Russell's Analysis of Value Judgments", en *The Journal of Philosophy*, LV (1958), pp. 382-389.

McLendon, H. J., "Has Russell Answered Hume?", en *The Journal of Philosophy*, XLIX (1952), pp. 145-159.

Paci, E., "Whitehead and Russell", en *Rivista di Filosofía* (Bolonia), (1953), pp. 397-415.

Ramsey, F. P., *The foundations of mathematics*. Routledge & kegan Paul, Londres, 4ª edic. 1965.

Riverso, E., *Il pensiero di B. Russell*. Mezzogiorno, Nápoles, 1958.

Sainsbury, M., *Russell*. Routledge & Kegan Paul. Londres, 1979.

Schilpp, P. A. (Comp.), *The Philosophy of Bertrand Russell*. The Library of Living Philosophers, T. V. Northerwestern Univ. Evanston (Illinois), 1971.

Schoenman, R. (Comp.), *Bertrand Russell-Philosopher of the century*. George Allen, Londres, 1967. Trad. de C. Ulisses Moulines, *Homenaje a Bertrand Russell*. Oikos-Tau, Barcelona, 1968.

Searle, J., "Russell's objections to Frege's Theory of Sense and Preference", en *Analysis*, XVIII (1957/58), pp. 137-143.

Simpson, T. M. (Comp.), *Semántica filosófica; problemas y discusiones*. S. XXI, Madrid, 1973.

Smart, J. J., "Whitehead and Russell's Theory of Types", en *Analysis*, X (1950), pp. 93-96.

Sobocinski, B., "L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski", en *Methodos* (Milán), I (1949), pp. 94-107; 220-228; 308-316; y II (1950), pp. 237-257.

Stout, G. F., "Mr. Russell's Theory of Judgment", en *Proceedings of the Aristotelian Society* (Londres), XV (1915), pp. 332-352.

Strachey, O., "Mr. Russell and Some Recent Criticims of His Views", en *Mind*, XXIV (1915), pp. 16-28.

Tallon, H. J., "Russell's Doctrine of the logical Propositions", en *The New Scholasticism*, XIII (1939), pp. 31-48.

Ushenko, A. P., "The Logics of Hegel and Russell", en *Philosophy and Phenomenological Research*

Grelling, K., "Realism and Logic. An Investigation of Russell's Metaphysics", en *The Monist*, XXXIX (1929), pp. 501-520.

Hao Wang, "Russell and His Logic", en *Ratio*, VII (1965), pp. 1-34. Trad. cast. de E. Casabán y E. García, "Rusell y su lógica", en *Teorema*, 4 (1971), pp. 31-76.

Jeffreys, H., "Bertrand Russell on Probability", en *Mind*, LIX (1950), pp. 313-319.

Jourdain, Ph. E. B., "The Philosophy of Mr. Bertrad Russell", en *The Monist*, XXI (1911), pp. 481-508; y XXVI (1916), pp. 24-62.

Vasa, A., "Struttura e interpretazione della logica di Russell", en *Rivista critica di Storia della Filosofia*, VIII (1953), pp. 108-138.

Vuillemin, J., "L'origine et le mécanisme des antinomies dans la premiére philosophie de Russell (1903)", en *Logique et Analyse*, VII (1964), pp. 59-95.

Weyl, H., "Mathematics and logic. A brief survery serving as a preface o a review of 'the philosophy of Bertrand Russell'", en *American mathematical monthly*, 53 (1946), pp. 2-13.

XV. El programa hilbertiano

David Hilbert nació en Königsberg, el 23 de enero de 1862. En la universidad de su ciudad natal estudió y alcanzó sus grados y puestos académicos: doctor en 1884, *Privatdozent* en 1886 y Profesor de dicha universidad en 1892. Por iniciativa de Félix Klein le fue ofrecida la plaza de profesor que había dejado vacante, en Gontinga, Félix Lindemann. Hilbert aceptó, y en Gotinga permaneció hasta su muerte en 1943. En 1902 consiguió otra cátedra de Matemáticas en Gotinga para su amigo, y antiguo compañero de estudios en Königsberg, Hermann Minkowski. Ambos amigos se convierteron en los héroes del brillante período que la ciencia matemática experimentó durante la siguiente década en Gotinga.

H. Weyl distingue[1] cinco períodos principales en los trabajos de Matemáticas de Hilbert:

(I) Teoría de las invariantes algebraicas, tema de su disertación, en 1884, y al que dedicó sus investigaciones hasta 1892.

(II) Teoría de los campos de números algebraicos (1893-1898), sobre la base de los trabajos de Dirichlet acerca del análisis del grupo de unidades y de los trabajos de Kummer, Dedekind y Kronecker acerca de los divisores ideales.

(III) Fundamentos: a) de la Geometría (1898-1902) y b) de las Matemáticas en general (1922-1930). La fundamentación se efectúa mediante la axiomatización, y tiene como objetivo la consecución de una prueba absoluta de consistencia para los axiomas.

(IV) Ecuaciones integrales (1902-1912), prosiguiendo

Hilbert concibe las Matemáticas, no como subdivisiones independientes unas de otras, sino como una unidad orgánica: "la ciencia de las matemáticas, tal como yo la veo, es un todo indivisible, un organismo cuya capacidad de supervivencia depende de la conexión entre sus partes"[2].

Su experiencia en los diversos dominios de las Matemáticas quedó de manifiesto en su famosa *Memoria, Mathematische Probleme*, presentada al II Congreso Internacional de Matemáticas, en París, en 1900. En ella delinea el panorama de las Matemáticas de entonces y formula 23 problemas que las Matemáticas tienen sin resolver y que han cobrado gran importancia a partir de entonces, en el desarrollo de esta disciplina.

1. El método axiomático

Las investigaciones de Hilbert que más directamente han incidido en el desarrollo de la Lógica Matemática son las referentes a los Fundamentos. En sus *Grundlagen der Geometrie* (1899) presenta la Geometría, como antes hiciera Euclides, como una ciencia deductiva que procede de manera puramente lógica a partir de unos pocos axiomas establecidos. El método axiomático en Matemáticas es atribuido, según la tradición, a Pitágoras, pero es a través de los *Elementos* de Euclides como ha llegado hasta nosostros. Ahora bien, la axiomática tradicional era una axiomática intuitiva. En ella, los conceptos básicos son considerados como *in-*

(IV) Ecuaciones integrales (1902-1912), prosiguiendo las investigaciones de Poincaré, Volterra y Fredholm en este terreno.

(V) Física (1910-1922), prosiguiendo los trabajos de su amigo y colaborador Minkowski, muerto en 1909, sobre la teoría de la relatividad.

tuiciones, y las proposiciones fundamentales como *evidencias*. El progreso de la axiomática consiste, precisamente, en la eliminación progresiva de la intuición. En la axiomática formal todas las evidencias no controladas han de quedar eliminadas. Axiomas tan

[1] "David Hilbert and his mathematical work", *ed. cit.*, p. 617.
[2] En la *Memoria* presentada al II Congreso Internac. de Matemát. París, 1900.

evidentes como "el todo es mayor que la parte" carecen de sentido cuando se consideran colecciones infinitas. De ahí surge la idea de evitar todo recurso a evidencias no controladas y la renuncia a apoyarse en representaciones sensibles para figurar objetos ideales. Lo que se exige en la axiomática moderna es, en cambio, la formalización: los objetos de la teoría estudiada y las relaciones que entre ellos se establecen son expresados por símbolos "desprovistos de toda significación". Reciben, solamente de una forma *implícita*, su determinación a través de los axiomas, de modo que "en todas sus consideraciones la axiomática formal no utiliza más relaciones primitivas que las formuladas expresamente por los axiomas"[3].

La formalización estricta de una teoría exige, pues, la abstracción total de cualquier significado, dando como resultado un *sistema formal axiomático*.

Por sistema se entiende un conjunto (clase o dominio) de objetos entre los que se establecen ciertas relaciones (y operaciones). Cuando los objetos del sistema son conocidos exclusivamente a través de las relaciones del sistema, el sistema es *abstracto* o *formal*. Quedan, entonces, sin especificar lo que son los objetos en particular, apareciendo, así, como objetos indeterminados, pero queda establecida la *estructura* del sistema. Cualquier especificación ulterior de lo que sean los objetos suministra, entonces, una *interpretación*, (o *modelo*) del sistema abstracto, esto es, un sistema de objetos que satisface las relaciones del sistema formal. Y cuando los objetos indeterminados del sistema formal no se definen o generan recursivamente (método genético), sino que entre ellos se establecen relaciones que satisfacen ciertas suposiciones o condiciones y que se denominan *axiomas* del sistema formal, o estructura, entonces el sistema formal es axiomático.

La teoría así formalizada está constituida por las consecuencias deducidas de los axiomas mediante *reglas de deducción* lógicas, y es, por tanto, aplicable a cualquier sistema de objetos que satisfaga los axiomas. Por ejemplo, los axiomas del sistema formal de Peano:

(1) $0 \in N$

(2) $a \in N \rightarrow (a + 1) \in N$

(3) $a, b \in N \rightarrow [a = b \rightarrow a + 1 = b + 1]$

ral", "cero" y "sucesor", con lo que obtenemos un *modelo* (un sistema de objetos determinados que satisface esos cinco axiomas).

Mas, como el mismo Peano hizo notar[4], esos axiomas pueden ser verificados bajo otras muchas interpretaciones. Así, cuando se interpreta: *N* como "miembro de la sucesión 1, 1/2, 1/4, 1/8...."; *0* como "uno"; y *+1* como la "mitad de".

El método axiomático, nacido con Euclides, es perfeccionado (formalizado) por Hilbert, quien le considera el método general de investigación que caracteriza las relaciones de la Matemática con vastos dominios de otras ciencias:

> "Todo lo que puede ser objeto de pensamiento científico se adquiere por el método axiomático, y, por tanto, e indirectamente, por la Matemática, siempre que su forma esté en sazón para una teoría. Mientras más penetremos en las capas cada vez más profundas de los axiomas, en el sentido antes indicado, mayor será nuestra conquista acerca de la naturaleza del pensamiento científico de aspectos cada vez más profundos, y seremos más conscientes de la unidad de nuestros conocimientos. Por último, la Matemática parece llamada a desempeñar un papel director en el edificio de las Ciencias construido por el método axiomático"[5].

2. Teoría de la prueba

La axiomatización formal de una teoría no es más que la primera parte del programa hilbertiano. Una teoría es completamente formalizada con vistas a estudiar sus propiedades: su consistencia, su completitud, etc.

Así, por ejemplo, si el sistema de objetos que constituye el modelo de la teoría axiomática es consistente, entonces la teoría axiomática ha de serlo también, ya que, si en la teoría axiomática fuese deducible una contradicción, también se obtendría una contradicción en el modelo a partir de los enunciados correspondientes a los axiomas de la teoría axiomática. Queda, entonces, probada la consistencia de la teoría axiomática. Las pruebas posibles en esa teoría axiomática forman, a su vez, los objetos de una nueva "metateoría". Y la teoría que toma como objetos todas las pruebas matemáticas posibles se denomina "Teoría de la prueba" o "Metamatemática".

(4) $a \in N \rightarrow a + 1 \neq 0$

(5) $k \in K \,\&\, 0 \in k \,\&\, (x)\,[x \in N \,\&\, (x \in k \rightarrow x + 1 \in k)] \rightarrow N \subset k$

quedan satisfechos cuando los signos N, 0 y $+1$ son interpretados, respectivamente, como "número natu-

Esta segunda parte del programa hilbertiano, conocido por el nombre de *Beweistheorie* (Teoría de la prueba), tiene como objeto salvar la matemática clásica frente a la crítica intuicionista; es propuesta por Hilbert a partir de 1917 *(Axiomatischen Denken)* y desarrollada

[3] Hilbert, D - Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, I, Berlín, 1934, p. 7.
[4] *Formulaire de mathématiques*, vol. 3. Fratres Bocca, Turín, 1901, p. 44.
[5] "El pensamiento axiomático", *ed. cit.*, p. 24.

por él y sus calaboradores John von Neumann (1903-1957), Wilhelm Ackermann (1896-1962), Paul Bernays (1888-1978) a partir de 1920. Para conseguir el objetivo señalado, la matemática clásica deberá ser formulada como una teoría axiomática formal y deberá demostrarse que esta teoría es *consistente*, i. e., libre de contradicción. Para probar la consistencia de una teoría axiomática de alguna rama de la Matemática Hilbert propuso considerar los números como secuencias de palotes y las fórmulas como secuencias de símbolos no interpretados. Y con la ayuda de principios lógicos seguros quedaría establecida la consistencia de tal teoría axiomatizada si, mediante métodos finitos, ninguna combinación de símbolos, resultante de los axiomas por reglas lógicas, es de la forma $0 = 1$, o de índole tal que, al ser interpretada, se convierte en absurdo.

Es de señalar que los métodos utilizados por los formalistas en la teoría de la prueba se restringen a los llamados "finitistas": sólo cabe emplear objetos intuitivamente concebibles y procesos efectuables. De esta manera, Hilbert, para estudiar la matemática formal, toma como instrumento metamatemático una aritmética *finitista*, convirtiéndose en estrictamente formalista en matemáticas y estrictamente intuicionista en la metamatemática. Esta, en efecto, echa mano de "un razonamiento directo, provisto de contenido, que tiene lugar en experiencias de pensamiento sobre objetos dados a la intuición fuera de todo presupuesto axiomático"[6]. Por lo tanto, la matemática y la lógica empleadas en la teoría de la prueba no son formales, sino que vienen dadas de forma intuitiva, y su certeza queda inmediatamente asegurada, sin necesidad (ni posibilidad) alguna de formalización, si bien les queda prohibido extenderse más allá de allí adonde se llega por procedimientos "finitistas": Prohibición de considerar una clase infinita como un todo dado, completo, y, en consecuencia, de aplicar el principio de *tertio excluso* a colecciones infinitas. De ahí que, en lo referente a la Matemática, "un juicio universal no puede ser tomado más que en sentido hipotético, i. e., como una proposición sobre toda cifra dada de antemano. Un tal juicio enuncia una ley que debe ser verificada en cada caso particular dado"[7]. Los juicios de existencia, que afirman, por ejemplo, que existe una cifra que posee la propiedad P, deben ser justificados mediante la presentación efectiva de una cifra que posea tal propiedad o sumistrando, al menos implícitamente, un método para construir una tal cifra. Si bien no cabe hacer referencia a un número infinito de propiedades o de procesos, puesto que un sistema formal puede ser ilimitado, la metamatemática puede aceptar conceptos y cuestiones que impliquen sistemas potencialmente infinitos. Y, finalmente, se acepta dentro de los límites finitistas, la inducción matemática sobre los números naturales en cuanto que prueba una proposición para cualquier número finito n, pero no en cuanto que prueba una proposición para todo el conjunto infinito de los números naturales[8].

Hilbert no fue preciso con respecto a lo que entendía por métodos "finitistas"[9]. Como caracterización general de una aritmética finitista al estilo de Hilbert puede valer ésta de Herbrand:

> "En ella nunca se considera más que un número definido de objetos y de funciones; éstas están bien definidas, permitiendo su definición calcular su valor de una manera unívoca; nunca se afirma la existencia de un objeto sin ofrecer el medio de construirlo; nunca se considera el conjunto de todos los objetos de una colección infinita; y cuando se dice que un teorema es verdadero para todos los x, ello significa que para cada x en particular es posible repetir el razonamiento general en cuestión, el cual sólo debe ser considerado como el prototipo de esos razonamientos particulares"[10].

[6] Hilbert, D. - Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, ed. cit., p. 32.
[7] *Ibidem*, p. 32.
[8] Poincaré, ("Las matemáticas y la lógica" (1905), en *Ciencia y Método*, ed. cit., pp. 128-136), tacha de circular el uso metamatemático de la inducción matemática: cualquier prueba de consistencia que pueda ofrecer Hilbert de la inducción matemática resulta circular porque en ella habrá utilizado el principio de inducción matemática. Hilbert ("Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung)" (1922) y "Die Grundlagen der Mathematik" (1927) responde que, como el mismo Poincaré reconoce, hay dos métodos

distintos para proceder recursivamente en la Aritmética: la construcción intuitiva de los numerales como secuencias de 1 y el principio de inducción matemática o inferencia de n a $n + 1$, y que la acusación de Poincaré queda sin valor por no distinguir estos dos tipos de inducción. Ackermann ("Begründung des 'tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit", en *Mathematische Annalen*, 93 (1924), p. 1) sitúa a la inducción matemática entre los métodos de inferencia cuestionables, subrayando que las matemáticas tratan sólo con objetos concretos, los únicos a los que cabe aplicar los métodos de inferencia finitistas. Herbrand *(Recherches sur la théorie de la démonstration*, 1930) es quien de forma más precisa que Hilbert y sus colaboradores determina los límites finitistas de la inducción metamatemática: "esta recurrencia que se detiene en lo finito no es más que la indicación, en una fórmula, de un procedimiento que habrá de ser aplicado un cierto número de veces en cada caso particular".

[9] Hilbert y Bernays, *Grundlagen*...., ed. cit., p. 4; escriben: "Usaremos siempre la palabra "finitista" para indicar que la discusión, la aserción o la definición dada se mantiene dentro de los límites de la más estricta productibilidad de objetos y practicabilidad de procesos y que, según esto, puede realizarse dentro del dominio de la inspección directa".

[10] Herbrand, J., "Sur la no-contradiction de l'arithmétique", en *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 166 (1931), nota 3, en J. Herbrand, *Ecrits logiques*, ed. cit., p. 125.

Por otra parte, estos métodos "finitistas" no constituyen un sistema formal único, sino que conducen a una gama de sistemas de potencia desigual, sin que resulte posible decidir cuál de ellos cumple mejor las exigencias finitistas, máxime si se tienen en cuenta las posibilidades de ampliación de la "prueba finitista"[11]. Los discípulos de Hilbert han abogado por una ampliación de los límites finitistas, y, en cuanto matemáticos, han adoptado una postura pragmática, como, por ejemplo, han hecho von Neumann, Bernays y Gödel en la teoría de conjuntos, desarrollándola sobre la base establecida por Zermelo y Fraenkel. Y, en el plano metodológico, Bernays considera que la metamatemática de Hilbert no ha dejado de extenderse, y que "no es necesario concebir la evidencia y la seguridad de manera demasiado absoluta, si se quiere conservar abierta la posibilidad de ampliar el cuadro metodológico"[12].

El *modus operandi* de Hilbert consiste, pues, en, mediante procedimientos finitistas y directamente constructivistas, establecer la validez de la matemática clásica mostrando que aquellas fórmulas que corresponden a enunciados de la matemática clásica pueden ser probados (construidos) y no tienen la forma $0 = 1$[13]. Y la no demostrabilidad (derivabilidad a partir de axiomas) de tal fórmula por los procedimientos indicados es llamada *consistencia*. El problema, entonces, de la "teoría de la prueba" es el llamado *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión), consistente en encontrar un proceso practicable, en una teoría dada con determinados axiomas, que permita probar una fórmula dada. Este problema puede, según Hilbert[14], ser perfectamente definido y resoluble de manera absoluta. Las Matemáticas constituyen un conjunto de sistemas formales, cada uno de ellos con su propia metamatemática (sus términos, sus axiomas, sus reglas de inferencia y sus teoremas) ya que Hilbert, si bien la lógica básica que asumió no difiere esencialmente de la de Russell, no tenía como objetivo -como los logicistas- establecer unas bases axiomáticas para la Lógica, considerada ésta como el fundamento de las Matemáticas, puesto que, según él, las Matemáticas no son deducibles de la sola Lógica, sino que constituyen una disciplina autónoma: cada una de sus ramas tiene sus axiomas propios, tanto lógicos como matemáticos. La tarea de la Matemáticas consiste en desarrollar cada una de sus ramas, que son sistemas deductivos y formales, por lo que las deducciones han de ser manipulaciones de símbolos desdotados de cualquier significado y según principios lógicos y matemáticos aceptados dentro de los límites "finitistas". Y, con estos métodos, el programa hilbertiano se completa probando que cada uno de esos sistemas deductivos, en que consisten las Matemáticas, está libre de contradicción[15].

3. Resultados formalistas

Con la axiomatización de la Geometría, Hilbert había asegurado la coherencia de ésta, mediante la *interpretación* (prueba de consistencia por el método del *modelo)* de toda relación geométrica por una relación numérica, de manera que la no contradicción de las operaciones de la aritmética generalizada garantiza la no contradicción de las relaciones geométricas, o dicho de otra forma: la consistencia de la Geometría se reduce a la consistencia de la Aritmética. De este modo, la consistencia de la Aritmética pasó a ser una cuestión crucial: lo que había que buscar era una prueba de consistencia *absoluta,* y en ello centraron sus esfuerzos los formalistas.

---

[11] Confert G. Kreisel, "Hilbert's programme", en *Dialectica*, 12 (1958), pp. 346-372. Reimpr. en Benacerraf y Putnam, *Philosofhy of Mathematics*, ed. cit., pp. 157-180, quien ensaya una caracterización de "prueba finitista". H. Wang, por otra parte ("Eighty years of foundational studies", en *Dialectica*, 12 (1958), pp. 446-497), sugiere como sistema caracterizador de los métodos finitistas, éste, que engloba: cálculo de proposiciones, funciones recursivas primitivas, funciones recursivas ordinales de Ackermann, axiomas de Peano, inducción transfinita (sin cuantificadores) hasta ε_0 con ordinales anotados por me-

dio de uno de los métodos estandar, variables libres de funciones y variables libres de predicados.

12 P. Bernays, "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration", en F. Gonseth (ed.), *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre 1938*. Leemann, Zurich, 1941, p. 152.

13 Ya que, si existe una contradicción, en virtud de la ley de no-contradicción, una de las dos proposiciones es falsa, y, si existe una proposición falsa, de ésta, por implicación material, obtenemos 0 = 1 *(ex falso quodlibet)*.

14 Así, afirma Hilbert en el Congreso Internacional de matemáticos, Bolonia, 1928: "Con estos nuevos fundamentos de las matemáticas, que pueden llamarse, con propiedad, "teoría de la prueba", creo que puedo desterrar de nuestro mundo todos los problemas relativos a los fundamentos, convirtiendo toda proposición matemática en una fórmula que pueda ser escrita con precisión y obtenida extrictamente... Creo que puedo alcanzar esta meta de forma absoluta con mi teoría de la prueba, aunque queda aún mucha tarea por delante, antes de que esta teoría esté completamente desarrollada", en *Mathematische Annalen*, 102 (1929), pp. 1-9.

15 Confert D. Hilbert, "Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung)", (1922), *ed. cit.*

En la década de los años 20 se obtuvieron resultados parciales acordes con el programa hilbertiano: En 1921, Post[16] probó la consistencia y la compleción del cálculo de proposiciones tal como está desarrollado en los *Principia Mathematica*. No estudió, sin embargo, la otra propiedad de los sistemas formales axiomáticos y consistentes: la independencia de sus axiomas. Esta cuestión fue puesta en claro, poco después (en 1926), por Bernays[17], quien mostró que el cuarto de los cinco axiomas del cálculo de proposiciones de los *Principia* es redundante, i. e., que puede ser derivado de los cuatro restantes; y demostró que estos últimos son independientes.

Siguiendo las directrices marcadas por Post, en 1928, Hilbert y Ackermann[18] probaron la consistencia de la lógica elemental de predicados; y la compleción de ésta fue probada por Gödel[19] en 1930.

Entre 1929 y 1931 J. Herbrand obtuvo también importantes resultados en la realización del programa hilbertiano, utilizando sólo métodos finitistas. Herbrand parte de los resultados obtenidos por Löwenheim y Skolem sobre la validez (o satisfacilidad) de fórmulas del cálculo de predicados de primer orden[20], pero tratando de llegar a partir de estas nociones a otras que él consideraba "metamatemáticas" o propias del programa hilbertiano, tales como la decidibilidad, la no-contradicción, etc. de ciertas teorías. El "teorema fundamental" de Herbrand establece[21]: a) "si *P* es una identidad, se puede hallar, conociendo la demostración de P, un número *h* tal que – *P* no pueda ser verdad en un dominio de orden *h*. b) si P no es una identidad, se puede construir, para cualquier *h*, un dominio de orden *h* en el que – *P* es verdad". Este teorema supone una generalización del de Löwenheim-Skolem, pasando del caso simple de la fórmula prenexa (de Skolem) al de una fórmula cualquiera de la lógica cuantificacional, y da una respuesta positiva al problema de la decisión, al establecer una coimplicación entre la demostrabilidad de una fórmula cualquiera, *P*, de la lógica cuantificacional y la validez de la *h*- disyunción (de Herbrand) de *G* en un dominio *h*.

En 1931[22], obtiene Herbrand otro importante resultado para el programa hilbertiano: presenta una prueba de consistencia para un segmento de la Aritmética; dicha prueba, se basa en su "teorema fundamental" y resulta más simple que las presentadas anteriormente por Ackermann[23] y por von Neumann[24].

4. Limitaciones del formalismo

En la década de los años treinta quedó truncada la fe que los formalistas habían puesto en el método axiomático y en la posibilidad de resolver por procedimientos mecánicos cualquier problema lógico o matemático. El problema de la decisión *(Entscheidungsproblem)* recibe una solución definitivamente negativa.

16 Emil León Post, "Introduction to a General Theory of Elementary Porpositions" (1921). Trad. L. Vega, "Introducción a una teoría general de las proposiciones elementales", en *Lecturas de Lógica*, I, UNED, Madrid, 1981, pp. 317-350. La prueba de Post (su teorema fundamental) consta de una condición necesaria, que establece una consistencia (toda tesis lógica es una tautología), y de una condición suficiente, que establece la compleción (toda tautología es derivable como tesis del sistema). También establece otros tipos de consistencia y compleción, llamados, así, en sentido de Post: Un sistema es consistente en sentido de Post si no es derivable (si no es una tesis) una fórmula que consta de una simple variable proposicional. Un sistema es completo en sentido de Post si, añadiendo a los axiomas una fórmula no derivable, cualquier fórmula resulta derivable.

17 "Axiomatische Untersunchungen des Aussagenkalküls der *Principia Mathematica*, en *Mathematische Zeitschrift*, 25 (1926), pp. 305-20.

18 *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer, Berlín, 1928. Trad. cast. V. Sánchez de Zavala, *Elementos de la lógica teórica*. Tecnos, Madrid, 1962.

19 "Über die Vollständigkeit der Logikkalküls". (Tesis, 1930). Trad. J. Mosterín, "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden", en K. Gödel, *Obras completas*. Alianza, Madrid, 1981,pp. 20-36.

20 L. Löwenheim ("Über Moglichkeiten in Relativkalkül", en *Mathematische Annalen*, 76 (1915), pp. 447-470. Trad. ingl. "On possibilities in the calculus of relatives", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 228-251, establece el teorema según el cual si una fórmula de la lógica cuantificacional es válida (satisfacible) en un dominio infinito enumerable, entonces es válida (satisfacible) en cualquier dominio no vacío. Skolem, en varios trabajos, publicados entre 1920 y 1928, generaliza el

teorema de Löwenheim, ofrece una prueba del mismo y extrae importantes consecuencias concernientes al *Entscheidungsproblem:* Th. Skolem: "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen", en *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, nº 4. (1920). Trad. inglesa, "Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem", en J. Van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 252-263; y "Über die mathematische Logik", en *Norsk matematisk tidsskrift* 10 (1928), pp. 125-142. Trad. ingl., "On mathematical logic", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 508-524.

[21] En varias obras; confert *Ecrits logiques*, ed. cit., pp. 138, 178 y 225.

[22] "Sur la non-contradiction de l'arithmétique", en *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 166 (1931), pp. 1-8. En *Ecrits logiques*, ed. cit., pp. 221-232.

[23] "Bergründung der 'tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit", en *Mathematische Annalen*, 93 (1924), pp. 1-36.

[24] "Zur Hilbertschen Beweistheorie", en *Mathematische Zeitschrift*, 26 (1927), pp. 1-46.

El año 1931 publica Gödel su famosa memoria y que más impacto ha producido en la lógica moderna[25]. Las conclusiones obtenidas acaban con las esperanzas puestas en la ilimitada potencia del método axiomático; éste posee ciertas limitaciones intrínsecas: la primera, es que todos los sistemas formales de la matemática clásica son *irremediablemente* incompletos, ya que para cada uno de ellos cabe construir una fórmula indecidible. La segunda es que resulta imposible establecer la consistencia de un sistema formal de la Aritmética desde dentro de ese sistema. Para llegar a estos resultados procede Gödel de la siguiente manera[26]:

Tras una primera presentación informal del teorema de incompleción, presenta, en la segunda sección, una descripción detallada del sistema *P* sobre el que va a trabajar. El sistema *P* es, esencialmente, el sistema que se obtiene cuando a los axiomas de Peano se añade la lógica de los *Principia Mathematica*. En este sistema asigna un único número (número de Gödel): 1) a cada *signo* elemental; 2) a cada *fórmula* (secuencia de signos), y 3) a cada *prueba* (secuencia finita de fórmulas). Los signos primitivos son: a) constantes, y b) variables; éstas quedan interpretadas y distinguidas respecto de su tipo: variables de tipo *1* (para números naturales, incluyendo el *0*): $x_1, y_1, z_1, \ldots$; variables de tipo *2* (para clases de números naturales): $x_2, y_2, z_2, \ldots$; variables de tipo *3* (para clases de clases de números naturales): $x_3, y_3, z_3, \ldots$

A continuación asigna unívocamente números naturales a cada signo primitivo, a cada secuencia de signos, a cada fórmula y a cada secuencia de fórmulas del sistema *P*; de este modo todas y cada una de las categorías sintácticas del sistema *P* quedan representadas por un número natural llamado número de Gödel. Así:

1) *Numeración de Signos*

A) *Constantes*

Signo	nº Gödel
~	1
$\vee$	2
$\rightarrow$	3
$\exists$	4
=	5
o	6

B) *variables*

Signo	nº Gödel
b_1 *numéricas*	(los números primos mayores que 10)
x	11
y	13
z	17
b_2 *proposicionales*	(los números primos mayores que 10 elevados al cuadrado)
p	11^2
q	13^2
r	17^2
b_3 *Predicativas*	(los números primos mayores que 10 elevados al cubo)
P	11^3
Q	13^3
R	17^3

2) *Numeración de fórmulas*

El número Gödel *m* de una fórmula se obtiene de la siguiente manera: en la fórmula intervinen *n* símbolos, hay, pues, *n* números naturales. El número Gödel *m* de la fórmula es igual al producto de los *n* primeros números primos elevados a los correspondientes números Gödel de cada signo. Por ejemplo, dada la fórmula A: "Todo el mundo tiene un padre". Tenemos:

formalización:	(	x	)	(	$\exists$	y	)	P	y	x
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
numeración de signos:	8	11	9	8	4	13	9	11^3	13	11

El número Gödel de A es:

$$m = 2^8 \times 3^{11} \times 5^9 \times 7^8 \times 11^4 \times 13^{13} \times 17^9 \times 19^{11^3} \times 23^{13} \times 29^{11}$$

3) *Numeración de pruebas*

Una prueba constituye una secesión de fórmulas; tiene, pues *n* fórmulas. Cada fórmula tiene un número

s.....7
(.....8
).....9
,.....10

Gödel. El número Gödel K de una prueba es igual al producto de los n primeros números primos elevados a los correspondientes números Gödel de cada fórmula. Por ejemplo: sea m el número Gödel de la fórmula A,

[25] K. Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I", en *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), pp. 173-198. Trad. cast. J. Mosterín, "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines", en K. Gödel, *Obras Completas*, ed. cit., pp. 55-89. Una exposición completa y clara de este teorema es la de E. Nagel, y J. R. Newman , *El teorema de Gödel*. Trad. cast. A. Martín. Tecnos, Madrid, 1979.

[26] Seguimos, en lo fundamental, la exposición de Nagel y Newman citada en la nota anterior.

y sea n el número Gödel de la fórmula B; entonces el número de estas dos fórmulas es:

$$K = 2^m \times 3^n$$

En consecuencia, mediante este método de asignación de números naturales a cada categoría sintáctica del sistema P, cabe "aritmetizar" (gödelizar) completamente el sistema formal. Dada una entidad sintáctica del sistema, cabe calcular unívocamente el número Gödel que le corresponde. Y viceversa: dado un número, si es mayor que 10, podemos determinar (mediante descomposición en sus factores primos), si es un número Gödel la expresión que representa. Por ejemplo, el número 600 representa A: $\rightarrow \sim \vee$. En efecto:

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5

$2^3 \times 3^1 \times 5^2$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\rightarrow \quad \sim \quad \vee$

Puesto que toda expresión del sistema formal P queda asociada a un número Gödel, cabe construir proposiciones metamatemáticas acerca de las expresiones y de sus recíprocas relaciones como una proposición acerca de los correspondientes números Gödel y de sus recíprocas relaciones aritméticas. Por ejemplo, dada la fórmula:

A: $(p \vee p) \rightarrow p$, cuyo número Gödel es m

y la fórmula :

B: $(p \vee p)$, cuyo número Gödel es n

y la proposición metamatemática:

C: " '$(p \vee p)$'

es la parte inicial del axioma:

'$(p \vee p) \rightarrow p$' ".

Dado que el número n es un factor del número m, la fórmula aritmética que corresponde a la proposición C es:

Sea la proposición metamatemática φ: "la sucesión de fórmulas con número Gödel x es una demostración (prueba) de la fórmula con número Gödel z", la cual viene representada por una fórmula definida del cálculo aritmético que expresa una relación estrictamente aritmética entre x y z. Así, $x = 2^y \times 3^z$.

Esa relación entre x y z puede escribirse con la fórmula:

$$Dem\ (x, z)$$

y φ será verdadera si y sólo si el número Gödel de la demostración señalada está con el número Gödel de la conclusión en la relación aritmética designada por "Dem". Y lo mismo sucede con la proposición metamatemática (negación de la anterior): "La sucesión de fórmulas con número Gödel x no es una demostración (prueba) de la fórmula con número Gödel z", que se escribirá: $\sim Dem\ (x, z)$.

Finalmente, cabe definir funciones aritméticas recursivas. Así, sea la fórmula:

$$\Psi: (\exists x)\ (x = sy)$$

que tiene como número Gödel m. En Ψ el número Gödel de la variable numérica y es 13. Si sustituimos en Ψ la variable y (con número Gödel 13) por el numeral de m, obtenemos, entonces, la fórmula:

$$\omega: (\exists x)\ (x = sm)$$

Esta fórmula ω tiene también un número Gödel calculable (es función aritmética de los números m y 13) y caracterizado mediante la proposición metamatemática siguiente:

"El número de ω es el número Gödel de la fórmula que se obtiene a partir de la fórmula de número Gödel m, sustituyendo la variable de número Gödel 13 por el numeral de m", cuya paráfrasis formal es:

$$Sust\ (m, 13, m)$$

Sobre esta aritmetización del sistema muestra Gödel, en 1er lugar, cómo construir una fórmula aritmética G que representa la proposición metamatemática:

"La fórmula G no es demostrable"

C es:

"n es un factor de m"

Y si efectivamente n es un factor de m, entonces es cierto que "$(p \vee p)$" es la parte inicial del axioma "$(p \vee p) \rightarrow p$".

De este modo: 1º) la metamatemática queda completamente aritmetizada; y 2º) las cuestiones (propiedades) metamatemáticas pueden ser estudiadas y quedar determinadas a través de la investigación de las propiedades aritméticas y de las relaciones de los números naturales.

cuya paráfrasis formal dentro del sistema es:

$$(x) \sim Dem\ (x, z);$$

"Para todo x, la sucesión de fórmulas con número Gödel x no es una demostración (prueba) de la fórmula con número Gödel z".

Demuestra, luego, Gödel que un determinado caso especial de esta fórmula no es formalmente demostrable. En efecto, sea la fórmula:

$$A: (x) \sim Dem\ [x\ sust\ (y, 13, y)]$$

en donde "sust (y, 13, y)" designa un número, y, por tanto, esta fórmula representa la proposición metamatemática "la fórmula de número Gödel *sust (y, 13, y)* no es demostrable". Puesto que A tiene un número Gödel que puede ser efectivamente calculado, entonces, al sustituir en A la variable numérica de número Gödel 13 (la y) por el numeral de m, obtenemos la fórmula G (de Gödel) siguiente:

$$G: (x) \sim Dem\ [x, sust\ (m, 13, m)]$$

En consecuencia, G tiene un número Gödel, que es: *sust (m, 13, m)*. Pero G constituye la designación de la proposición metamatemática:

"La fórmula de número Gödel G (esto es, de número Gödel *sust (m, 13, m)]* no es demostrable". De donde se sigue que la fórmula aritmética:

$$(x) \sim Dem\ [x, sust\ (m, 13, m)]$$

representa en el sistema la proposición metamatemática:

"La fórmula '$(x) \sim Dem\ [x, sust\ (m, 13, m)]$' no es demostrable".

Es decir, cabe construir una fórmula artimética G como afirmando de sí misma que no es demostrable.

A continuación prueba Gödel que G es demostrable si y sólo si es demostrable su negación formal $\sim G$. La argumentación se desenvuelve mostrando que si la fórmula G fuese demostrable, entonces su contradictoria formal:

$$\sim (x) \sim Dem\ [x, sust\ (m, 13, m)]$$

también es demostrable; e inversamente.

Mas, en ese caso (Si G y $\sim G$ son ambas demostrables), el sistema P (el sistema formal de la Aritmética) es inconsistente. E inversamente, si el sistema P es ω-consistente[27], entonces ni G ni $\sim G$ son formalmente demostrables. En consecuencia, G es *indicidible*.

Pero, luego, demuestra Gödel que, aunque G es indecidible, es, sin embargo una fórmula verdadera del sistema P, ya que G afirma que todo número entero posee una

incompleto, esto es, no podemos deducir todas las verdades aritméticas de sus axiomas. Más aún: tal sistema resulta ser esencialmente incompleto: aunque añadamos nuevos axiomas, cabe todavía construir otra fórmula que siendo verdadera resulte indecidible[28].

Finalmente, Gödel mostró cómo construir en P una fórmula aritmética α que representa la proposición metamatemática:

"La Aritmética es consistente"

y demostró[29]:

(1) que $\alpha \rightarrow G$ es formalmente demostrable.

(2) que α no es demostrable, ni siquiera utilizando todos los recursos del sistema P.

De donde resulta que la *consistencia* de P no puede probarse dentro de P, i. e., que la consistencia de la Aritmética no puede demostrarse desde dentro de la Aritmética; y, en general, que resulta imposible establecer la consistencia de un sistema formal desde dentro del mismo.

Los resultados de Gödel vienen a constituir respuestas negativas a los planteamientos de Hilbert. Este, en el Congreso Internacional de Matemáticas, en Bolonia[30], había presentado la cuestión de si el sistema formal de la teoría de números era, o no, completo, en el sentido de que toda proposición formulable en su lenguje pueda ser demostrada o refutada. Como vemos, en 1931, Gödel responde: 1) que los sistemas formales usuales de la teoría de números son irremediablemente incompletos, de donde resulta que un tratamiento axiomático de la teoría de números no puede agotar nunca el campo de las verdades aritméticas; y 2) que la demostración absoluta de consistencia de la teoría de números (de la Aritmética) que satisfaga los requisitos finitistas propuestos por Hilbert no puede ser establecida desde dentro de la Aritmética. De modo que, si bien las conclusiones de Gödel no excluyen la posibilidad de llegar a una prueba absoluta y finitista de consistencia de la Aritmética (sólo excluye que esa prueba puede establecerse desde dentro de la Aritméti-

cierta propiedad aritmética que puede ser definida con toda precisión. De donde resulta que, puesto que G es al mismo tiempo, verdadera e indecidible, el sistema P es ca), sin embargo resulta difícil imaginar cómo pueda ser una prueba finitista y, a la vez, no susceptible de formulación dentro de la Aritmética.

---

[27] Según Gödel un sistema formal es ω-consistente si no hay ninguna propiedad φ de números naturales, tal que tanto $(\exists x) - \varphi x$ como todas las fórmulas φi (para $i = 1, 2, 3, \ldots$, *etc.*) son deducibles en él.

[28] Este es el famoso teorema de incompleción, que en esta Memoria de 1931 aparece como teorema VI.

[29] Teorema XI de la memoria.

[30] "Probleme der Grundlegung der Mathematik", en *Mathematische Annalen*, 102 (1929).

5. Funciones recursivas[31]

Para la comprensión de la demostración que Gödel hace de su teorema resulta necesaria la noción de "función recursiva", cuya configuración precisa se consigue en el quinquenio siguiente.

La idea de definir una función mediante un determinado número recurriendo a los valores que previamente había tomado la función sobre números naturales no era nueva, sino que, en su aspecto general (como definiciones recursivas de la adición y multiplicación) había aparecido ya en los trabajos de Dedekind y Peano. En 1923 Skolem trató de servirse de ella para fundar la teoría elemental de números[32]. Posteriormente, Hilbert consideró que la idea de recursividad y su gradual extensión constituía la base para una posible solución al célebre problema del continuo[33]. Y, siguiendo esta indicación de Hilbert, en 1928 descubrió Ackermann una función definible como un proceso recursivo[34].

Pero es Gödel quien, por primera vez en 1931, define lo que él llama "función recursiva primitiva". En 1934, en la segunda parte de *Sobre sentencias indecidibles de sistemas formales matemáticos*, ofrece Gödel la siguiente definición precisa de las funciones recursivas primitivas[35]:

"Diremos que la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ está compuesta de $g(x_1, \ldots, x_m)$ y $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ si para todos los números naturales $x_1, \ldots, x_n$:

(1) $f(x_1, \ldots, x_n) = g[h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)]$".

"Se dirá que la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es *recursiva primitiva* respecto de $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $h((x_1, \ldots, x_{n+1})$ si para todos los números naturales $k, x_2, \ldots, x_n$:

(2) $f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$

$f(k+1, x_2, \ldots, x_n) = h[k, f(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$".

Las funciones recursivas primitivas tienen la importante propiedad de que para cada conjuntor dado de argumentos el valor de la función puede computarse mediante un procedimiento finito.

En la Parte 9 de este mismo trabajo presenta Gödel, atendiendo a una sugerencia de Herbrand[36], una noción de función recursiva más amplia que la noción de "función recursiva primitiva" y que desde la publicación de los trabajos de Kleene[37] sobre el tema se denomina "función recursiva general". Esta viene definida mediante un sistema de ecuaciones como sigue[38]:

"Si f es una función desconocida y $g_1, \ldots, g_n$ son funciones conocidas, las g_i y f se sustituyen una en otra de los modos más generales y ciertos pares de las expresiones resultantes se igualan entonces si el conjunto resultante de ecuaciones de funciones tiene una y sólo una solución para f, entonces f es una función recursiva.

Podríamos entonces tener:

$$f(x, 0) = g_1(x)$$
$$f(0, y+1) + g_2(y)$$
$$f(1, y+1) = g_3(y)$$
$$f(x+2, y+1) = g_4\{f(x, y+2), f[x, f(x, y+2)]\}$$

Y, en general[39], se dice que una función de n argumentos es recursiva general si existe un sistema de ecuaciones tal que para toda la serie de constantes a_1,

---

[31] Como introducción a la génesis y desarrollo de las funciones recursivas véase R. Péter, *Rekursive Funktionen*. Trad. inglesa de I. Földes, *Recursive Functions*. Academic Press, Nueva York, 1967. S. C. Kleene, "Origins of recursive function theory", en *Ann. Hist. Comp. Sci.*, 3 (1981), pp. 52-67. Y la compilación de M. Davis (ed.), *The Undecidable*. Raven Press, Nueva York, 1965.

[32] Th. Skolem, "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbar Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich", en *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, nº 6, 1923. Tras. ingl. "The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 302-333.

[33] D. Hilbert, "über das Unendliche", *ed. cit.*, trad. ingl. "On the infinite", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 367-392. En la segunda parte de este trabajo proyecta Hilbert la prueba de la hipótesis del continuo de Cantor. El continuo de Cantor había sido presentado por Hilbert en 1900, como el problema número 1 que debía resolver la Matemática. En carta al editor de la trad. inglesa citada (p. 369) señala Gödel la relación entre sus trabajos, en los que prueba la *consistencia* de la hipótesis del continuo y este trabajo de Hilbert.

[34] W. Ackermann, "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen", en *Mathematische Annalen*, 99 (1928), pp. 118-133. Trad. inglesa, "On Hilbert's construction of the real numbers", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 493-507.

[35] Trad. cast. en K. Gödel, *Obras completas*, ed. cit., p. 153. Este trabajo (de 1934) constituye, basicamente, una reexposición de la famosa Memoria de 1931. Las novedades más significativas son, precisamente, la definición precisa de función recursiva primitiva, en la Parte 2, y la definición de función recursiva general, en la Parte 9.

[36] *Confert* la nota 35 de este trabajo, en la edición de la trad. cast. cit. p. 178.

[37] S. C. Kleene, "General recursive functions of natural numbers", en *Mathematische Annalen*, 112 (1936), pp. 727-742.

[38] K. Gödel, *Sobre sentencias indecidibles...*, ed. cit., p. 178.

[39] *Confert* S. C. Kleene, "General recursive functions...", ed. cit., pp. 727-731.

$a_2, \ldots, a_n$ se puede obtener un único valor n para la función f:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = n$$

mediante un número finito de aplicaciones consistentes en :

(1) sustituir por números naturales las variables.

(2) pasar de una expresión α y de una expresión de la forma $\beta = \gamma$ a otra expresión que procede de α por sustitución en ella de β por γ.

En 1936, A. Church define[40] la noción de "función efectivamente calculable", basándose en la noción más precisa de "función λ-definible", noción ésta última a la que Church llega en su "cálculo de la λ-conversión". El símbolo λ representa un operador de abstracción que aísla la función de sus argumentos; por ejemplo: si $x + 1$ representa "el sucesor de x", entonces $\lambda x (x + 1)$ representa la función "sucesor". Dentro del cálculo de la λ-conversión o λ-cálculo, llega Church a las funciones λ-definibles: una función φ de enteros de una variable es λ-definible si cabe hallar una fórmula $Y\varphi$ del λ-cálculo tal que $\varphi a = b$, y si N_a y N_b son fórmulas del λ-cálculo que representan, respectivamente, los enteros a y b, entonces $Y\varphi N_a$ es convertible en N_b.

Noción similar a ésta de "función λ-definible" es la de "función μ-definible", o "computable" según Turing: aquella que puede ser escrita por una máquina Turing no circular[41]. Poco antes, E. Post había propuesto[42], asimismo, representar una función mediante una máquina adecuada que calcule sus valores; propuesta que Turing puso inmediatamente en práctica[43]: para cada lista de funciones numéricas es, en principio, prosible construir tales máquinas que computen sus valores, y puede probarse que para cada función recursiva general existe una tal máquina Turing.

Por su parte Kleene estableció[44] la equivalencia entre función recursiva general y función λ-definible. Y basándose en estos resultados, propone Church[45] identificar "efectivamente calculable" con "λ-definible" o con su equivalente: "recursividad general". Esta propuesta es conocida como la *Tesis de Church:*

"Toda función efectivamente calculable es una función recursiva general".

Como tesis que es (ya que la equivalencia enunciada mediante el "es" se establece entre la noción precisa de "función recursiva general" y la noción antropológica e intuitiva de "función efectivamente calculable") no puede ser probada, pero todas las funciones efectivamente calculables hasta ahora conocidas son recursivas.

Posteriormente, Markov[46] estableció de manera precisa el concepto de "algoritmo", y D'etlovs[47] probó que las funciones calculables mediante tales algoritmos coinciden también con las funciones recursivas generales. Finalmente, en 1980, Gandy[48] siguiendo las directrices marcadas por Turing, aduce una serie de principios que apoyan la justificación de la Tesis de Church.

Dando por supuesta esta Tesis, Church demostró, primero[49], que el problema de la decisión es insoluble en la teoría elemental de números, esto es, que no es posible encontrar un procedimiento efectivo que permita decidir, para toda proposición de la teoría, si es derivable o no.

Luego[50], suponiendo también la tesis, mostró que el sistema de la Lógica Elemental (la lógica de Predicados de primer orden de Hilbert y Ackermann) es indecidible. Para llegar a este resultado, conocido como *Teorema de Church*, 1) representa, en el cálculo de la λ-conversión, mediante funciones λ-definibles los números enteros y de este modo reduce el sistema formal de la teoría elemental de números al sistema formal de la Lógica Elemental. 2) Como consecuencia de (1) la decidibilidad en la teoría de números y la decidibilidad

[40] "A note on the Entscheidungs problem", en *The journal of symbolic logic*, 1 (1936), pp. 40-41 y 101-102.

[41] En "Computability and λ-definability", en *The journal of symbolic logic*, 2 (1937), pp. 153-163, Turing demuestra la coin-

cidencia de "Turing-computable" y "λ-definible".

[42] E. Post, "Finite combinatory processes Formulation I", en *The journal of symbolic logic*, 1 (1936), pp. 103-105.

[43] A. Turing, "On computable numbers, with an aplication to the Entscheidungs problem", en *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2ª serie, 42 (1936-37), pp. 230-265, y 43 (1937), pp. 544-546.

[44] S. C. Kleene, "λ-definability and recursiveness", en *Duke mathematical Journal*, 2 (1936), pp. 340-353.

[45] "An unsolvable problem of elementary number theory", en *American Journal of Mathematics*, 58 (1936), pp. 345-363.

[46] A. Markov, "Teorija algorifmov" (Teoría de los algoritmos) en *Trudy Mat. Inst. im. Steklova*, 38 (1951), pp. 176-189.

[47] V. K. D"etlovs, "Normalniye algorifmy i rekursivnye funktsii" (Algoritmos normales y funciones recursivas), en *Doklady Akadémii Nauk SSSR*, 90 (1953), pp. 723-725.

[48] R. Gandy, "Church's thesis and principles for mechanisms", en J. Barwise, H. J. Keisler y K. Kunen (eds.), *Kleene Symposium*. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[49] "An unsolvable problem of elementary number theory", en *American Journal of Mathematics*, 58 (1936), pp. 345-363.

[50] "A note on the Entscheidungsproblem", en *Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), pp. 40-41 y 101-102.

en Lógica Elemental resultan ser equivalentes, lo cual significa que si hay un procedimiento efectivo de decisión para la Lógica Elemental, entonces lo hay para la teoría de números. Mas, puesto que, según el primer resultado *(An Unsolvable...)*, la teoría de números es indecidible, la Lógica Elemental, tomada como un todo, es indicidible, esto es (puesto que este resultado sigue estando bajo el supuesto de la Tesis), el conjunto de fórmulas de la Lógica Elemental lógicamente válidas no es recursivo (en el sentido, propuesto por Church, de que no es efectivamente computable).

El teorema de Church constituye otra de las limitaciones del formalismo; mas las limitaciones de los sistemas formales no lo son de la capacidad de la razón humana; esto es lo que Gödel quiere dejar bien sentado al criticar la idea de Turing de que la mente humana es equivalente a un máquina:

> "Turing, en Proc. Lond. Math. Soc., 42 (1937), p. 250, ofrece una argumentación que se supone muestra que los procedimientos mentales no pueden llegar más lejos que los procedimientos mecánicos. Sin embargo, esta argumentación es inconcluyente, pues depende de la suposición de que una mente finita sólo es susceptible de tener un número finito de estados distinguibles. De lo que Turing no se da cuenta es del hecho de que *la mente, en su uso, no es estática, sino que está en constante desarrollo*"[51].

[51] K. Gödel, *Obras completas*, ed. cit., p. 181, nota.

BIBLIOGRAFIA

Ackermannn, W., "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen", en *Mathematische Annalen*, 99 (1928), pp. 118-133. Trad. ingl: "on Hilbert's construction of the real numbers, en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 493-507.

Barinaga, J., "Notas breves y comentarios. Hilbert", en *Matemática Elemental*, V (Enero-Febrero 1936), pp. 4-6. En este mismo número: Foto de Hilbert y *Varia* sobre Hilbert, pp. 31-32.

Bernays, P., "Zusatz zu Hilberts Vortrag über 'Die Grundlagen der Mathematik'", en *Abhandlungen ans dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitat*, 6 (1927), pp. 89-92. Trad. Ingl.: "Appendix to Hilbert's lecture 'The foundationes of mathematics'", en J. von Heijenoort, *op. cit.*, pp. 485-489.

Blumenthal, O. "Lebensgeschichte", en D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlugen*, vol. III, *ed. cit.*, pp. 388-429.

Curry, H. B., *Outlines of a formalist philosophy of*

Herbrand, J., *Recherches sur la théorie de la demostration*, en Trav. Soc. de Sc. et d. Letres de Varsovie, Cl. III: Sc. mathèm. et phy., Nr. 33) 1930.

- "Les bases de la logique hilbertienne", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, XXXVII (1930), pp. 243-255.
- *Ecrits logiques*. P. U. F. París, 1968.

Hilbert, D., *Die Grundlagen der Geometrie*, (1899). Trad. J. D. García Bacca, *Los fundamentos de la Geometría*, en Euclides, *Obras completas*. UNAM, México, 1944.

- "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" (1904). Trad. ingl: "On the foundations of logic and arithmetics", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 129-138.
- "Problemas de la Lógica matemática" (extracto de la conferencia explicada en el Congreso de matemáticas, en Bolonia), en *Revista Matemática Hispano-Americana*, Diciembre de 1928, pp. 265-267.

Curry, H. B., *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1951.

Chavalley, C., "Logique hilbertienne et psychologie", en *Revue de Philosophie de la France et de l'Etranger*. (Paris), CXIII (1932), pp. 99-111.

Davis, M. (ed.), *The Undecidable*. Raven Press, Nueva York, 1965.

Errera, A., "Etude sur les fondements des mathématiques", en *Logique et analyse*, 8 (1959), pp. 160-193.

Gödel, K., *Obras completas*. Trad. cast. J. Monsterín. Alianza, Madrid, 1981.

- "Axiomatisches Denken", en *Mathematische Annalen*, 78 (1918), pp. 405-415. Trad. cast. "El pensamiento axiomático", en *Revista Matemática Hispano-Americana*, Enero-Febrero de 1919, pp. 14-24.

- "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung", en *Abhandlungen aus dem mathematische Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), pp. 157-177.

- Die logischen Grundlagen der Mathematik", en *Mathematische Annalen*, 88 (1923), pp. 151-165.

- "Über des Unendliche" (1925). Trad. ingl.: "On the infinite", en Heijenoort, *op. cit.*, pp. 367-392.

- "Die Grundlagen der Mathematik" (1927). Trad. ingl. "The foundation of mathematics", en Heijenoort, *op. cit.*, pp. 464-479.

- "Probleme der Grundlegung der Mathematik", en *Mathematische Annalen*, 103 (1929), pp. 1-9.

- "Die Grundlagen der elementaren Zahlenlehre", en *Mathematische Annalen*, 104 (1931), pp. 485-494.

Hilbert, D.; Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928). Trad. cast. V. Sánchez de Zabala, *Elementos de Lógica teórica*. Tecnos, Madrid, 1962.

Hilbert, D. y Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, vol. I Springer. Berlín 1934. Vol II Springer. Berlín 1939.

Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols. Berlín, 1932-1935.

Kleene, S. C., *Introducción a la metamatemática*. Trad. M. Garrido. Tecnos, Madrid, 1974.

Kreisel, G., "Hilbert's Programm", en *Dialéctica*, 12 (1958), pp. 346-372. Reimpreso en Benacerraf, P. y Putnam H. (comp.), *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, pp. 157-180.

Lorenzen, P., *Metamatemática*. Trad. J. Muñoz. Tecnos. Madrid, 1971.

Martin, R., *Logique contemporaine et formalisation*. P.U.F., París, 1964.

Neumann, J. von, "Zur Hilbertschen Beweistheorie", en *Mathematische Zeitschrift*, 26 (1927), pp. 1-46.

- "The formalist foundations of mathematics", en Benacerraf, P. y Putnam (Comp.), *Philosophy of Mathematics*. Blackwell, Oxford, 1964, pp. 50-54.

Péter, Rózsa, *Rekursive Funktionen* (1951). Trad. ingl. de I. Földes, *Recursive functions*. Academic Press, Nueva York, 1967.

Pettoello, Renato, "La logique formale in J. F. Herbart", en *Rivista critica di storia della Filosofía*, XXXVII (1982), pp. 277-299.

Rougier, L., *La structure des Théories déductives*. Alcan, París, 1921.

Weyl. H., "David Hilbert and his mathematical work", en *Boll. of the Amer. Math. Soc.*, 50 (1944), pp. 612-654.

- "Diskussions bemerkungen zu dem zweiten Hilberschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik" (1927). Trad. ingl.: "Comments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics", en J. van Heijenoort, *op. cit.*, pp. 480-484.

Apéndice: Lógica Polivalente

El sistema de lógica "clásica" es un sistema regido por la ley de bivalencia, según la cual toda oración enunciativa (proposición) λόγος ἀποφαντικός, siguiendo a Aristóteles (*De Interpretatione*, 17 a, 2), es o bien verdadera o bien falsa. Ello quiere decir desde la abstracción del cálculo formal, que el conjunto de los valores consta ni más ni menos que de dos elementos.

La lógica polivalente hace referencia a sistemas formales con más de dos valores, de ahí que reciba el nombre de lógica no-clásica o lógica no-Aristotélica, guiados, sin duda, quienes le aplican este último calificativo, por el famoso pasaje antes citado de *De Interpretatione*, si bien tal denominación a decir de Lukasiewicz (*considerac. Filosof. sobre la lóg. poliv.*, p. 83) no es correcta, dado que fue precisamente Aristóteles en la obra mencionada (Cap. IX) el primero que puso en tela de juicio la ley de bivalencia por lo que se refiere a cierto tipo de λόγοι ἀποφαντικοί (proposiciones, en nuestro lenguaje), cuáles son las que se refieren a futuros contingentes como es si "mañana habrá una batalla naval", para seguir el ejemplo de Aristóteles.

Es obligado señalar, por otra parte, que la lógica polivalente -como dice Rescher, p. 15- es una materia nueva en el campo de la Lógica. A ello cabe añadir que la lógica polivalente constituye una disciplina no lo suficientemente definida en su estado actual de desarrollo. Se compone de una gran masa de hallazgos frecuentemente aislados, hallazgos éstos debidos a auto-

La aproximación a la lógica polivalente ha tenido lugar desde dos perspectivas claramente distinguibles, si bien no desconexionadas entre sí:

a) desde la filosofía.

b) desde el desarrollo algebraico de la Lógica.

Precursores de la lógica polivalente

Hemos mencionado ya a Aristóteles. El cap. IX de *De Interpretatione* está dedicado a las proposiciones en futuro; se discute si es necesario que una proposición sobre un hecho futuro como, por ejemplo, "mañana habrá una batalla naval" sea verdadera o falsa; sostener tal tesis conduce -según Aristóteles- a "consecuencias incómodas" y a "imposibles". En todas aquellas cosas que no están siempre en el acto, dice, hay potencialidad, el poder ser e igualmente el poder no ser, por ej., este manto puede ser dividido o no. En consecuencia, no todas las cosas suceden o no suceden por necesidad. La necesidad se aplica tan sólo a todo lo que es, cuando es.

Hasta aquí llega la doctrina de Aristóteles. A ella se añaden diversas interpretaciones; la aceptación o no de la ley de bivalencia queda enmarcada desde la perspectiva filosófica, dentro del problema del determinismo, y, en efecto, en este sentido es discutido por Aristóteles.

Los estoicos, consideraron -según Boecio- que

res que se acercan a la materia desde puntos de vista muy heterogéneos. De ahí la urgencia de llegar a una sistematización y unificación. En este sentido cabe citar las obras de Rosser y Turquette[1] A. Zinoviev[2] R. Ackermann[3] y N. Rescher[4].

[1] J. B. Rosser y A. R. Turquette, *Many-Valued Logics*. North Holland. Amsterdam, 1952.
[2] A. A. Zinoviev. *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*. Trad. inglesa G. Küng y D. Comey, Reidel, Dordrecht 1963.
[3] R. Ackermann, *Introduction to Many Valued Logic*. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1967.
[4] N. Rescher, *Many-Valued Logic*. McGraw-hill, New York, 1969.

como principio fundamental de su dialéctica: "Fundamentum dialecticae est quidquid ennuntietur (id autem apellant ἀξίωμα) aut verum esse aut falsum"[5].

De aquí cabe inferir, como dice Lukasiewicz, que no es correcto denominar a la lógica polivalente "lógica no-clásica" (si en lógica clásica incluímos la lógica de Aristóteles) o "lógica no-Aristotélica", ya que fue Aristóteles el primero que puso en cuestión la ley de bivalencia. En relación con los clásicos, la lógica polivalente podría denominarse "lógica no estoica" o mejor "lógica no crisípea".

Frente al determinismo de los estoicos, los epicúreos defensores del indeterminismo, siguen a Aristóteles en cuanto a la tesis de que todo lo que es sea por necesidad. De ahí infieren que hay proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas[6].

En la E. Media el problema de los futuros contingentes se complica con el de la presciencia divina. Sto. Tomás distingue[7] entre la necesidad absoluta o necesidad del consiguiente y necesidad *sub conditione* o por necesidad de la consecuencia. Si Dios tiene presciencia de una proposición acerca del futuro, dicha proposición es necesaria por relación al hecho de haber sido objeto de tal precognición, pero no es absoluta o incondicionalmente necesaria.

Evidentemente, el problema de la presciencia divina y los futuros contingentes envuelve, asimismo, el problema de la ley de bivalencia, y todos los grandes escolásticos con Duns Scoto, Ockam, Suárez, etc. intervinieron en la discusión del problema. Michalski[8] señala que Duns Scoto y especialmente G. Ockam desarrollaron la tesis aritotélica en el sentido de llegar a admitir un tercer valor de verdad aparte de los dos clásicos: verdad y falsedad. En efecto, distinguían la *propositio neutra* de la *propositio vera* y de la *propositio falsa*. De ahí que Michalski llegue a señalar a Ockam como uno de los precursores de la lógica trivalente. Sin embargo, no están de acuerdo con esta afirmación W. y M. Kneale[9], para quienes las discusiones de los medievales no arrojaron nueva luz sobre las dificultades que turbaron a Aristóteles, y toda la posible contribución de Ockam al desarrollo de una lógica trivalente quedaría reducida al intento de exponer lo que Aristóteles tuviera que decir acerca de la proposición condicional "Si Dios sabe que *A* ha de suceder, entonces *A* ha de suceder" y "Si *A* ha de suceder, entonces Dios sabe que *A* ha de suceder".

Los fundadores de la lógica polivalente

Mac Coll (1837-1909) fundamenta toda la lógica en la lógica de proposiciones y establece un sistema de lógica proposicional en el que las proposiciones pueden tomar uno de los cinco valores de verdad siguientes: verdad, falsedad, certeza (siempre verdad) imposibilidad (siempre falsa) y variabilidad (contingencia). Una proposición es cierta si siempre y necesariamente es verdadera, como, por ejemplo, $2 + 3 = 5$; una proposición es imposible si siempre y necesariamente es falsa, como, por ejemplo, $3 = 2$; y una proposición es variable si algunas veces es verdadera, otras falsa, como, por ejemplo, $x = 2$. Mac Coll desarrolló su sistema como un álgebra de la lógica, pero basado sobre tres en vez de sobre cinco valores (modalidades), y aplicó su lógica de proposiciones variables especialmente al cálculo de probabilidades. De ahí que las proposiciones se combinen en otro sentido del que lo hacen las funciones de verdad. Así, por ejemplo, si p es una proposición variable, la conjunción consigo misma será variable; de modo que variable en conjunción con variable da variable. Pero si p es varible, entonces también lo es no-p. Pero ahora varible en conjunción con variable no da variable, sino imposible.

En cualquier caso, Mac Coll puede ser considerado como un precursor de los lógicos posteriores que dedicaron su esfuerzo a la construcción de sistemas de lógica con valores de verdad no clásicos y desde la teoría del cálculo de probabilidades.

C. S. *Peirce* (1839-1914). Se acerca a la lógica polivalente desde la problemática filosófica en torno a los futuros contingentes dentro del contexto aristotélico[10]. Hace referencia a una matemática basada sobre una lógica de tres valores, llegando a la elaboración del método de las tablas de verdad para una lógica trivalente. El tercer valor considerado por Peirce corresponde a un grado intermedio entre la *afirmación positiva* y la *negación*

ca de las proposiciones condicionales: "Si Dios sabe que

[5] Von Arnim, *Stoicorum veterum fragmenta*, II, p. 63, frag. 196. Ciceron, *Acad. Pr.*, II, 95.
[6] Ciceron, *De Fato*, 37.
[7] *Summa contra Gentiles*, I, 67.
[8] "Le problème de la volonté a Oxford et à Paris au XIV siècle", en *Studia philosophica*, vol. 2, 1937, pp. 233-365.
[9] *El desarrollo de la lógica*, trad. M. Muguerza. Tecnos, Madrid 1972, p. 223.
[10] Confert *Collected papers*. Cambridge, (Mss). (1931-35) vol. 4, pp. 12-20 y 257-265, vol. 3, 366. Sobre la lógica trivalente de Peirce véase M. Fisch y A. R. Turquette, "Peirce's Triadic Logic", en *The Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 2, 1966, pp. 71-85.

dos. Consideró también varios funtores de tres valores que posteriormente fueron reinventados por otros.

N. A. Vasiliev (1880-1940) presenta sus investigaciones como el intento de hacer con la lógica de Aristóteles lo que su colega en la Universidad de Kazan, N. Lobatchevski había hecho con la Geometría de Euclides. Lobatchevski es uno de los creadores de las geometrías no euclídeas. De igual modo Vasiliev trabajó en la construcción de "lógicas imaginarias no aristotélicas". Construyó la ley de *Contradicción* en la forma kantiana: "Ningún objeto puede tener un predicado que lo contradiga"; y la ley del *tertio excluso* como: "un objeto debe poseer un predicado o su negación". Ambas leyes pertenecen a la base ontológica de la Lógica y, en cuanto tales, sometidas a cambios; aplicables al mundo actual, pero no a todos los mundos posibles. En cambio, la ley que llamó de "no-autocontradicción", según la cual "uno y el mismo juicio no puede ser a la vez verdadero y falso", constituye un principio metalógico y, en cuanto tal, inalterable.

Frente a la lógica con base ontológica determinada por nuestro mundo actual desarrolló Vasiliev su lógica imaginaria según la determinación ontológica de su mundo imaginario, donde algunos objetos poseen el predicado *A*, otros el predicado no-*A* y otros poseen a la vez ambos *A* y no-*A*. Por su parte una afirmación puede ser afirmativa, negativa, indiferente, correspondiente con las tres formas del juicio *"S es p"*, *"S es* no-*P"*, *"S es P* y no-*P"*, respectivamente.

Evidentemente una tal lógica es esencialmente trivalente, y Vasiliev intentó incluso generalizar esta ontología de tres estados al caso de *n* estados mútuamente exclusivos y exhaustivos. Las dificultades de esta lógica de proposiciones correspondiente a 3 ó 4 estados de hechos reside en su interpretación. Pero ese problema es el mismo que tienen planteado los diversos cálculos de lógica polivalente en general, como luego veremos.

Los sistemas de lógica polivalente

Dos escritos aparecidos alrededor del año 20 sientan

positiva", que es exactamente tan real como los otros

independientes entre sí y se acercan a la materia desde dos perspectivas distintas.

Un artículo de Lukasiewicz[11] publicado en 1920 constituye el resultado de las investigaciones que el autor había venido realizando sobre las llamadas "proposiciones modales" y sobre las nociones con ellas relacionadas de posibilidad y necesidad. Motivado por estas consideraciones de carácter filosófico propone y desarrolla un sistema de lógica trivalente.

Post[12] descubrió su familia de sistemas polivalentes independientemente de Lukasiewicz. Guiado, no por cuestiones filosóficas, sino por cuestiones puramente formales internas a la lógica, expuso sus sistemas de *n*-valores en toda su generalidad, es decir, desde una perspectiva estrictamente algebraica.

Consideración Algebraica de los sistemas polivalentes. En el sistema de lógica proposicional bivalente las funciones proposicionales se convierten en proposiciones cuando al quedar saturadas por sus argumentos adquieren uno de estos valores: 1 = verdad, 0 = falsedad. En términos algebraicos existen dos conjuntos: el conjunto de las variables $\alpha = (p, q, r)$ y el conjunto de los valores $\beta = (1, 0)$; hay una aplicación sobreyectiva de α sobre β. Finalmente hay que hacer notar que el conjunto β tiene sólo dos elementos, es decir que las proposiciones sólo pueden adquirir dos valores de ahí que sea un sistema bivalente.

Ahora bien, desde una consideración puramente algebraica -tal es la perspectiva adoptada por Post- podemos considerar sistemas en los que el conjunto β no quede reducido a dos elementos. Así, escribe Post, podemos considerar sistemas en los que "en vez de dos valores de verdad (1, 0) podemos distinguir m valores distintos de verdad $(V_1, V_2, V_3 \ldots V_m)$, donde m es un entero positivo. Una función de orden n tendrá m^n configuraciones en su tabla de verdad y por consiguiente habrá m^{m^n} tablas de verdad de orden n[13]. Así por ejemplo, para $m = 4$, en un sistema tetravalente habrá $4^{(41)}$ funciones de orden 1 es decir, 256 funciones monádicas y $4^{(42)}$ de orden diádico, es decir 4.294.967.269 funciones diádicas.

Siguiendo el procedimiento anterior, nada impide desde un punto de vista puramente formal considerar el

las bases de la lógica polivalente. Ambos escritos son

conjunto β como compuesto de infinitos elementos,

[11] "Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", en *Comptes rendus de la Societé des Scien-ces et des Lettres de Varsovie*, 23 (1930), pp. 51-57. Trad. inglesa de L. Borkowski, en *Lukasiewiz Selected Works*. North-Holland, Amsterdam-Varsovia, 1970. Trad. cast. de A. Deaño, "Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional", en J. Lukasiewiz, *Estudios de lógica y filosofía*. Rev. de Occidente, Madrid, 1975, pp. 61-86.

[12] "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", en *American Journal of Mathematics*, vol. 43, 1921, pp. 163-85. Reimpreso en J. Heijenoort, *From Frege to Gödel*. Harvard Univ. Press. Cambridge (Mass), 1971, 2ª edic. pp. 264-283, por donde citamos.

[13] *Ibidem*, p. 279.

es decir, que una proposición puede tener infinitos valores diferentes todos ellos pertenecientes al intervalo (0, 1) incluídos ambos límites. En este caso las conectivas no pueden ser definidas mediante las funciones de verdad sino mediante el cálculo de probabilidades. Tal es el camino abierto por Mc Coll y seguido especialmente por Reichenbach.

Hemos visto cómo al aumentar el número de elementos pertenecientes al conjunto β aumenta también considerablemente el número de funciones. Ello hace que resulte prácticamente imposible la consideración de todas ellas. Los investigadores de lógica polivalente han estudiado algunas de ellas en sus respectivos sistemas de n valores.

Post, que comienza su artículo por el examen del sistema de los *Principia Mathematica* en el que se tenían como primitivas las funciones ~ (negación) y ∨ (disyunción no excluyente), presenta su sistema polivalente sirviéndose de otras funciones correspondientes a las primeras, que él representa mediante los signos $\sim_m$ y $\vee_m$. Lo mismo que el sistema de los *Principia* es un sistema completo generado a partir de las dos funciones primitivas, así también las funciones $\sim_m$ y $\vee_m$ generan un sistema completo. Las tablas de ambas funciones son:

p	$\sim_m$ p
V_1	V_2
V_2	V_3
•	•
•	•
•	•
V_m	V_m

p,	q	p $\vee_m$ q	
V_1	V_1	V_1	
⋮	⋮	⋮	
V_{i_1}	V_{j_1}	V_{i_1}	
⋮	⋮	⋮	
V_{i_2}	V_{j_2}	V_{i_2}	$i_1 \leq j_1$
⋮	⋮	⋮	
V_m	V_m	V_m	$i_2 \leq j_2$

El inconveniente más serio con el que tropiezan los sistemas m-valentes de Post hace refencia a su interpretación semántica. Post procede en términos de conjuntos de proposiciones pero no ofrece una interpretación proposicional. Sugiere al final de su artículo la posibilidad de traducir toda su argumentación al lenguaje de un sistema polivalente, pero de hecho no explicita la forma de llevar a cabo tal traducción y, según W. y M. Kneale[14], resulta difícil, si no imposible, asignar algún significado concreto a su sugerencia.

Las investigaciones de Lukasiewicz en torno a la lógica polivalente datan de alrededor de los años 20. En 1918 hace referencia a ellos en la lección de despedida pronunciada en la Universidad de Varsovia. Su famoso artículo antes citado se basa en el ensayo leído en la Sociedad Filosófica Polaca, en Lwów, el 5 de Junio de 1920. Lukasiewicz concibió la idea de recurrir a un sistema de lógica trivalente como medio para resolver el problema aristotélico de los futuros contingentes. El cálculo de proposiciones ordinario es bivalente y admite implícitamente la ley según la cual toda proposición o bien es verdadera o bien es falsa. Ahora bien, según Lukasiewicz, esta ley, la más fundamental de nuestra lógica no parece completamente evidente. La proposición "Estaré en Varsovia a mediodía del 21 de diciembre del año próximo" no puede ser ahora ni verdadera ni falsa; debe, pues, poseer un tercer valor distinto de "1" y "0", este valor puede designarse por "1/2" y representa "lo posible".

Desde el punto de vista puramente formal tenemos ahora un sistema en el que el conjunto β (el conjunto de los valores) consta de tres elementos, $\beta = \{1, 1/2, 0\}$; obtendremos, pues, $3^{(3^1)}$ funciones monádicas, y $3^{(3^2)}$ funciones diádicas. De las primeras, la más importante y estudiada por Lukasiewicz es la negación, representada por el signo N; su tabla es la siguiente:

p	Np
0	1
1/2	1/2
1	0

.

Como puede comprobarse, la función negación queda definida: $\sim p = 1 - p$.

Similarmente, se hace necesario introducir las correspondientes complicaciones en las funciones diádicas. De ellas Lukasiewicz da las tablas siguientes:

	p & q	p ∨ q	p → q	p ↔ q

	k p q	A p q	C p q	E p q
p \ q	1 1/2 0	1 1/2 0	1 1/2 0	1 1/2 0
1	1 1/2 0	1 1 1	1 1/2 0	1 1/2 0
1/2	1/2 1/2 0	1 1/2 1/2	1 1 1/2	1/2 1 1/2
0	0 0 0	1 1/2 0	1 1 1	0 1/2 1

[14] *El desarrollo de la lógica*, ed. cit. p. 529.

Los principios que gufan la construcción de estas tablas son los siguientes:

a) Para la conjunción, *Kpq*, su valor de verdad es el más bajo de los valores de verdad de sus componentes, a saber $K11 = 1$; $K1\,1/2 = K\,1/2\,1 = K\,1/2\,1/2 = 1/2$; $K10 = K\,1/2\,0$ $K0\,1/2 = K\,01 = K00 = 0$.

b) Para la disyunción alternativa, *Apq*, su valor de verdad es más alto de los valores de verdad de sus componentes, a saber: $A11 = A1\,1/2 = A10 = A\,1/2\,1 = A01 = 1$; $A\,1/2\,1/2 = A\,1/2\,0 = A0\,1/2 = 1/2$; $A00 = 0$.

c) Para la implicación, *Cpq:*

(1) Si el valor de *p* es igual o menor que el valor de *q* entonces el valor de *Cpq* es "1": si $|p| \leq |q|$ *ent.* $|p \rightarrow q| = 1$, *a saber:* $C11 = C\,1/2\,1 = C\,1/2\,1/2 = C01 = C0\,1/2 = C00 = 1$.

(2) Si el valor de *p* es mayor que el valor de *q* entonces el valor de Cpq es igual valor de q menos el valor de *p* más 1; si $|p| > |q|$, *ent.* $|p \rightarrow q| = |q| - |p| + 1$, *a saber:* $C1\ 1/2 = C\,1/2\,0 = 1/2$; $C1\ 0 = 0$.

d) Para la coimplicación, *Epq:*

(1) Si el valor de *p* no es igual que el valor de *q* entonces *Epq* vale el módulo de: 1 menos el módulo de: el valor de *p* más el valor de *q*. Si $|p| \neq |q|$, entonces, $|p \leftrightarrow q| = |1 - (|p| + |q|)|$. A saber: $E1\,1/2 = E\,1/2\,1 = E\,1/2\,0 = E0\,1/2 = 1/2$; $E10 = E01 = 0$.

(2) Si es igual el valor de *p* y el *q*, entonces *Epq* vale 1: si $|p| = |q|$,ent. $|p \leftrightarrow q| = 1$, a saber: $E\,11 = E\,1/2\,1/2 = E00 = 1$[15].

Con vistas a ofrecer una interpretación de los futuros contingentes introduce Lukasiewicz el funtor necesidad.

El funtor posibilidad, representado por *M*, es definido en términos de los primitivos. La definición en cuestión

p	*Mp*
1	1
1/2	1
0	0

Consiguientemente el funtor necesidad, que representamos por "□", queda definido en términos de *M* de la siguiente manera: $\Box p = NMNp$; y, por lo tanto, en términos de los funtores primitivos así: $\Box p = NCpNp$; su tabla de verdad es, pues:

p	□*p*
1	1
1/2	0
0	0

Consecuencias que se derivan del sistema trivalente de Lukasiewicz

a) Todos los teoremas tradicionales sobre proposiciones modales, algunos de los cuales resultaban incompatibles en el sistema bivalente normal, son ahora establecidos libres de contradicción. Con ello queda superado el problema del determinismo, preocupación filosófica de Lukasiewicz.

b) Las tablas de verdad del sistema trivalente de Lukasiewicz coinciden con las tablas de verdad del sistema bivalente ordinario cuando se toman en cuenta solamente los valores "1" y "0". Se sigue de aquí que cualquier tautología en las tablas del sistema trivalente lo es asímismo en las tablas del sistema bivalente. En consecuencia:

c) El sistema trivalente es una parte propia del bivalente: Todos los teoremas del sistema trivalente son válidos en el sistema bivalente pero no recíprocamente. Los teoremas más importantes

tion se debe a su discípulo Tarski y es la siguiente:

$$Mp = CNpp$$

Esto es, "es posible que p" significa "si no p entonces p"; su tabla de verdad es la siguiente:

del sistema bivalente que no conservan su validez en los sistemas polivalentes son aquellos relacionados con el tipo de argumentación denominado *reductio ad absurdum*, como, por ejemplo:

$$CCNppp\ CCpNpNp\ CKCpqNqNp$$

---

[15] De todos los funtores aquí presentados, Lukasiewicz emplea en su sistema dos de ellos, *N* y *C*, como primitivos y define los demás en términos de estos. Así, en lógica trivalente se cumplen las siguientes definiciones: 1) $Apq = CCpqq$; 2) $Kpq = NANpNq$; 3) $Epq = KCpqCqp$.

d) Los funtores no pueden conservar en el sistema trivalente las mismas relaciones que guardaban entre sí en el sistema bivalente. En su sistema define Lukasiewicz la disyunción como $Apq = CCpqq$, mientras que en el cálculo bivalente tenemos $p \vee q \equiv -p \rightarrow q$. Ahora bien, si aplicamos la definición a $p \vee \sim p$, no obtendremos una tautología y en consecuencia el principio llamado de *tertio excluso* deja de ser válido, consecuencia que Aristóteles deseaba explícitamente evitar, pero que, en contrapartida, se conforma con el uso intuicionista de la negación.

Por otra parte, la "ley de contradicción" también falla en el sistema trivalente de Lukasiewicz, aunque no en la lógica proposicional intuicionista. Así, tenemos que $NKpNp$ no es una tautología puesto que $NK1/2\ N1/2 = NK1/2\,1/2 = N1/2 = 1/2$. Este resultado es intuitivamente chocante, ya que ante dos proposiciones sobre un futuro indeterminado con posibilidades conflictivas como en el caso de p y Np uno se inclina intuitivamente a dar a $K1/2\,1/2$ el valor "0".

e) Como habrá podido observarse, resulta fácil, desde el punto de vista puramente formal, construir múltiples sistemas *n*-valentes definiendo los valores de las funciones de modo más o menos arbitrario. Pero inmediatamente se plantean problemas de dos tipos:

- El problema de la interpretación, ya señalado cuando hablamos de Post. Lukasiewicz proveyó a su sistema de una interpretación. Pero el uso del término "posible" que está a la base de toda la discusión, no es uniforme a lo largo de sus investigaciones.
  Aceptado "lo posible" como tercer valor con el objeto de superar el determinismo filosófico que él pensaba era consecuencia de la ley de bivalencia, fue con posterioridad modificado hasta el punto de no ver incompatibilidad entre el determinismo y la lógica bivalente.
- El problema de encontrar un sistema de axiomas que atribuyan a los símbolos las propiedades que se desprenden de sus funciones. Es

resultado fué el conseguido por M. Wajsberg[16], en 1931, quien axiomatizó el sistema trivalente de Lukasiewicz tomando los cuatro axiomas siguientes:

I) $Cp\ Cqp$
II) $CCpqCCqrCpr$
III) $CCNpNqCqp$
IV) $CCCpNppp$

En este sistema se toman como funciones primitivas C y N definiendo las demás en términos de éstas. Pero entonces surge otro problema. Es posible construir una función en el sistema trivalente no definible en el sistema axiomático de Wajsberg. Tal es la función T (función de J. Slupecki)[17], cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	Tp
1	1/2
1/2	1/2
0	1/2

La introducción de esta función convierte al sistema de Lukasiewicz en funcionalmente incompleto, dado que dicha función no puede ser definida en términos de C y N. No obstante, el mismo Slupecki demostró que, añadiendo:

V) $CTp\ NTp$
VI) $CNTpTp$

a los axiomas de Wajsberg, obtendremos un sistema trivalente funcionalmente completo. En 1958, A. Rose y J. B. Rosser[18] demostraron la compleción del sistema denumerablemente *n*-valente de Lukasiewicz a partir de los tres primeros axiomas de Wajsberg más los dos siguientes:

I) $CCCpqqCCqpp$
II) $CCCpqCqpCqp$

El sistema trivalente de Kleene

En 1938 S. C. Kleene[19] presenta un nuevo sistema de lógica trivalente en el marco de la teoría las funciones

decir, el problema de construir un sistema deductivo basado sobre axiomas. Un importante

[16] "Axiomatización of the 3-Valued propositional calcul" Trad. inglesea en S. McCall, *Polish logic*, 1920-1939, Oxford, 1967, pp. 264-284.

[17] "The Full Tree-Valued Propositional Calculus". Trad. inglesa en S. McCall, *Polish logic*, 1920-1939, ed. cit., pp. 335-337.

[18] A. Rose y J. B. Rosser, "Fragments of Many-Volued Statement Calculi", en *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 87, 1958, pp. 1-53.

[19] Confert *Introducción a la metamatemática*. Trad. cast. M. Garrido. Tecnos, Madrid 1974, pp. 301-308. Este sistema fue presentado por primera vez en Kleene, "On a Notation for Ordinal Numbers", en *The journal of Symbolic Logic*, vol. 3, 1938, pp. 150-155.

cional P es considerada como predicado de una variable x cuyo rango es el domino D y en donde $P(x)$ queda definido para una parte de ese dominio. Así $P(x)$ será:

a) Verdadero, cuando x pertenece al rango de $1/2$ a 1.

b) Indefinido, cuando $x = 0$.

c) Falso, en los demás casos, es decir: $[(x \neq 0) \,\&\, (x < 1/2] \vee (1 < x)$. Kleene construye las tablas de verdad para los funtores: $\sim$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$ y $\equiv$ de acuerdo con los siguientes principios:

1º "Al objeto de que las conectivas proposicionales sean operaciones recursivas parciales (o al menos produzcan predicados recursivos parciales), hemos de elegir para ellas tablas que sean *regulares* en el siguiente sentido: Una columna (fila) dada contiene *1* en la fila (columna) de la $1/2$, solamente si la columna (fila) consta enteramente de casos de *1*; y similarmente en lo que respecta a *0*.

2º El valor de $1/2$ significa "lo no conocido" (lo indefinido). Aquí "no conocido" es una categoría dentro de la cual podemos considerar que cae cualquier proposición, cuyo valor o bien no nos es conocido, o bien preferimos, de momento, no considerarlo; sin que ello excluya, entonces, las otras posibilidades, verdadero y falso[20].

3º Las tablas fuertes están determinadas de modo único como las extensiones regulares de mayor fuerza posible de las tablas clásicas, bivalentes, es decir, son regulares y tienen *1* ó *0* en cada posición donde cualquier extensión regular de las tablas bivalentes pueda tener un *1* o un *0* (si *1* ó *0* están determinados de modo único)[21].

Tablas *fuertes de las conectivas proposicionales*

p	$\sim p$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

	p & q	p ∨ q	p → q	p ≡ q
p \ q	1 1/2 0	1 1/2 0	1 1/2 0	1 1/2 0
1	1 1/2 0	1 1 1	1 1/2 0	1 0 1/2
1/2	1/2 1/2 0	1 1/2 1/2	1 1/2 1/2	0 1 1/2
0	0 0 0	1 1/2 0	1 1 1	1/2 1/2 1/2

Además de las tablas "fuertes" Kleene introdujo también una familia de conectivas proposicionales "débiles". Las tablas para estas conectivas se obtienen de las tablas clásicas introduciendo en ellas el valor $1/2$ a lo largo de la fila y la columna encabezada por $1/2$. El sistema resultante es entonces el que sigue:

	p & q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
p \ q	1 ½ 0	1 ½ 0	1 ½ 0	1 ½ 0
1	1 ½ 0	1 ½ 1	1 ½ 0	1 ½ 0
½	½ ½ ½	½ ½ ½	½ ½ ½	½ ½ ½
0	0 ½ 0	1 ½ 0	1 ½ 1	0 ½ 1

[20] *Introdución a la metamatemática*, ed. cit., p. 304.
[21] *Ibidem*, 303.

El sentido de estas tablas respondería al de un mecanismo incapaz de decidir el valor de una fórmula en la que aparece el valor $^1/_2$.

Un tal sistema es el mismo que el de Bochvar[22]. Las conectivas "débiles" de Kleene se corresponden con las conectivas "internas" de Bochvar. Ambos constituyen un fragmento isomórfico con el sistema bivalente clásico, y en ambos también el concepto usual de "tautología" resulta inoperante, dado que si el valor $^1/_2$ funciona como *input* en una fórmula, esa fórmula recibe automáticamente el valor $^1/_2$. De ahí la necesidad de ampliar el concepto de "tautología" o la introducción del concepto de "quasi-tautología" en el sentido de que el resultado final de la fórmula no obtiene nunca el valor *0*.

Aplicaciones de la lógica polivalente

Una de las primeras aplicaciones de los sistemas polivalentes tuvo lugar en el campo de la Matemática; especialmente está a la base del intuicionismo. Los primeros intentos en este sentido se deben a L. E. J. Brouwer[23]. Pero la nueva rama de la Lógica ha sido fecunda en los campos de las diversas disciplinas. Nos referimos a la fecundidad, si no en resultados definitivos, sí en planteamientos de nuevas cuestiones. Cabe citar a título de ejemplo: en el campo del álgebra los trabajos de Bernstein[24] y Moisil[25]. En el de las matemáticas, los de Mazurkievicz[26] y Tarski[27]; en el de la física, los de Birkhoff, von Neumann[28], Reichenbach[29] y el polémico libro de Destouches-Fevrier[30]; en el de la electrónica, los de Shestakov[31] y Moisil[32]; en el de los "conjuntos difusos", los de Zadeh y Goguen[33].

Finalmente caba señalar la significación de la lógica polivalente dentro de la Lógica. También aquí los sistemas polivalentes han sido fecundos en su aplicación a cuestiones lógicas esenciales. En un plano general tenemos la obra de Zinoviev[34]. En el contexto de las discusiones sobre las relaciones entre la lógica formal y la lógica dialéctica, señala Zinoviev la importancia filosófica de la lógica polivalente y las relaciones con la lógica clásica.

Una de las aportaciones de los sistemas polivalentes a cuestiones específicas de la Lógica es la del lógico chino Moh Shaw-Kwei[35]. Mientras que en el campo del cálculo normal bivalente la formalización de la teoría de conjuntos puede conducir a paradojas, a no ser que se introduzcan restricciones (teoría de los tipos, por ej.), Moh Skaw-Kwei señala que pueden ser eliminadas las paradojas mediante la introducción de un cálculo polivalente. En concreto propone considerar el valor de verdad intermedio $^1/_2$ del sistema de Bochvar como "paradójico", y, en cuanto tal ,se asignaría a proposiciones del tipo siguiente "este enunciado es falso", que será falso si se considera como verdadero y verdadero si se considera como falso. Según esto, la negación de una proposición paradójica, la disyunción de una proposición paradójica con otra paradójica o falsa, la conjunción de una proposición paradójica con otra paradójica o verdadera y la implicación de una pro-

[22] "Sobre un cálculo lógico trivalente y su aplicación al análisis de las contradicciones", en *Matématicheskij Sbornik*, vol. 4, 1939, pp. 287-308 (en ruso). Recensión de A. Church en *The journal of symbolic logic*, vol. 4, 1939, pp. 98-99.
[23] Véase por ej. "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe", en *Jahresberichl der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 33, 1925, pp. 251-256. Trad. ingl. en J. van Heijenoort (comp.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic* 1879-1931. *ed. cit.*, pp. 334-341.
[24] B. A. Bernstein, "Modular Representations of Finite Algebras", en *Proceedings of the Internacional Mathematical Congress Held in Toronto*. Vol. 1, 1928, pp. 207-216.
[25] G. Ç. Moisil, "L'algebra e la logica", en *Atti del Congresso Matematico, tenuto in Roma*, 8-12 *Notember* 1942. Reale Instituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1945, pp. 143-152.
[26] S. Mazurkievicz, "Über die Grundlagen der Warhscheinlichkeitsrechnung", en *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 41, 1934, pp. 343-352.

[27] A. Tarski, "Wahrscheinlichkeitslehre un mehrwertige Logik", en *Erkenntnis* vol. 5, 1935-36, pp. 174-75.
[28] Carrett Birkhoff y J. von Neumann, "The logic of Quantum Mechanics", en *Annals of Mathematics*, vol. 37, 1936, pp. 823-843.
[29] H. Reichenbach, "Les fondaments logiques de la théorie des quanta. Utilisation d'une logique à trois valeurs", en *Applications scientifiques de la logique mathématique*. Gauthier-Villars, París, 1954, pp. 103-114.
[30] P. Dest ouches-Février. *La structura des théories physiques*. PUF, París, 1951.
[31] V. I. Shestakov, "A dual Arithmetic Intepretation of the 3-valued Propositional Calculus Utilized in the Simulation of This Calculus by Relay-Contact Networks", en *American Mathematical Society Translations*, Vol. 48, 1965, pp. 45-72.
[32] G. C. Moisil, "Sur l'application del logiques à trois valeurs à l'étude des schémas à contactas et relais", en *Actes-Proceedings du Congres International de L'Automatique*. Paris, 1956, p. 48.
[33] L. Zadeh et alii, *Fuzzy sets and their Application to Cognitive and Decision Processes*. Academic Press, Nueva York, 1975, G. J. A. Goguen, "The logic of inexact concepts", en *Synthese*, 19 (1969), pp. 325-373.
[34] A. A. Zinoviev, *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*. Trad. inglesa de G. Küng y D. Comey. Reidel, Dordrecht, 1963.
[35] "Logical Paradoxes for Many-Valued Systems", en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 19, 1954, pp. 37-40.

posición falsa por una paradójica o de una paradójica por una falsa, todas ellas son paradójicas; resultados éstos que son los que arrojan las tablas de Bochvar.

Pero, sin duda alguna, la mayor significación que cabe atribuir a la lógica polivalente consiste en su mismo descubrimiento: la leyes de la lógica han sido frecuentemente hipostasiadas y consideradas como leyes apriorísticas, analíticas en el sentido de evidentes por sí mismas, y, en cuanto tales, eran intocables. El descubrimiento de la lógica polivalente demostró que eran posibles estas otras leyes alternativas y con ello se abrían amplios horizontes en las investigaciones de lógica.

BIBLIOGRAFIA

Ackermann, R., *An Introduction to many-valued logics*, Routledge & Kegan Paul Ltd., Londres, 1967.

Aristóteles, *De Interpretatione*. Trad. A. García Suárez y J. Velarde. Cuadernos Teorema. Valencia, 1977.

Carvallo, M., *Logique à trois valeurs, Logique à seuil*, Gauthier-Villars, París, 1968.

Lukasiewicz, J., Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional" (1930), en *Estudios de lógica y filosofía*. Trad. de A. Deaño. Rev. Occidente, Madrid, 1975, pp. 61-86.

Post, E., "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", en *American Journal of Mathematics*, vol. 43, 1921, pp. 163-85.

Rasiowa, H., *An Algebraic Approach to Non - Classical Logics*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

Rescher, N., *Many-Valued Logic* (1952). North-Holland, Amsterdam, 1958.

Rosser, J. B. y Turquette, A.R., *Many-Valued Logic* (1952). North-Holland, Amsterdam, 1958.

Urquhart, A., "many-valued Logic", en D. Gabbay- F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. III, pp. 71-116. Reidel, Dordrech, 1986.

Zinoviev, N. *Philosophical Problems of many-valued Logic*. Trad. inglesa, G. Küng y A. Camey. Reidel, Dordrecht, 1963.

BIBLIOGRAFIA DE CARACTER GENERAL

Barone, F., *Logica formale e logica trascendentale*. Vol. I: Da Leibniz a Kant. Vol. II: L'algebra della logica. Edizioni di "Filosofia", Torino, 1957-65.

Blanché, R., *La logique et son Histoire*. Colin, París, 1970.

Bochenski, I. M., *Historia de la lógica formal*. Trad. M. Bravo Lozano. Gredos, Madrid, 1966.

Colbert, J. G., *La evolución de la lógica simbólica y sus implicaciones filosóficas*. Edic. Univ. de Navarra, Pamplona, 1968.

Dumitriu, A., *History of Logic*. 4 vols. Trad. ingl. de D. Zamfirescu et alii. Abacus Press, Kent, 1977.

Encyclopedia of Philosophy (ed. Edwars, P.), in voce *Logic, History of*. Macmillan, Londres, 1967. Trad. E. Requena y A. Antón. Tecnos, Madrid, 1976.

Enriques, F., *Para la Historia de la Lógica*. Trad. J. L. De Angelis. Espasa Calpe, Buenos Aires, 1949.

Jörgensen, J., *A treatise of formal logic. Vol. I, Historical development*. Levin & Munsksgaard, Copenhague, 1931.

Kneale, W. y M., *El desarrollo de la lógica*. Trad. J. Muguerza. Tecnos, Madrid, 1972.

Kotarbinski, T., *Leçons sur l'histoire de la logique*. Trad. franc. en P. U. F., París, 1964.

Nidditch, P. H., *El desarrollo de la lógica matemática*. Trad. Carmen García-Trevijano. Cátedra, Madrid, 1978.

Prantl, C., *Geschichte der Logik im Abenlande*. 4 vols. S. Hirschel, Leipzip, 1855-70.

Risse, W., *Die Logik der Neuzeit*. 2 vols. Friedrich Frommann, Stuttgar, 1964-70.

Bibliographia logica. 4 vols. Olms, Hildesheim, 1965-79.

Scholz, H., *Abriss der Geschichte der Logik*. Karl Alber, Friburgo/Munich, 1959.

Stjazkin, N. J., *Storia della logica*. Trad. ital. de R. Cordeschi. Editori Riuniti, Roma, 1980.

Wang, H., *A survey of mathematical logic*. North-Holland, Amsterdam, 1962.

INDICE DE AUTORES

A

ABBT, Th.: 209.
ABEL, N. H.: 306.
ABELARDO, P.: 109, 112, *113-119*, 122, 124, 125, 137, 140, 141, 143, 144.
ACKERMANN, R.: 409, 417.
ACKERMANN, W.: 399, 400, 401, 405, 406, 407, 408.
ACKRILL, J. L.: 32, 33.
ADAM, Ch.: 111, 159, 165, 195.
ADAMS, M. M.: 137.
ADORNO, T.: 231, 238.
AGRÍCOLA, R.: 154, 155, 156, 157, 158, 165.
AGRIPA DE NETTESHEIM, C.: 189.
AGUSTÍN, SAN: 18, 302.
AIMONETTO, I.: 361.
ALBERTO DE SAJONIA: 133, 136, 137, 138, 144.
ALBERTO MAGNO, SAN: 120.
ALCUINO: 109.
ALDRICH, H.: 244.
ALEJANDRO DE AFRODISIA: 31, 71, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 85.
ALESSIO, F.: 121, 125, 144.
ALEXEIEV, M. N.: 234, 235, 237.
AL-FARABI: 120, 121.
ALGAZEL: 145.
ALONSO, L.: 353, 375.
ALSTED, J. H.: 189.
ALTHUSSER, L.: 238.
AMMONIO: 83, 157.
ANDRÓNICO DE RODAS: 31.
ANGELELLI, I.: 333, 361.
ANSELMO, SAN: 109, 110, 111, 112.
ANTÍSTENES: 22, 92.
ARNAULD, A.: 160, 161, 165, 167, 224.
ARNDT, H. W.: 217.
ARNIM, J.: 87, 88, 94, 410.
ARNOLD, M.: 244.
ARRIGHETTI, G.: 99.
ASENJO, F. G.: 232.
ASHWORTH, E. J.: 137, 144, 165.
AUBENQUE, P.: 34, 44.
AUCILLON: 271.
AVERROES: 101, 121.
AVICENA: 120, 121, 224.
AX. V.: 94.
AYER, A. J.: 221, 369, 396.
AYERRA, M.: 19, 30.
AZCÁRATE, P. de: 32, 205.

B

BABBAGE, Ch.: 256.
BACON, F.: 94, 166.
BACON, R.: 122, 134.
BAER, R.: 231.
BAITER, J. G.: 104.
BAKRADZE, K. S.: 234, 235.
BALIBAR, E.: 238.
BALL, W. W. R.: 255, 295.
BANFI, J.: 357, 390.
BAR-HILLEL, Y.: 360.
BARINAGA, J.: 407.
BARNES, J.: 33.
BARONE, F.: 170, 172, 205, 206, 217, 241, 275, 295, 418.
BARREAU, H.: 30, 85.
BARROW, I.: 244.

ANTÓN, A.: 418.
APOSTEL, L.: 239.
APULEYO, 19, 86, 91.
ARBICONE, 352.
ARBLAY, Ch. L.: 256.
ARENS, A.: 88.
ARISTÓTELES: V, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, *31-37*, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 101, 103, 104, 106, 109, 112, 113, 115, 117, 119, 120, 121, 122, 124, 125, 132, 137, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 163, 166, 177, 178, 179, 189, 223, 228, 278, 317, 327, 409, 410, 411, 414, 417.
BARTH, P.: 86.
BARWISE, J.: 406.
BAUMGARTEN, A. G.: 169.
BAYLE, P.: 168.
BAYNES, T. S.: 246, 253.
BECHER, J. J.: 193.
BECK, C.: 193.
BECKER, O.: 94.
BEHRENS, G.: 297.
BEKKER, I.: 30, 32.
BELL, D.: 361.
BELL, E. T.: 295.
BENACERRAF, P.: 396, 400, 408.
BENEKE, F. E.: 224, 242.
BENEYTO, R.: 322.
BENTHAM, G.: 244, 245, 246.
BEONIO-BROCCHIERI, M. T.: 113, 114.
BERG, J.: 300, 360.
BERMUDO, P.: 193.
BERNAYS, P.: 325, 387, 398, 399, 400, 401, 407, 408.
BERNOULLI, JUAN: 167, 170, 171, 207, 212, 217.
BERNOULLI, SANTIAGO: 167, 170, 171, 207, 217, 357.
BERNSTEIN, B. A.: 416.
BERRY, G. D. W.: 287, 297.
BERRY, G. G.: 373, 377, 380.
BESIO, A. B.: 357, 390.
BETH, E. W.: 276, 295, 322.
BETTAZZI: 352, 353.
BIDEZ, J.: 108.
BIGNONE, E.: 99.
BILFINGER, G. B.: 169.
BIRJUKOV, B. V.: 361.
BIRKHOFF, G.: 416.
BISTERFELD, J. E.: 176, 189.
BLACK, M.: 369, 396.
BLANCHÉ, L.: 30.
BLANCHÉ, R.: 29, 32, 85, 324, 418.
BLOND, J. M. Le: 25, 33.
BLUMENTHAL, O.: 407.
BOCHENSKI, J. M.: 30, 32, 78, 82, 83, 85, 121, 137, 144, 233, 418.
BOCHVAR, D. A.: 416.
BODEMANN, E.: 169, 171, 205.
BOECIO, A. M. T. S.: 31, 34, 79, 80, 83, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 113, 116, 118, 120, 122, 125, 137, 143, 144, 155, 409.
BOEHME, J.: 195.
BOEHNER, Ph.: 124, 132, 133, 135, 136, 137, 144.
BOGGIO: 352.
BOISCHRILLÓ, E. K.: 235.
BOLER, J. F.: 113, 114.
BOLZANO, B.: V, 271, 293, *300-307*, 308, 314, 327, 351, 360.
BONITZ, H.: 32, 38, 41.
BRAAKHUIS, H. A. G.: 131, 133.
BRADLEY, F. H.: 363.
BRAITWAITE, R. B.: 385.
BRANDIS, Ch.: 34, 78.
BRAVO LOZANO, M.: 418.
BRENTANO, F.: 34, 392.
BROCHARD, V.: 94, 242.
BROMIUS: 97.
BROUWER, L. E.: 357, 416.
BROWN, M. A.: 137.
BROWN, S.: 136.
BRUNO, G.: 189.
BRUNSCHRICG, L.: 26, 27, 311.
BRUNSCHWIG, J.: 85, 94.
BRYANT, S.: 297.
BUCHLER, J.: 297.
BUENO, G.: 19, 43, 239, 240.
BURALI-FORTI, C.: 352, 353, 370, 373, 375, 377, 379.
BURIDÁN, J.: 135, 136, 138.
BURKS, A. W.: 296, 297.
BURLEIGH, W.: 133, 136, 137, 138.
BURNET, J.: 30.
BURY, R. G.: 94.
BUSSE, A.: 83, 102.
BUTLER, R. J.: 396.

C

CAESARIUS, J.: 154.
CALOGERO, G.: 30, 33.
CALVINO, J.: 156.
CALLEJA, P.: 396.
CAMERARII, G.: 120.
CAMPANELLA, T.: 166.
CANDEL SANMARTÍN, M.: 32, 58.
CANTONI: 352.
CANTOR, G.: 229, 300, 307, 309, 310, 317, 365, 370, 371, 373, 379, 385, 405.
CANTOR, M.: 357.

BOOLE, E. M.: 260, 295.
BOOLE, G.: V, VII, 49, 169, 173, 211, 230, 240, 245, 248, 251, 254, 255, 258, *259-276*, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 285, 286, 288, 289, 292, 299, 318, 322, 323, 326, 352, 353, 354, 355, 356.
BOREL, E.: 359.
BORKOWSKI, L.: 411.
BORNSTEIN, P.: 217.
BOSANQUET, B.: 230.
BOSSUT, Ch.: 165.
BOTTIN, F.: 137, 144.
BOURGUET: 204.
BOYLE, R.: 167.
CAPELLA, M.: 109.
CAPILOWISH, I. M.: 394.
CARNAP, R.: 192, 205.
CARNÉADES: 21.
CARR, H. W.: 394.
CARRÉ, M-H: 110, 114.
CARRERAS Y ARTAU, T.: 153.
CARROLL, L.: 285.
CARRUCCIO, E.: 206.
CARVALLO, M.: 417.
CASABÁN, E.: 396.
CASADESSUS, J.: 153.
CASIODORO, M. A.: 109.
CASSINA, U.: 343, 352, 361.
CASSIRER, E.: 222, 241.
CASTELLANO, G.: 352.
CASTILLÓN, G. F.: 217.
CATELAN, ABATE, 167.
CAUCHY, A. L.: 306, 307.
CAVAILLÉS, J.: 306, 307, 371.
CAYETANO, T.: 39.
CAYLEY, A.: 285.
CELLUPRICE, V.: 30.
CEÑAL, R.: 219.
CERRONI, U.: 238.
CESAR: 97.
CIAFARDONE, R.: 217.
CIAMBERLINI: 352.
CICERON, M. T.: 20, 87, 89, 91, 93, 94, 95, 97, 98, 100, 109, 131, 154, 155, 156, 157, 410.
CLAIR, P.: 165.
CLARKE, S.: 169, 204.
CLEANTES, 85, 86.
COHEN, H.: 222.
COHEN, P. J.: 359, 387.
COLBERT, J. G.: 418.
COLLETI, L.: 238.
COMEY, D.: 409, 416, 417.
CONDILLAC, E. B. de: 225, 256.
CONRING, H.: 167, 203.
COPÉRNICO, N.: IX.
COPI, I. M.: 396.
COPLESTON, F. C.: 396.
CORCORAN, J.: 33.
CORDESCHI, R.: 418.
CORSANO, A.: 206.
COUSIN, D. R.: 40.
COUSIN, V.: 112, 113.
COUTURAT, L.: 171, 172, 180, 183, 186, 187, 188, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 198, 199, 200, 203, 204, 205, 206, 241, 282, 297, 299, 343, 354, 355, 356, 361.
CRESPO PEREIRA, R.: 297.
CRISIPO: 85, 86, 87, 90, 91, 92, 93, 409.
CHOMSKY, N.: 87, 88, 163.
CHURCH, A.: 297, 326, 340, 351, 406, 407, 417.
CHWISTEK, L.: 384.

D

DALGARNO, G.: 193, 194, 244.
DANEK, J.: 360.
DARBON, A.: 396.
DAVEMPORT, C. K.: 217.
DAVIS, M.: 405, 407.
DE ANGELIS, J. L.: 418.
DE LACY, E. A.: 97, 99.
DE LACY, P. H.: 97, 99.
DE MORGAN; A.: 143, 169, 188, 248, *251-255*, 259, 260, 276, 277, 280, 289, 355, 358.
D'ETLORS, V. K.: 406.
DE PATER, W. A.: 30.
DEAÑO, A.: 411, 417.
DEDEKIND, J. W. R.: 300, 306, *309-317*, 323, 334, 357, 371, 382, 397, 405.
DELBOEUF, J. R. L.: 297.
DEL PANDO, J. E.: 396.
DELLA VOLPE, G.: 238.
DEMETRIO DE LACONIA: 97.
DENIFLE, H.: 135.
DESCARTES, R.: 110, 111, *159-160*, 161, 163, 165, 166, 195, 196, 203, 299, 302.
DESTOUCHES-FERRIER, P.: 416.
DEWEY, J.: 227, 297.
DIDOT, F.: 32.
DIELS, H.: 206.
DIODORO CRONOS: 20, 84, 85, 86, 93.
DIÓGENES DE BABILONIA: 21, 87.
DIÓGENES LAERCIO: 19, 20, 21, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 94, 95, 96, 99, 223.
DIRICHLET, P. G.: 313, 334, 397.
DODGSON, Ch. L. *(ver* Carroll, L.): 285, 297.
DOMÍNGUEZ, J. M.: 395.

CROCE, B.: 242.
CRUZ HERNÁNDEZ, M.: 120, 153.
CURRÁS RÁBADE, A.: 206.
CURRY, H. B.: 407.

CH

CHADWICK, H.: 108.
CHARPENTIER, T. V.: 296.
CHAVALLEY, C.: 407.
CHELPANOV: 239.
CHENG, CHUNG-YING: 297.
CHERKESOV, V. I.: 234, 235.

DOU, A.: 110.
DOZ, A.: 232, 242.
DUBARLE, D.: 232, 233, 241, 242.
DUFUMIER, H.: 396.
DUMMETT, M.: 361.
DUMITRIU, A.: 418.
DUNS ESCOTO, J.: 120, 136, 139, 224, 244, 293, 430.
DÜRR, K.: 108, 144, 183, 191, 206, 217.
DUTENS, L.: 171, 205.

E

ECHEVARRÍA, J.: 205.

EDDINGTON, A. S.: IX.
EDWARDS, P.: 396, 418.
EHINGER, E.: 121.
ELORDUY, E.: 86, 87, 88, 94.
ELLIS, R. L.: 258, 275, 297.
EMPÉDOCLES: 21.
ENCINAS, F.: 133.
ENGELS, F.: 233, 234, 235, 238, 242.
ENRIQUES, F.: 418.
EPÍCRATES: 26.
EPICTETO: 85.
EPICURO: 95, 96, 97.
ERASMO DE ROTERDAM: 156.
ERDEI, L.: 233.
ERDMANN, B.: 224, 242.
ERDMANN, J. E.: 171, 205.
ERNOUT, A.: 88.
ERRERA, A.: 407.
ESPINOSA, P.: 133.
ESQUILO: 21.
ESTILPÓN: 86.
ESTRABÓN: 31.
EUBÚLIDES: 84.
EUCLIDES DE MEGARA: 21, 84.
EUCLIDES (geómetra): XIII, 22, 324, 397, 398, 407.
EUDEMO: 78, 80.
EUDOXIO: XIII.
EULER, L.: 49, 183, *212-214*, 217, 282, 306.

F

FABER DE WERDEA, J.: 124.
FAJ, A.: 30.
FANO, G.: 352, 353.
FARIS, J. A.: 217.
FENYÖ, S.: 297.
FERNÁNDEZ ROBLES, J.: 58.
FERRÁ, M.: 153.
FERRATER MORA, J.: 144.

FREGE, G.: 18, 114, 216, 221, 280, 286, 289, 292, 297, 299, 300, 306, 310, 311, 312, *317-352*, 353, 355, 356, 357, 358, 360, 361, 364, 366, 367.
FRIES, J. F.: 224, 242.
FURTH, M.: 360.

G

GABBAY, D.: 417.
GAL, G.: 136.
GALENO: 83, 86, 89, 94, 100, 101, 102, 156, 157.
GALILEO, G.: 158, 159, 166.
GALIMBERTI, A.: 396.
GALLACH PALÉS, F.: 32.
GALLI, G.: 206.
GALMÉS, S.: 153.
GAMBRA, J. M.: 297.
GANDILLAC, M.: 153.
GANDY, R.: 406.
GAOS, J.: 242.
GARCÍA, E.: 396.
GARCÍA BACCA, J. D.: 32, 239, 407.
GARCÍA BORRÓN, J. C.: 230.
GARCÍA GUAL, C.: 21.
GARCÍA MIRANDA, M.: 347, 353, 375.
GARCÍA MORENO, A.: 241.
GARCÍA MORENTE, M.: 205.
GARCÍA SUÁREZ, A.: 32, 417.
GARCÍA-TREVIJANO, C.: 418.
GARCÍA YEBRA, V.: 32.
GARDNER, M.: 278.
GARIN, E.: 165.
GARLANDUS COMPOTISTA: 112.
GARULLI, E.: 241.
GARRIDO, M.: 322, 414.
GASSENDI, P.: 167, 223.
GAUSS, K. F.: 306.
GAUTHIER, Y.: 232, 242.

FERRER, F.: 230.
FEYS, R.: 361, 396.
FICHTE, J. G.: 222, 223, 227, 241, 300.
FILODEMO DE GADARA, 97, 98.
FILÓN DE MEGARA: 84, 85, 318.
FINDLAY, J. N.: 230.
FISCH, M.: 410.
FÖLDES, I.: 405, 408.
FONSECA, P.: 35, 53, 166, 189.
FOUCHER DE CAREIL, A.: 168, 205.
FRAENKEL, A.: 359, 371, 387, 400.
FRANKLIN, Ch. L.: 298.
FREDE, M.: 94.
FREDHOLM, E. I.: 397.
GEACH, P.: 350.
GEBELSBERGER: 353.
GERBERTO DE AURILLAC: 109.
GERGONNE, J. A.: *214-217*, 286.
GERHARDT, C. I.: 111, 171, 175-205.
GEYER, B.: 113, 114, 115, 118, 124.
GEYMONAT, L.: 361.
GHYKA, M.: 396.
GIACON, C.: 137, 144.
GIBSON, M. T.: 108.
GILBERT, N. W.: 165.
GILLESPIE, G. M.: 30.
GILLIES, D. A.: 329.
GINAR, R.: 153.
GIORGIANTONIO, M.: 99.
GIRBAL, F.: 165.
GIUDICE: 352, 353.
GIULIETTI, G.: 242.
GÖDEL, K.: 325, 359, 387, 391, 400, 401, *402-405*, 407.
GOETZ, G.: 86.
GOGUEN, G. J. A.: 416.
GOLDMANN, L.: 238.
GÓMEZ IZQUIERDO, A.: 242.
GOMPERZ, T.: 30.
GONSETH, F.: 231, 400.
GONZÁLEZ, A.: 137.
GONZÁLEZ PALENCIA, A.: 120.
GORREN, J.: 240, 242.
GORSKI, D. P.: 234, 235.
GORTARI, E. de: 236, 278.
GOUDGE, T. A.: 297.
GRABMANN, M.: 121, 122, 144.
GRASSMANN, H.: 169, 332, 353.
GRASSMANN, R.: 298.
GRAVES, Ch.: 298.
GREDT, J.: 35.
GREENLEE, D.: 293, 297.
GREENWOOD, Th.: 396.
GRÉGOIRE, P.: 189, 190.
GREGORIO DE RIMINI: 136, 224.
GREGORY, D. F.: 255, *258-259*.
GRELLING, K.: 373, 396.
GRIGGS, S. C.: 229.
GUENTHNER, F.: 417.
GUHRAUER, G. E.: 166, 171, 205.
GUILLERMO DE CHAMPEAUX: 112.
GUNDISALVO, D.: 120.
GÜNTHER, G.: 231, 232, 233, 239, 242.
GUZZO, A.: 108, 241.

H

HARTSHORNE, C.: 296.
HASENJÄGER, G.: 322.
HAURÉAU, B.: 153.
HAVAS, K. G.: 233.
HAVEMANN, R.: 236.
HEATH, P.: 251, 254.
HEGEL, G. W. F.: V, VI, XI, 18, 207, *227-233*, 234, 235, 237, 238, 240, 241, 242, 255, 363.
HEIJENOORT, J. van: 315, 359, 361, 370, 371, 373, 375, 401, 405, 407, 408, 411.
HEISS, R.: 230.
HENDERSON, G. J.: 355.
HENLE, P.: 340.
HENNE, D.: 94.
HENRY, D. P.: 111, 144, 296.
HERBRAND, J.: 399, 401, 405, 407.
HERMES, H.: 361.
HERMÓGENES DE TARSUS: 156, 157.
HERSCHEL, J.: 244, 256, 257.
HERTZ, M.: 131.
HESSE, M. B.: 260, 274.
HIBBEN, J. G.: 229.
HICKS, R. D.: 94, 99.
HIERRO, J.: 358.
HILBERT, D.: XV, 151, 192, 216, 306, 312, 323, 332, 333, 334, 351, *397-408*.
HINTIKKA, J.: 110.
HIPÓCRATES DE CHÍOS: VII.
HOBBES, T.: 167, 177, 178, 179, 355.
HOCKING, W. S.: 285.
HOLLAND, G. J., von: 209, 210, 211-212, 217.
HOOK, S.: 233.
HOSPINIANUS, J.: 178, 179.
HOUDE, R.: 133.
HUBER, E.: 233.
HUBIEN, H.: 136, 144.
HUDDEN, J.: 167.
HUME, D.: XI.
HUSSERL, E.: V, VI, IX, 151, 172, 173, 297, 300.

HAILPERIN, T.: 295.
HALSTED, G. B.: 296.
HAMELIN, O.: 27, 49.
HAMILTON, SIR WILLIAM: 49, 164, 183, 208, 225, 244, *246-250*, 251, 252, 253, 260, 261, 285, 293.
HAMILTON, SIR WILLIAM ROWAN: 256, 259.
HAMPDEN, R. D.: 244.
HANKEL, H.: 332, 334.
HARLEY, R.: 275, 295.
HARNECKER, M.: 238.
HARRIS, W. T.: 229.
HARTMANN, B.: 233.
HARTMANN, E. von: 229, 242.
HARTMANN, N.: VI.
HUYGENS, C.: 167, 170.
HUYSCHE, J.: 244.
HYPPOLITE, J.: 229, 243.

I

ILIENKOV, E. V.: 237.
IMAZ, E.: 227.
IMBERT, C.: 360.

J

JACOBI, C. G. J.: 306.
JANET, P.: 229.
JÄSCHE, B. G.: 241.
JASKOWSKI, S.: 231, 239.
JAURIS, M.: 360.
JEFFREYS, H.: 396.
JEVONS, W. S.: 255, 262, 263, *276-280*, 285, 296, 355.
JOHNSON, W. E.: 298.
JOJA, A.: 30, 237, 243.
JORDAN, Z. A.: 236.
JÖRGENSEN, J.: 218, 418.
JOURDAIN, Ph. E. B.: 206, 277, 295, 321, 326, 334, 339, 361, 396.
JUAN ITALO: 101.
JUAN DE CORNUBIA *(ver* Pseudo-Escoto): 136.
JUAN DE MIRECOURT: 136.
JUAN DE SALISBURY: 112, 114, 120.
JUAN DE SANTO TOMÁS: VII, 224.
JUNGINS, J.: 187, 188.

K

KALL, H.: 361.
KALBFLEISCH, K.: 83, 94, 100, 101.
KALLEN, H. M.: 340.
KANT, I.: V, XI, 111, 170, 171, *218-223*, 227, 228, 241, 247, 299, 300, 303, 304, 311, 327, 328, 329, 330, 351, 363, 364, 418.
KANTOR, J. R.: 242.
KAPLAN, A.: 394.
KEBLE, J.: 244.
KEDROV, V. M.: 234.
KEISLER, H. J.: 406.
KENNEDY, H. C.: 361.
KENNY, A.: 131.
KEPLER, J.: 166.
KEYNES, J. M.: 271.
KINKEL, W.: 222.
KIRCHER, A.: 167, 193.
KLAUS, G.: 236, 243.
KLEENE, S. C.: 405, 406, 408, 414, 415, 416.
KLEIN, F.: 306, 317, 397.
KOTARBINSKI, T.: 418.
KRAUSSER: XI.
KREISEL, G.: 400, 408.
KRETZMANN, N.: 131, 133, 137.
KRONECKER, L.: 311, 397.
KRÖNERT, G.: 166.;
KUBITZ, D. A.: 242.
KUMMER, E. E.: 397.
KUNEN, K.: 406.
KÜNG, G.: 409, 416, 417.
KUPER, L.: 236.

L

LACROIX, S. F.: 256.
LACHELIER, J.: 49, 76.
LAGRANGE, J. L.: 306.
LAITA, L. M.: 251.
LAMBERT, J. H.: 169, 183, *209-211*, 212, 217.
LAMBERTO DE AUXERRE: 121, 122, 125, 128, 129, 137.
LAMPRECHT, I. F.: 166.
LANCELOT, C.: 163.
LANGFORD, C. H.: 295.
LANGER, S. K.: 340.
LAPLACE, P. S.: 388.
LARGEAULT, J.: 361.
LARROYO, F.: 32.
LATOMUS, B.: 154.
LANSBERG, H.: 30.
LEAU, L.: 193, 354.
LEFEBVRE, H.: 236.
LEFÉVRE D'ETAPLES: 156.
LEIBNIZ, G. W.: V, 49, 78, 93, 94, 111, 151, 158, 159, 163, *166-206*, 207, 209, 212, 255, 256, 282, 299, 300, 302, 306, 337, 341, 342, 343, 352, 356, 363, 364, 393, 418.
LENIN, V. I.: 233, 234, 235, 237.
LE ROY, G.: 256.

KLEMKE, E. D.: 361.
KLEMM, W.: 209.
KNEALE, M.: 23, 32, 47, 218, 361, 410, 412, 418.
KNEALE, W.: 23, 32, 47, 117, 200, 218, 295, 361, 410, 412, 418.
KNECHT, H. H.: 206.
KONDAKOV, N. I.: 234.
KONIG, I.: 373, 377.
KOPNIN, P. V.: 234, 236.
KORSELT, A.: 333, 334.
KOSIK, R.: 238.
KOSOK, M.: 232, 238, 243.
KOSSAK, H.: 307.
KÖSTNER: 357.
LESNIEWSKI, S.: 324, 350.
LEVI, A.: 30, 94, 296.
LÉVY-BRUHL, L.: XII.
LEWIS, C. I.: 85, 138, 295.
L'HOSPITAL, MARQUÉS DE: 168.
LIARD, L.: 295, 296.
LINDEMANN, H. A.: 206, 397.
LIPPS, T.: 224, 242.
LITTRÉ, E.: 153.
LOBACHEWSKI, S.: 411.
LOBKOWICZ, N.: 239.
LOCKE, J.: 168, 177, 225.
LONG, A. A.: 99.
LORENZEN, P.: 231, 408.
LORENZO, J. de: 307.
LORENZO VALLA: 154.
LORIA, G.: 206.
LOSSADE, L.: 218, 223.
LÖWENHEIM, L.: 297, 401.
LUGARINI, L.: 33.
LUIS, C. R.: 351.
LUIS DE LEÓN, FRAY: 145.
LUKASIEWICZ, J.: 33, 37, 58, 65, 94, 101, 137, 231, 233, 323, 324, 325, 326, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 417.
LUPORINI, C.: 238.
LÜROTH, J.: 297.
LUTERO, M.: 135, 154.
LUTOSLAWSKI, W.: 23, 30.

LL

LLINARES, A.: 153.
LLOYD, A. C.: 102.
LLULL, R.: *145-153*, 189, 190, 355.

M

MACAO, M.: 361.
MACFARLANE, A.: 285, 298.
MACLAURIN, C.: VII, 256, 264, 265, 267.
MADKOUR, I.: 120.
MAIER, H.: 33, 34, 224.
MAIERÚ, A.: 137, 144.
MALEBRANCHE, N.: 167, 171.
MALTSEV, V. I.: 235, 236.
MANGIONE, C.: 242.
MAO TSE-TUNG: 238.
MARÍAS, J.: 205.
MARIOTTE, E.: 167.
MARKOV, A.: 406.
MAROUAND, A.: 284.
MC RAE, R. M.: 242.
MC TAGGART, J.: 230, 243.
MEILLET, A.: 88.
MEINONG, A.: 366, 367, 391.
MEISER, C.: 104.
MELANTON, P.: 154, 156.
MENNE, A.: 217.
MENZEL, L.: 242.
MERBACH, F.: 99.
MERKER, N.: 238.
MERENER, S.: 235.
MERSENNE, M.: 160, 195.
METZ, R.: 261.
MICHALSKI, K.: 410.
MIGNE, J. P.: 83, 104, 109.
MIGNUCCI, M.: 94.
MILL, J. S.: 93, 94, 224, *225-227*, 242, 244, 329, 330, 331, 363, 364.
MINAS: 101.
MINIO-PALUELO, L.: 33, 108, 113, 117, 144.
MINKOWSKI, H.: 397.
MITCHELL, O. H.: 288, 298.
MOH, SHAW-KWEI, 416.
MOISIL, G.: 416.
MOLINER, J. B.: 395.
MONDOLFO, R.: 242.
MONOD, J.: 230.
MOODY, E.: 136, 137, 143, 144.
MOORE, G. E.: 363, 366, 370.
MORAVSIK, J. M.: 30.
MORENO, A.: 144.
MOSTERÍN, J.: 325, 333, 361, 391, 401, 402, 407.
MOULINES, U.: 358, 360, 396.
MOUSEL, H. L.: 246.
MUGNAI, M.: 295.
MUGUERZA, J.: 23, 395, 410, 418.
MULLALLY, J. P.: 133.
MÜLLER, K.: 166.
MUÑOZ, J.: 408.
MUÑOZ, V.: 133, 137, 297.

MARR, N. I.: 234.
MARTÍN, A.: 402.
MARTÍN, R.; 408.
MARX, K.: VII, 230, 233, 234, 235, 237, 238, 242.
MARTES, B.: 90, 91, 94.
MAULE, W. H.: 256.
MAULORYCO, F.: 357, 358.
MAYS, D.: 296.
MAZURKIEWICZ, S.: 416.
MC CALL, S.: 414.
MC COLL, H.: 296, 353, 355, 356, 410, 412.
MC GILVARY, E. B.: 230.
MC KENNY, J. L.: 396.
MC. LENDON, H. J.: 396.
MURE, G.: 229, 230.
MURPHY, J. J.: 298.
MURRAY, R.: 244.

N

NAGEL, E.: 117, 295, 402.
NATORP, P.: 94.
NEBRIJA, A. de: 19, 165.
NEEMAN, U.: 242.
NELSON, L.: 373.
NEUMANN, J. von: 375, 399, 400, 408, 416.
NEWLIN, W. J.: 285.

NEWMAN, J. H.: 244.
NEWOMAN, J. R.: 402.
NEWTON, I.: IX, 167, 168, 197, 255, 306.
NICOLÁS DE AUTRECOURT: 136.
NICOLÁS DE PARÍS: 133.
NICOLE, P.: 160, 161, 165, 224.
NIDDITCH, P. A.: 361, 418.
NIZOLIO, M.: 177.
NORMAN, R.: 243.
NOVELLA DOMINGO, J.: 396.

O

OBERTELLO, L. A.: 104, 108.
OBRADOR, M.: 153.
OCKHAM, G. de: 113, 132, 135, 136, 137, 138, 140, 142, 143, 144, 224, 244, 376, 410.
O'DONNELL, J. R.: 133.
OLBRECHTS-TYTEKA, L.: 20.
OLDENBURG, H.: 167.
ONG, W.: 165.
ORELLI, J. C.: 104.
ORÍGENES: 86, 91.
OTERO, M. H.: 295.
OTTAVIANO, C.: 113.
OTTO DE FREISING: 111.
OWEN, G. E. L.: 33.

P

PABLO DE PÉRGOLA: 137.
PABLO DE VENECIA: 133, 137.
PABLO, SAN: 44.
PACI, E.: 396.
PADELLARO, R.: 133.
PADILLA, H.: 323, 358, 360.
PADOA, A.: 352, 356, 361, 362.
PALACIOS, L. E.: 223.
PAPP, A.: XI.
PEIRCE, Ch, S.: 188, 254, 263, *285-294*, 296, 297, 298, 324, 353, 355, 356, 410.
PELLOUX, L.: 243.
PEÑA, V.: 44.
PEREDA, C.: 351.
PERELMEN, Ch.: 20.
PÉREZ RIESCO: 30.
PEROJO, J.: 241.
PERREIAH, A. R.: 137, 144.
PERRY, W. T.: 323, 324.
PÉTER, R.: 405, 408.
PETTOELLO, R.: 408.
PHILOPON, J.: 73.
PIAGET, J.: 231, 317.
PINBORG, J.: 131.
PITÁGORAS: 397.
PLATÓN: V, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 42, 44, 46, 67, 74, 86, 101, 104, 154, 157, 158.
PLATZECK, E.: 153.
PLAYFAIR, J.: 256.
PLEBE, A.: 33.
PLOTINO: 102.
PLOUCQUET, G.: 169, *207-209*, 210, 211, 217, 255.
POHLENZ, M.: 87, 94.
POINCARÉ, H.: 347, 348, 353, 357, 358, 375, 376, 377, 390, 397, 399.
POPPER, K. R.: 230, 238.
PORETSKY, P. S.: 298.
PORFIRIO: 31, 33, 48, 102, 103, 104, 105, 106, 109, 110, 113, 119, 120, 121, 122, 157, 244.
POST, E.: 325, 401, 406, 411, 412, 414, 417.
POZZI, L.: 165.
PRA, M. del: 113, 117, 119.
PRANTL, G.: 32, 101, 111, 121, 124, 129, 133, 138, 139, 141, 418.
PRESTET: 167.
PRETI, G.: 30, 94, 144, 360.
PRICE, R.: 144.
PRIOR, A. N.: 137, 239, 295, 297.
PRISCIANO: 124, 131, 132.

PAPPUS DE ALEJANDRIA, 159, 328.
PARMÉNIDES DE ELEA: 22, 23, 84.
PASCAL, B.: 161, 165, 175, 203, 216, 357.
PASQUAL, A. R.: 153.
PATON, H. J.: 222.
PATZIG, G. 33, 360, 361.
PEACOCK, G.: 251, 255, 256, *257-258*, 259.
PEANO, G.: 163, 216, 295, 297, 306, 313, 318, 322, 323, 333, 336, 343, *352-360*, 361, 362, 363, 365, 366, 372, 377, 378, 389, 390, 398, 400, 405.
PEDRO HISPANO: 59, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 136, 137, 138, 144, 145, 244.
PRÓDICO: 21.
PSELLOS, M.: 121, 122.
PSEUDO-AGUSTÍN: 86.
PSEUDO-ESCOTO: 136, 137, 139, 140, 141, 142, 224.
PUNTA, F. DEL: 136, 137.
PUTNAM, H.: 396, 400, 408.

Q

QUINE, W. V.: 350, 358, 361, 368, 369, 370, 394.
QUINTERO, V. P.: 205.
QUINTILIANO: 154, 156, 157.

R

RABE, H.: 156.
RABIER, E.: 49.
RADE, E.: 205.
RAMSEY, F. P.: 383, 385, 386, 396.
RAMUS, P.: 154, 155, 156, 157, 158, 159, 162, 165, 181.
RASIOWA, H.: 417.
RASPE, R. E.: 171, 176.
RECASENS SICHES, L.: 86.
RECIPI, L.: 83.
REICH, K.: 222, 242.
REICHEMBACH, H.: 412, 416.
REMOND DE MONTMORF, P.: 168.
RÉMUSAT, Ch de: 113.
REQUENA, E.: 295, 418.
RESCHER, N.: 121, 206, 209, 417.
REYES y PROSPER, V.: 297.
RHEES, R.: 260.
RICHARD, J.: 372, 373, 376, 377, 386.
RIEMANN, G. F. B.: 313, 334.
RIEZLER: 111.
RIJK, L. M. de: 112, 113, 114, 119, 121, 122, 124, 125, 132, 144.
RIPALDA, J. M.: 231.
RISSE, W.: 165, 206, 418.
RIST, J. M.: 99.
RIVERSO, E.: 396.
ROBERT, L.: 295.
ROBERTSON, G. C.: 296.
ROBIN, L.: 30, 73.
ROBINSON, R.: 30.
ROBINSON, Th: 256.
ROBSON, J. M.: 242.
ROCES, W.: 242.
RODIER, G.: 42, 49.
ROGOWSKI, L. S.: 231, 239, 240.
ROSCELINO: 111, 112.
ROSE, A.: 414.
ROSE, L. E.: 33.
ROSE, V.: 32, 121.
RUTKÉVICH, M. N.: 236.
RUVIRA, J.: 241.
RYAN, A.: 242.
RYAN, E.: 256.

S

SACRISTÁN, M.: 236, 238, 322.
SAINATI, V.: 30, 206.
SAINSBURY, M.: 384, 396.
SAIZ BARBERÁ, J.: 153.
SALAMUCHA, J.: 144.
SALZINGER, I.: 153.
SÁNCHEZ, A.: 238.
SÁNCHEZ-MAZAS, M.: 206.
SÁNCHEZ DE ZAVALA, V.: 238, 401, 408.
SANDOVAL, M.: 237.
SANMARTÍN ESPLUGES, J.: 94, 325.
SAYERS, S.: 243.
SCARAVELLI, L.: 222.
SCHELLING, F. W. J.: *222-223*, 227, 241.
SCHILPP, P. A.: 360, 363, 370, 396.
SCHIRN, M.: 361.
SCHELEIERMACHER, F. E. D.: 294.
SCHLEYER, J. M.: 193, 355.
SCHLICK, M.: 47.
SCHMITT, F. S.: 110.
SCHOELL, F.: 86.
SCHOENMAN, R.: 396.
SCHOLZ, H.: V, 32, 101, 169, 170, 191, 360, 418.
SCHOTT, G.: 193.
SCHRECKER, P.: 165.
SCHRÖDER, E.: 188, 281, 292, 293, 297, 313, 322, 326; 353, 355, 356.
SCHRÖTER, M.: 241.
SCHUHL, P. M.: 85, 86, 94.
SCOTT, T. K.: 136.
SEARLE, J.: 367, 396.
SÉNECA, L. A.: 95.
SERRANO, M.: 237.

ROSE, V.: 32, 121.
ROSEN, M.: 243.
ROSENTAL, M. M.: 234, 235, 236, 237.
ROSS, D.: 32, 36, 38, 72.
ROSSER, J. B.: 409, 414, 417.
ROSSI, A.: 367, 369.
ROSSI, M.: 238, 243.
ROSSI, P.: 153, 165.
ROUGIER, L.: 408.
ROZHIN, V. P.: 235, 236.
RUBIO, J.: 189.
RUSSELL, B.: 84, 85, 172, 186, 192, 206, 315, 318, 323, 324, 336, 343, 346, 348, 349, 350, 353, 357, 358, 359, 360, 361, *363-396*, 400.
RUSSELL, F. C.: 297.
SERRANO, M.: 237.
SERVOIS, F. J.: 257.
SESIC, B. V.: 240, 243.
SEXTO EMPÍRICO: 20, 84, 86, 87, 88, 89, 94, 96, 226, 302.
SHEFFER, M. H.: 287.
SHEHABY, N.: 120.
SHESTAKOV, V. I.: 416.
SHIEL, J.: 108.
SHOREY, P.: 30.
SHYRESWOOD, G. de: 121, 122, 124, 125, 128, 130, 131, 133, 134, 137, 145.
SIGWART, Ch.: 224, 242, 293.
SIKES, J. G.: 113, 114.
SIMÓNIDES: 21.
SIMPLICIO: 83.
SIMPSON, T. M.: 351, 367, 396.
SKOLEM, T.: 317, 401, 405.
SLUPECKI, J.: 414.
SMART, H. R.: 360, 361, 396.
SOBOCINSKI, B.: 350, 396.
SÓCRATES: 21, 22, 24.
SOLANA, M.: 165.
SOLMSEN, F.: 30, 32, 33, 108.
SPADE, P. V.: 144.
SPENCER, H.: 280.
SPINOZA, B.: 93, 163, 167, 363.
SPISANI, F.: 240, 243.
STALIN, J.: 233, 234.
STAPPER, R.: 121.
STEBBING, L. S.: 242.
STECKELMACHER, M.: 222, 242.
STEELE, D. A.: 360.
STEELE, R.: 134.
STEINTHAL, H.: 33.
STIFEL, M.: 175, 357.
STJAZKIN, N. J.: 206, 418.
STOUT, G. F.: 396.
STRACHEY, O.: 396.
STRAWSON, P. F.: 368, 369.
STRODE, R.: 137, 138, 139, 141.
STRYCKER, E.: 23.
STURM, J.: 154, 156, 157.
SUÁREZ, F.: VI, 88, 166, 189, 218, 223, 410.
SUÁREZ, M.: 221.
SUPPES, P.: 117.
SUSZKO, P.: 239.
SYLVESTER, J. J.: 285.
SYRIANUS: 106.
SZIGETTI, J.: 229.

T

TALLON, H. J.: 396.
THOMAS, I.: 217.
THOMPSON, M.: 297.
THOMSON, G.: VII.
THUROT, Ch.: 121, 124.
TISSOT, J.: 241.
TITELMANS, F.: 154.
TITO LIVIO: 166.
TOMÁS DE AQUINO, SANTO: 34, 36, 39, 46, 50, 111, 120, 125, 137, 166, 218, 410.
TOMÁS DE ENKFURT: 293.
TONELLI, G.: 242.
TORCUATO, G.: 242.
TORCUATO: 97.
TOUS, M.: 153.
TOVAR, A.: 395.
TOWNEY, G. A.: 242.
TREBISONDA, G.: 155.
TRENDELENBURG, F. A.: 33, 34.
TRICOT, J.: 24, 32, 35.
TSCHIRNHAUS, W.: 167, 197.
TUGARINOV, V. P.: 235, 236.
TURING, A. M.: 406, 407.
TURQUETTE, A. R.: 409, 410, 417.
TWEEDALE, M. M.: 113, 114.

U

URGUHÁRT, A.: 417.
URRÁBURU, J. J.: 218.
USENER, H.: 32, 83.
USHENKO, A. P.: 396.

V

VACCA, G.: 206, 217, 352, 357, 358.
VACCARINO, G.: 30.
VADÉE, M.: 229.
VAILATI, G.: 169, 170, 206, 295, 352, 353, 362.

TANNERY, P.: 111, 159, 165, 195.
TARSKI, A.: 47, 117, 192, 304, 305, 325, 413, 416.
TARTAGLIA, N.: 175, 357.
TABANER, P. V.: 234.
TAYLOR, B.: VII, 256, 264, 265, 267.
TCHON, CHIKI: 175, 357.
TEMISTIO: 155.
TEOFRASTO: *77-83*.
TERRACINI, A.: 362.
TERRÓN, E.: 233.
THIEL, Ch.: 361.
THIBAUD, P.: 297.
THOM, P.: 33.
THOMAE, J.: 333.
VALDÉS, L. M.: 32.
VALLA, L.: 154, 155, 156, 158, 165.
VARELA, T.: 235.
VARRÓN: 86, 87.
VASA, A.: 396.
VASILIEV, N. A.: 411.
VASOLI, C.: 165.
VEGA, L.: 401.
VEITCH, J.: 246.
VELARDE, J.: VI, VIII, XIV, XV, 21, 32, 193, 206, 216, 243, 362, 370, 417.
VELZI, R.: 395.
VENN, J.: 49, 169, 214, 217, 263, 275, 279, *280 284*, 295, 296.
VERA, F.: 19.
VERNANT, J. P.: 19, 30.
VIANO, C. A.: 33, 94.
VICTORINO, MARIO: 109, 113.
VIDAL ROGET, A.: 235.
VIERU, S.: 83.
VIRGILIO: 97, 166.
VIRIEUX-REYMOND, A.: 94.
VIVANTI, G.: 352, 353.
VIVES, L.: 154, 165.
VOLTERRA, V.: 397.
VOSSIUS, G.: 193.
VUILLEMIN, J.: 396.

W

WADDING, L.: 136.
WADDINGTON, Ch.: 165.
WAITZ, Th.: 32, 78.
WAJSBERG, M.: 414.
WALKER, J. D. B.: 361.
WALLACE, W.: 229.
WALLIES, M.: 71, 73, 76, 83, 101.
WANG, Hao: 396, 400, 418.
WEEB, C. C. J.: 112.
WEIERSTRASS, K. T. W.: 300, 306, 307, 317.
WEISS, P.: 296.
WELLS, R. S.: 361.
WETTE, T. I.: 154.
WETTER, P. C.: 233.
WEYL, H.: 396, 397, 408.
WHATELY, R.: 244, 245, 255, 273.
WHEWELL, W.: 244, 246, 251.
WHITE, B.: 244, 251.
WHITEHEAD, A. N.: 192, 298, 299, 323, 346, 353, 358, 363, 376, 395.
WIENER, Ph. P.: 287, 297.
WIENPAHL, P. D.: 361.
WILKINS, J.: 193.
WIMMER, F.: 83.
WITTGENSTEIN, L.: 47, 178, 287, 384, 385, 392.
WOLFF, Ch.: VI, 169, 171, 245.
WOOKHOUSE, R.: *255-257*.
WUNDT, W.: 224, 242.

X

XIRAU, J.: 395.

Y

YOUNG, F. H.: 287, 297.
YOUNG, G. P.: 296.

Z

ZABARELLA, J.: 101, 102, 158, 165, 166, 189, 328.
ZABEEH, F.: 120, 224.
ZADEH, L. A.: 416.
ZAMENHOF, L. L.: 355.
ZAMFIRESCU, D.: 418.
ZELLER, E.: 34.
ZENÓN DE CITIO: 20, 86, 87, 93.
ZENÓN DE ELEA, 21, 84.
ZENÓN DE SIDÓN: 97.
ZERMELO, E.: 312, 313, 315, 359, 373, 375, 387, 400.
ZINOVIEV, A. A.: 234, 239, 409, 416, 417.
ZOZAYA, A.: 242.

INDICE DE MATERIAS

PRÓLOGO V

INTRODUCCIÓN 17

I. LOS ORÍGENES

1. Presupuestos gnoseológicos 19
2. Técnicas de las que procede la lógica 20
3. La dialéctica platónica 23

Bibliografía 30

II. ARISTÓTELES

1. Vida y Obra 31
2. Las categorías 33
3. Las proposiciones 43
4. El silogismo 54
5. Teoría de la Ciencia (Segundos Analíticos) 66
6. Teofrasto 77

Bibliografía 83

III. MEGÁRICO-ESTOICOS

1. Los megáricos 84
2. Los estoicos 86

Bibliografía 94

IV. EPICÚREOS

Bibliografía 99

V. EL FIN DE LA ANTIGÜEDAD CLÁSICA

Cicerón 100
Galeno 100
Porfirio 102
Boecio 104

Bibliografía.....108

VI. LA EDAD MEDIA

1. La logica *vetus:* La escolástica platónica.....109
   San Anselmo.....110
   Roscelino.....111
   Abelardo.....113
2. La logica *nova:* La escolástica aristotélica.....119
   2.1. Las *proprietates terminorum*.....124
   2.2. Los *syncategoremata*.....131
3. La lógica *modernorum*.....135
   3.1. Las *consequentiae*.....137

Bibliografía.....144

VII. RAMÓN LLULL

Bibliografía.....153

VIII. HUMANISTAS Y CARTESIANOS

1. Humanistas.....154
   Valla.....154
   Agrícola.....154
   Sturm.....156
   Ramus.....157
   Zabarella.....158
2. Cartesianismo.....159
   Descartes.....159
   La lógica de Port Royal.....160

Bibliografía.....165

IX. LEIBNIZ

1. Vida y Obra.....166
2. Redescubriento de Leibniz.....169
3. Presupuestos metafísicos.....174
4. La lógica clásica.....178
5. Lógica de relaciones.....187
6. Lógica inventiva (o arte combinatoria).....189
7. La *characteristica*.....191
8. El *calculus rationator*.....196
9. La Ciencia general.....202

Bibliografía.....205

X. LA LÓGICA SIMBÓLICA EN EL SIGLO XVIII

Ploucquet.....207
Lambert.....209
Holland.....211
Euler.....212
Gergonne.....214

Bibliografía.....217

XI. LÓGICA FILOSÓFICA EN LOS SIGLOS XVIII Y XIX

1. Lógica trascendental.....218
   Kant.....218
   Fichte.....222
   Schelling.....222
2. El Psicologismo.....223
   2.1. Antecedentes.....223

2.2. Mill 225
3. Lógica dialéctica 227
3.1. Hegel 227
3.2. El marxismo 233
Bibliografía 241

XII. EL ÁLGEBRA DE LA LÓGICA
1. Antecedentes 244
Hamilton 246
De Morgan 251
2. George Boole 259
3. Continuadores de Boole 276
Jevons 276
Venn 280
Peirce 285
Bibliografía 295

XIII. LA LOGÍSTICA HASTA RUSSELL 300
1. Bolzano 307
2. Karl Weierstrass 309
3. Dedekind 317
4. Frege 317
4.1. La *Begriffsschrift* 324
4.2. Axiomatización de la lógica 327
4.3. Proyecto logicista 350
4.4. Filosofía de la lógica 352
5. Peano 360
Bibliografía 364

XIV. RUSSELL
1. Definición de número 366
2. Teoría de las descripciones 370
3. Las paradojas 376
4. Teoría de los tipos lógicos 386
5. El sistema formal de los *Principia* 388
6. Fundamentación de la aritmética 391
7. Filosofía de la lógica 395
Bibliografía 397

XV. EL PROGRAMA HILBERTIANO
1. El método axiomático 398
2. Teoría de la prueba 400
3. Resultados formalistas 401
4. Limitaciones del formalismo 405
5. Funciones recursivas 407
Bibliografía 409

APÉNDICE: LOGICA POLIVALENTE 419

BIBLIOGRAFÍA DE CARÁCTER GENERAL 421

ÍNDICE DE AUTORES 425